Estructura del Espacio-Tiempo. Curso 2011 / 2012

Introducción y Estructuras Aristotélica y Galileana

0 Introducción

0.1 Sucesos o cronotopos.

0.2 Topología del ET.

0.3 Dimensionalidad del ET: Coordenadas radar.

0.4 ET como variedad 4-dimensional.

0.5 Estructuras del ET. Definición y enumeración.

I Estructura Aristotélica

I.1 ET aristotélico. Características.

I.2 Geometría.

I.3 Grupo de covarianza $\mathcal{G}_A$: Grupo de rotaciones y grupo euclidiano.

II Estructura Galileana

II.1 Principio galileano de relatividad.

II.2 ET galileano: características de la cinemática y consecuencias de la invarianza galileana.

II.3 Geometría.

II.4 Grupo de covarianza $\mathcal{G}_G$.

II.5 Magnitudes mecánicas.

II.6 Efecto Doppler.

Problemas de Estructura del Espacio-Tiempo. Curso 2011 / 2012

Hoja 1: Estructuras Aristotélica y Galileana

1. Sean T_1, T_2 dos transformaciones que dejan invariante el Espacio-Tiempo aristotélico dadas mediante $(R_1, \vec{a}, \tau_1)$ y $(R_2, \vec{a}, \tau_2)$ respectivamente. Nótese que la traslación espacial es la misma en ambas transformaciones.

En esta misma notación, determinar el elemento T_3 del grupo aristotélico que se obtendría al realizar el producto $T_1^{-1}\, T_2^{-1}\, T_1\, T_2$.

2. Considérese el elemento $g = (R, \vec{a}, \tau)$ del grupo aristotélico en el que R es la rotación de $\pi/3$ alrededor del eje $\vec{n} = (1, 1, 1)/\sqrt{3}$, $\vec{a} = (0, 1, -2)$ y $\tau = -3$. Calcular la matriz 5×5 que representa a g^{-1}. Ayuda: recuerde la expresión dada en clase de los elementos de una matriz de rotación de ángulo θ alrededor de un vector unitario $\vec{n}$.

3. Sean los sucesos S, S' con coordenadas $(\vec{x}, t)$ dadas por $S = (1, 0, -1, -4)$, $S' = (3, 0, 0, 2)$ en un cierto referencial aristotélico. Calcular la distancia entre los sucesos transformados de éstos por aplicación del elemento g dado en el ejercicio anterior.

4. La distancia máxima a la que un atleta parado lanza la jabalina es de 60m. ¿Qué distancia alcanzará la jabalina si el atleta la lanza corriendo a una velocidad de 8 ms^{-1}? Supóngase una jabalina puntual, lanzada desde el suelo (el último grito en el lanzamiento de jabalina), con un ángulo α respecto de la horizontal.

5. Úsese la transformación de Galileo para hallar la distribución de velocidades respecto a la carretera de los puntos de los diámetros vertical y horizontal de la rueda (de radio a) de un coche de caballos que se mueve con velocidad uniforme de módulo u. Supongamos que ha llovido y que salen despedidas gotas de barro de la llanta. Hallar de qué posición salen las que llegan más alto, si $u^2 > ga$.

6. Un barco atraviesa un río de anchura L desde un punto A hasta un punto B de la orilla opuesta situado justo enfrente de A. Una vez en B vuelve a A. Comprobar que el tiempo que tarda el barco en el viaje de ida y vuelta es $t = 2\,L/[v\,(1 - u^2/v^2)^{1/2}]$ donde v es el módulo de la velocidad del barco respecto al agua y u el mdulo de la velocidad del agua. Repítase el cálculo suponiendo ahora que el barco navega paralelamente a la corriente desde una isla E a otra isla F que distan entre sí una distancia L. En este caso debe obtenerse que la duración del viaje de ida y vuelta es $t' = 2\,L/[v\,(1 - u^2/v^2)]$.

[*Ésta es esencialmente la idea subyacente en el experimento de Michelson-Morley que veremos al estudiar el Espacio-Tiempo minkowskiano.*]

7. Una caja sobre la que no hay más acción exterior que su peso permanece inmóvil sobre una mesa durante los lapsos de tiempo $(0, \tau), (2\tau, 3\tau), (4\tau, 5\tau), \ldots$, y avanza uniformemente en una dirección determinada durante los lapsos de tiempo $(\tau, 2\tau), (3\tau, 4\tau), (5\tau, 6\tau), \ldots$. ¿Es esto una violación de la ley de conservación del momento?

8. Supóngase una colisión elástica (i.e. que conserva energía y momento) y no-relativista entre dos partículas de masas m_1 y m_2. Sea $\theta_{\rm lab}$ el ángulo que forma la dirección incidente de la partícula 1 con la saliente en el sistema de laboratorio (se llama sistema de laboratorio a aquél en el que la partícula 2 está en reposo), y $\theta_{\rm CM}$ el ángulo correspondiente en el sistema del centro de momentos. Demostrar que la relación entre $\theta_{\rm lab}$ y $\theta_{\rm CM}$ viene dada por

$$\tan\theta_{\rm lab} = \frac{\sin\theta_{\rm CM}}{\cos\theta_{\rm CM} + (m1/m2)}.$$

9. Un torpedo naval se desplaza con una cierta velocidad v directamente hacia un barco estacionario. Éste lo detecta a través de su sónar de frecuencia de emisión de 500 Hz, recibiendo un eco de sus señales a 553 Hz. Si la velocidad del sonido en el agua es de 1500 m/s, y si el agua se mueve a 10 m/s respecto del barco en sentido opuesto al del avance del torpedo, con qué velocidad se aproxima éste?

10. Un hipotético radar de la Guardia Civil emplea una frecuencia de 10^5 Hz. Un coche se dirige directamente hacia el radar en una autopista donde el límite de velocidad es 120 km/h. El receptor marca una frecuencia de 100 000,0185 Hz. ¿Deberá la Guardia Civil multar al conductor?

11. Un coche (**A**), que se mueve a 10km/h con un viento que sopla en contra de su movimiento a 10km/h, se cruza con otro coche (**B**) que se mueve en sentido contrario y a la misma velocidad. Ambos coches son idénticos y hacen sonar sus bocinas justo antes de cruzarse y después de haberse cruzado.
Calcule la razón entre las frecuencias recibidas por cada coche (es decir, el sonido procede del otro coche) antes y después de haberse cruzado los coches, ie. calcule

$$\frac{\omega_{A,\,\text{después}}}{\omega_{A,\,\text{antes}}}\;;\;\frac{\omega_{B,\,\text{después}}}{\omega_{B,\,\text{antes}}}$$

¿Son estas razones iguales o distintas? Explique razonadamente el resultado.

12. Un jugador de billar a bordo de un barco observa que una bola de masa m desplazándose a lo largo del eje X con momento p golpea a otra bola idéntica inicialmente en reposo en este sistema de referencia, saliendo las dos bolas en ángulo recto y con igual energía después del choque. Otro observador en la orilla ve que la bola blanco parece moverse inicialmente con velocidad $|\omega|\vec{j}$. ¿Cuál será el coseno del ángulo de salida que forman las dos bolas para el observador en la orilla?

13. ¿Depende la velocidad relativa $\vec{v}_{relativa}$ entre dos cuerpos del sistema de referencia en el que se mida?

Considérese la colisión elástica de dos cuerpos que se mueven a velocidades pequeñas y no nulas. Los cuerpos se desplazan sobre la misma línea recta antes y después de la colisión (colisión unidimensional). Como aplicación del principio de invariancia galileano, demuestre que la velocidad relativa entre ambos cuerpos en este tipo de colisiones se invierte en cualquier sistema de referencia tras producirse el choque, ie.:

$$\vec{v}_{relativa}^{\,inicial} = -\vec{v}_{relativa}^{\,final}$$

Ayuda: Demuestre este hecho en un sistema de referencia bien conocido (e.g. centro de masas, sistema del laboratorio) que le facilite los cálculos y aplique la respuesta a la cuestión inicial para generalizar el resultado a todo sistema de referencia.

14. En un acelerador asimétrico se aceleran dos partículas idénticas hasta velocidades lineales $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2 = -\alpha\,\vec{u}_1$, medidas en un cierto sistema de referencia. ¿Cuáles son las velocidades $\vec{v}_{1,2}$ en el sistema del centro de masas (tambien llamado centro de momentos) en relación a las velocidades $\vec{u}_{1,2}$ en el sistema inicialmente mencionado?

15. Una partícula se mueve con velocidad $\vec{u}$ en el plano XY respecto a un sistema de referencia **S** formando un ángulo de $\phi = \pi/3$ con el eje X. Otro sistema de referencia **S'** se mueve con velocidad $\vec{v} = |\vec{u}|(1\,,\,0)$ con respecto al anterior. ¿Cuál es el ángulo que ϕ' que forma la velocidad de dicha partícula en el sistema **S'**, denotada como $\vec{u}'$, respecto al eje X' del sistema **S'**?