Estructura del Espacio-Tiempo. Curso 2011 / 2012

Estructura Newtoniana

Nature and Nature's laws
lay hid in night:
God said, 'Let Newton be!'
and all was light.

Alexander Pope, poeta inglés.

III **Estructura Newtoniana**

III.1 Introducción.
- Universalidad de la caída libre. Principio de equivalencia débil (PED).
- Experimentos de Eötvös, Dicke y Braginsky.

III.2 Sistemas de referencia newtonianos.
- Cambios a referenciales galileanos generales.
- Sistemas no inerciales y el PED.

III.3 Sistemas de referencia inerciales newtonianos locales (SRIL).
- Ecuaciones de transporte paralelo en presencia de gravitación.
- La caída libre como movimiento geodésico.
- Fuerzas de marea y desviación geodésica.

III.4 ET Newtoniano. Grupo de covarianza $\mathcal{G}_N$.

(Int) **Intermezzo diferencial afín**

II.1 Campos tensoriales covariantes y contravariantes.

II.2 Conexión y símbolos de la conexión o de Christoffel.

II.3 Curvatura.
- Tensores de Riemann y de Ricci.
- Identidades de Bianchi.
- Desviación geodésica.

Problemas de Estructura del Espacio-Tiempo. Curso 2011 / 2012

Hoja 2: Estructura Newtoniana

1. (Principio de Equivalencia Débil). Suponga que dos péndulos idénticos exteriormente para minimizar efectos aerodinámicos, pero de distinta composición material, oscilan al unísono excepto quizá por un error máximo de

$$\epsilon = \frac{|T_1 - T_2|}{\frac{1}{2}(T_1 + T_2)} \ .$$

Obtenga una cota para la razón de Eötvös

$$\eta = \frac{|a_1 - a_2|}{\frac{1}{2}(a_1 + a_2)}$$

dada alguna cota para el error ϵ.

2. Lanzamos verticalmente una piedra hacia arriba. Sea $x^\alpha(t)$ su trayectoria en el ET, y $t = 0, t = \tau$ los instantes inicial (de lanzamiento) y de máxima altura. Calcule el cuadrivector tangente $\partial_t x^\alpha(t)$ en $t = 0$ y en $t = \tau$, y determine cuál es el vector transportado paralelo del $(0, 1)$ a lo largo de $x^\alpha(t)$ desde $x^\alpha(0)$ hasta $x^\alpha(\tau)$.

3. Con ayuda de sus motores, un cohete se aleja de la Tierra con velocidad v constante, siguiendo una trayectoria radial que está situada en el plano ecuatorial y que viene dada por

$$\gamma(s) := (t = s, x = x_0 + vs, y = 0, z = 0)$$

Considerando el campo gravitacional de la Tierra hasta su término cuadrupolar inclusive

$$\phi \simeq -\frac{GM}{r}\left[1 + \frac{k_2}{2r^2}\left(1 - 3\cos^2\theta\right)\right]$$

(con θ el ángulo polar tomado desde el norte o eje OZ), obtenga las ecuaciones de transporte paralelo para un vector arbitrario V, a saber

$$\partial_s V^\alpha(s) + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}(\partial_s \gamma(s))^\mu V^\nu(s) \ = \ 0$$

.

4. Considere una partícula en órbita circular,

$$(T = t, X = R\cos\omega t, Y = R\sin\omega t, Z = 0)$$

alrededor de una masa puntual M, y el cuadrivector $\vec{W} = (1, \frac{\sqrt{2}}{2}R\omega, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}R\omega)$ sobre el punto de la órbita correspondiente a $t = 0$. Utilizando la conexión en espacio-tiempo Newtoniano dada por los únicos símbolos de Christoffel no nulos $\Gamma^i_{00} = \partial_i \phi$ (ϕ denota al potencial gravitatorio), ¿cuál es el vector transportado paralelo al punto de la órbita caracterizado por $t = \frac{3\pi}{4\omega}$?

5. Considérese un túnel horadado a lo largo de un diámetro terrestre. Despreciando todos los efectos relacionados con la rotación terrestre (o si el túnel está excavado en el Polo Norte) se pide:

i. Demostrar que el movimiento de un cuerpo que se suelta sobre la boca del túnel es oscilatorio. Calcular el período.

ii. Calcular la velocidad con la que se debe lanzar un móvil, en dirección opuesta al túnel, para que el lapso entre su lanzamiento y su caída coincida con un período del móvil del apartado i.

iii. Calcular el transporte paralelo con la conexión del espacio-tiempo newtoniano para un vector cualquiera a lo largo de los dos caminos de los apartados anteriores. (El cálculo es sencillo razonando a partir del Principio de Equivalencia).

6. Sea un sistema de referencia en rotación $x^i = (r, \theta, z, t)$ dado por

$$\begin{aligned} X &= r\,\cos(\theta + \omega t) \\ Y &= r\,\sin(\theta + \omega t) \\ Z &= z \\ T &= t \end{aligned}$$

Obténgase la métrica del espacio plano en tales coordenadas, la ecuación de las geodésicas, y discútase la presencia de una fuerza de Coriolis.

7. Sean $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ las componentes de una conexión arbitraria. Mostrar que $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} + t^\gamma_{\alpha\beta}$ son también componentes de una conexión si $t^\gamma_{\alpha\beta}$ es un campo tensorial de tipo (1,2). Recíprocamente, suponer que $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ y $\overline{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}$ son las componentes de dos conexiones diferentes. Mostrar que $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} - \overline{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}$ son las componentes de un tensor de tipo (1,2).

8. Las componentes no nulas de la conexión sobre la esfera S^2 dada por los símbolos de Christoffel son: $\Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\cos(\theta)\sin(\theta)$ y $\Gamma^\phi_{\theta\phi} = \Gamma^\phi_{\phi\theta} = \mathrm{cotg}(\theta)$. Calcular las componentes del tensor de curvatura asociado a dicha conexión.

9. Definiendo los coeficientes de conexión o símbolos de Christoffel de segunda especie mediante

$$\nabla_{\partial_\alpha}\partial_\beta = \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\partial_\gamma$$

hállese su ley de transformación bajo un cambio de coordenadas $x_\alpha \longrightarrow y_\alpha(x)$ derivable. ¿Se transforman como un tensor?

10. Teniendo en cuenta la equivalencia entre masa inercial y energía, y la equivalencia entre masa inercial y masa gravitatoria, calcule la deflexión newtoniana de un fotón cuya trayectoria sea rasante al Sol.
N.B.: El orden de magnitud del resultado que se obtiene es correcto pero el valor no coincide con las observaciones. Será la teoría de la Relatividad General quien nos permita resolver correctamente este problema.

11. ¿Cómo determinaría las geodésicas en la superficie de una manzana con un trozo de hilo? ¿Y con pintura?

12. Supóngase que el campo gravitatorio en la superficie de la Tierra es constante, g = 10 m/s^2 en dirección del semieje Z negativo. Alberto Galindo, en un paseo por el paraninfo, lanza una manzana de 0.2 kg en vertical hacia arriba con velocidad inicial de 10 m/s.

Considérese la trayectoria de la manzana y la conexión afín en espacio-tiempo newtoniano.

i Obténganse los símbolos de Christoffel de la conexión newtoniana en la aproximación de campo gravitario constante.

ii Sea el cuadrivector velocidad inicial $v^\mu = \frac{dx^\mu}{dt}|_{t=0} = (1\,;\,\vec{v}_0)$. ¿Cuál es su transportado paralelo newtoniano sobre la trayectoria de la manzana en el punto más alto de dicha trayectoria?

iii Sea el cuadrivector $\omega^\mu = (\omega^0 = 1\,;\,\vec{\omega} = (1,0,1)\,\mathrm{m/s})$ en el punto inicial de la trayectoria de la manzana. ¿Cuál es su transportado paralelo en el punto más alto de la trayectoria?

Aquí descansa Sir Isaac Newton, Caballero que con fuerza mental casi divina demostró el primero, con su resplandeciente matemática, los movimientos y figuras de los planetas, los senderos de los cometas y el flujo y reflujo del Océano. Investigó cuidadosamente las diferentes refrangibilidades de los rayos de luz y las propiedades de los colores originados por aquéllos. Intérprete, laborioso, sagaz y fiel de la Naturaleza, la Antigüedad, y la Santa Escritura, defendió en su Filosofía la Majestad del Todopoderoso y manifestó en su conducta la sencillez del Evangelio. Dad las gracias, mortales, al que ha existido así, y tan grandemente como adorno de la raza humana.

Nació el 25 de diciembre de 1642; falleció el 20 de marzo de 1727.

Epitafio de Isaac Newton, Abadía de Westminster, Londres.