Estructura del Espacio-Tiempo. Curso 2010 / 2011
Estructura Minkowskiana

Por fin con un bastón pisamos suelo,
y viejos escapamos de la noria.
La noria tiene pies y tiene cima,
giro tras giro, sobre el firme suelo,
rompe la relación espacio tiempo.

extracto de *La noria*,
Ignacio Vleming, poeta madrileño.

IV **Estructura Minkowskiana**

IV.1 La velocidad de la luz.
- Observaciones de Roemer y Bradley.
- Experimento de Michelson-Morley.

IV.2 Ni espacio ni tiempo: sólo espacio-tiempo.
- Relatividad de la simultaneidad.
- Dilatación del tiempo.
- Contracción de longitudes.

IV.3 Sistemas de referencia minkowskianos.
- Transformaciones de Lorentz.
- Intervalo espacio-temporal.
- Combinación de velocidades relativistas.

IV.4 Geometría y grupo de covarianza.
- Formalismo minkowskiano.
- Grupos de Lorents y Poincaré.

IV.5 Cinématica y dinámica relativistas.
- Efecto Doppler.
- Colisiones.
- Variables de Mandelstam.

IV.6 Paradojas.
- Paradoja de barra-granero.
- Paradoja de los gemelos.
- Paradoja de velocidades superlumínicas.

Problemas de Estructura del Espacio-Tiempo. Curso 2010 / 2011
Hoja 3: Estructura Minkowskiana

1. Demostrar que la ecuación escalar de ondas electromagnéticas:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0$$

no es invariante bajo las transformaciones de Galileo. Comprobar que es invariante bajo las transformaciones de Lorentz. ¿ Qué relevancia tienen estos resultados para la teoría especial de la Relatividad?

2. Dos fotones son emitidos en sentidos opuestos (a lo largo del eje X) en el instante $t_0 = 3\ s$ desde un punto $x_0 > 0$ respecto a un sistema de referencia S. Uno de ellos es recibido en el punto $x_1 = 0$ en el instante $t_1 = 4\ s$, también con respecto al sistema S. El otro se recibe en el punto $x'_2 = 0$ en el instante $t'_2 = 2\sqrt{3}\ s$ con respecto a otro sistema de referencia S'. Calcular la velocidad del sistema S' con respecto al S sabiendo que ambos tienen orígenes comunes de tiempo y posiciones.

3. En un sistema inercial de referencia las coordenadas de dos sucesos son:
Suceso 1: $\{x_1 = 0.8,\ y_1 = 0.3\, z_1 = 0,\ t_1 = 4 \cdot 10^{-9}\}$
Suceso 2: $\{x_2 = 0.1,\ y_2 = 0.4\, z_2 = 0,\ t_2 = 3 \cdot 10^{-9}\}$
medidos en el S.I.
¿Pueden estos sucesos ser simultáneos? ¿Pueden verse en el mismo punto del espacio para algún observador? En caso afirmativo, hallar en qué sistema(s) de referencia sucede esto.

4. Un suceso ocurre en $\{t = 0,\ x = 1\}$ en un sistema de referencia dado (del que ignoramos las coordenadas y, z). En otro sistema, que se mueve con velocidad $3c/4$ a lo largo del eje $+X$, un segundo suceso ocurre en $\{t' = 1,\ x' = 0\}$. Si los orígenes de coordenadas de ambos sistemas coinciden, es decir $\{t = 0,\ x = 0\}$ y $\{t' = 0,\ x' = 0\}$ corresponden al mismo punto del ET. ¿Están estos dos sucesos conectados causalmente?

5. Una nave se desplaza respecto a la Tierra con $v = \frac{\sqrt{3}c}{2}$. Suponiendo que los orígenes de espacio y tiempo coinciden en los dos sistemas de referencia, estudiar si es posible una relación causal entre los sucesos S_1, cuyas coordenadas en el sistema terrestre son $x_1 = 4$ km y $t_1 = 10$ s y el suceso S_2 de coordenadas en el sistema de la nave $x'_2 = 0$ km y $t'_2 = 3$ s.

6. Tiempo propio: sabiendo que la vida media de los muones es de unos 1.5 microsegundos y que son producidos en las colisiones de rayos cósmicos en la atmósfera a unos 60 km de altura, estimar su velocidad si llegan a la superficie de la Tierra una fracción de 1/8 de los mismos.
Ayuda: la ley de desintegración de los muones viene dada por $N(t') = N_0\, 2^{-t'/T}$ donde t' es el tiempo medido en el sistema en reposo respecto al movimiento de los muones, $N_0 = N(t' = 0)$ y T es la vida media.

7. Considere un sistema de referencia **S**. Teniendo en cuanta que energa y momento lineal (relativistas) constituyen un 4-vector $(E/c, \vec{p})$, escriba la ley de transformación de Lorentz para este 4-vector cuando se mide desde un observador $\mathbf{S}'$ que se mueve a velocidad $\vec{V}$ con respecto a **S**.

8. Paradoja de la barra y el granero: Sea un corredor que lleva una barra paralela a su velocidad. La barra es de 20 m pero en el sistema de referencia asociado al suelo, solamente mide 10 m debido a la contracción de Lorentz. Por tanto cabe en un granero de 10 m de largo. Pero en el sistema de referencia del corredor, es el granero el que está contraído a una longitud de 5 m, y por tanto la barra no cabe. Aclárese la paradoja analizando con cuidado, mediante las transformaciones de Lorentz, los sucesos de llegada del principio de la barra al final del granero, y del final de la barra al principio del granero.

9. Dos trenes relativistas se mueven con sentidos opuestos a lo largo de una vía única. Ésta se desdobla en dos carriles en el tramo central, que tiene longitud L. Las cabeceras de los dos trenes llegan al comienzo del tramo doble en el mismo instante y cada uno elige una vía diferente. Sabiendo que los trenes miden L en su propio sistema y que sus velocidades son v_1 y v_2, hallar cuándo no se produce un choque entre ambos.

10. Un núcleo atómico cuya superficie en sus sistema de referecnia propio es aproximadamente esférica de radio 2 fm, es acelerado hasta una velocidad final $v = \frac{\sqrt{3}}{2}c$ en la dirección del eje OX, alcanzándola en el instante $t = 0$ cuando los orígenes de su sistema de referencia propio y el del laboratorio coinciden. En ese momento, y para el sistema del laboratorio, la ecuación de la superficie del nucleo es:

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 6 \text{ fm}^2$
2. $4x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ fm}^2$
3. $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 4 \text{ fm}^2$
4. $\frac{3}{2}x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ fm}^2$

NB.: recuérdese que la ecuación de un elipsoide de semiejes a,b y c sobre los ejes X, Y y Z centrado en el origen de coordenadas viene dada por $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$

11. Una y sólo una de las siguientes afirmaciones **NO** depende del sistema de referencia minkowskiano elegido, ¿ cuál?
- Un suceso puede ser causa de otro.
- Una fuerza es central.
- Las áreas barridas por el radio vector desde el Sol a un planeta en tiempos iguales son iguales.
- La suma de las energías cinética y potencial se conserva.

12. Demostrar la imposibilidad de los siguientes procesos:
1) Un fotón choca con un electrón en reposo y entrega toda su energía al electrón.
2) Un fotón situado en el espacio libre se transforma en un electrón y un positrón.
3) Un positrón rápido y un electrón en reposo se destruyen mutuamente dando lugar a un solo fotón.

13. Una partícula de energía total $2m_0c^2$ (en un sistema S) y masa en reposo m_0 es emitida a lo largo del eje X en el instante $t = 0$ en el punto $x = 0$ también en el sistema S. 1s más tarde se emite otra desde el mismo punto. Calcular el tiempo transcurrido entre ambos sucesos para un observador en reposo con la primera partícula.

14. Un fotón de trimomento $\mathbf{q}$ incide sobre un protón en reposo de masa $M \simeq 938\,\mathrm{MeV}/c^2$. En esa colisión la energia del foton se emplea en producir un par de piones π^+, π^- (de masa individual $139,6$ MeV/c^2), es decir

$$\gamma + p \longrightarrow p + \pi^+ + \pi^-$$

Calcule el valor mínimo de $\mathbf{q}$ que tal proceso exige.

NB.: el proceso umbral consiste en la salida de todos los productos con la misma velocidad (módulo, dirección y sentido) $\mathbf{v}$.

15. Hallar la energía umbral que debe llevar un haz de protones en el sistema del laboratorio, para que al chocar con protones estacionarios, es decir, en reposo en ese sistema de referencia, se pueda producir la reacción: $p + p \longrightarrow p + p + p + \bar{p}$

16. Efecto Doppler relativista: una galaxia circular cuyo eje de simetría está orientado hacia la Tierra se desplaza con velocidad relativista perpendicular a ese eje. ‘? Qué relación existe entre el desplazamiento Doppler $z := (\lambda_{emitida} - \lambda_{observada})\,/\lambda_{observada}$ de la luz recibida desde la galaxia y su excentricidad aparente ϵ observada desde la Tierra?

Ayuda: $\lambda_{emitida}$ es la longitud de onda emitida por la galaxia y $\lambda_{observada}$ es la longitud de onda recibida en el observatorio terrestre. Para una elipse de semiejes mayor y menor a y b respectivamente y de ecuación $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$, su excentricidad se define como $\epsilon := \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$

17. La serie de Lyman para el hidrógeno está dada por $\frac{1}{\lambda_n} = R_H \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ con $n = 2,\ 3$ ... y $R_H \simeq 1.097 \cdot 10^7 m^{-1}$ la constante de Rydberg. Considérese una galaxia emitiendo en dichas longitudes de onda y que se mueve con velocidad v con respecto a la Tierra. ¿Cómo se modifica la serie de Lyman medida desde la Tierra si la galaxia se aleja en dirección radial? ¿Y si se mueve en dirección perpendicular a la línea de observación? ¿Sería posible confundirla con la de Balmer? Se pueden ignorar todos los efectos gravitatorios.

18. a) La ley de Hubble afirma que el corrimiento al rojo de un cuásar lejano viene dado por

$$z = H\frac{r}{c} = \frac{\lambda_{observada}}{\lambda_{emitida}}\ .$$

Calcúlese la distancia a un cuásar con corrimiento al rojo z=0.16 si la constante de Hubble $H \simeq 70\frac{km}{sMpc}$ (un pársec son 3.26 años luz). Imaginemos que el cuásar emite isotrópicamente pulsos de plasma luminoso: calcúlese también su velocidad transversal máxima aparente si se emiten a velocidades de 0.95c en el sistema en reposo del cuásar. b) Una barra cae con velocidad constante 0.99c formando un ángulo de 5^o con la horizontal. Calcular la velocidad del punto de intersección entre la barra y el eje x. En un momento dado, t=0, la barra tropieza con un obstáculo insalvable sobre el eje, en x=0. ¿Podrá un observador situado a lo largo del eje x conocer ese suceso antes de que la barra cruce por delante suyo?

19. A y B son gemelos. A marcha hacia α-Centauri (4 años luz) y regresa a la Tierra. En ambos trayectos su velocidad es de 0.6c y transmite una señal luminosa cada 0.01 años en su sistema de referencia. Su hermano B emite también señales cada 0.01 años del suyo.
1) ¿ Cuántas señales de las emitidas por A antes de iniciar el regreso recibe B?.
2) ¿ Cuántas señales recibe A antes de regresar?
3) ¿ Cuál es el número total de señales que recibe cada uno del otro?
4) ¿ Quién es el más joven?

20. Considérese la variable adimensional $\eta := \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)$ donde $\beta = v/c$? Cuál es la ley de adición relativista de la variable η bajo cambio de inerciales a lo largo de la misma dirección de movimiento?
1. $\eta = \eta_1 + \eta_2$
2. $\eta = \gamma(\eta_1 + \eta_2)$
3. $\eta = \beta\gamma(\eta_1 - \eta_2)$
4. $\eta = \frac{\eta_1+\eta_2}{1+\eta_1\eta_2}$

21. La Vía Láctea mide aproximadamente 10^5 años luz. ¿ Qué tiempo propio empleará un electrón de energía $2 \cdot 10^7$ MeV en atravesarla? Masa del electrón = 0.511 MeV.

22. El potencial eléctrico creado por una línea de carga de densidad constante tendida a lo largo del eje OZ es $V = h\ \log(\sqrt{x^2+y^2})$, con h una cierta constante. Se efectúa una transformación de Lorentz a lo largo del eje OZ, con velocidad β. Considérese el campo vectorial

$$A^\mu(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} V(x,y,z) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

en el sistema en reposo de la línea de carga, y el tensor de Faraday $F^{\mu\nu} = A^{\nu,\mu} - A^{\mu,\nu}$ que de él se obtiene derivando. ¿Cuál es el valor de la componente F^{13} expresado en las coordenadas $Ox'y'z'$ del sistema en movimiento?