Estructura del Espacio-Tiempo. Curso 2011 / 2012

Estructura Einsteniana y Cosmología

The laws of nature should be expressed in beautiful equations.

Paul Dirac, British physicist.

We are bits of stellar matter that got cold by accident,
bits of a star gone wrong.

Arthur Eddington, English astronomer.

V **Estructura Einsteniana**

V.1 Principio de Equivalencia fuerte (PEF).
- SRIL Einstenianos.

V.2 Consecuencias del PEF.
- Deflexión gravitacional de la luz.
- Desplazamiento gravitacional de frecuencias.
- Dilatación gravitacional de tiempos.

V.3 Variedades pseudo-Riemannianas.
- Conexión métrica o de Levi-Cività. Consecuencias.

V.4 Ecuaciones de Einstein: la teoría de la Relatividad General.
- Tensor de Einstein.
- Propiedades de las ecuaciones.

V.5 Soluciones de las ecuaciones de Einstein: solución de Schwarzschild.
- Propiedades y límite newtoniano. Dilatación de tiempos.
- Teorema de Birkhoff.

V.6 Agujeros negros.
- Agujero negro de Schwarzschild: formación, horizonte de sucesos y desplazamiento de frecuencias.
- Agujero negro tipo Kerr-Neumann: horizonte y ergosfera.
- A-negrodinámica.
- Micro-agujeros negros en LHC.

VI **Cosmología**

VI.1 Introducción al modelo ΛCDM o cosmológico estándar.
- Universo a gran escala.
- Principio cosmológico. Observadores fundamentales.
- Homogeneidad e isotropía global. Backreaction?
- Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker.

VI.2 Consecuencias del principio cosmológico.
- Desplazamiento cosmológico al rojo. Ley de Hubble.
- Ecuaciones de FRW con y sin constante cosmológica. Soluciones cosmológicas.
- Parámetro de deceleración.

VI.3 Problemas del modelo ΛCDM.
- Problema de la coincidencia y de naturalidad de Λ.
- El problema de la energía oscura y la materia oscura.
- Hacia teorías de gravedad modificada.

VI.4 Big Bang. El Universo primitivo y su evolución.

Problemas de Estructura del Espacio-Tiempo. Curso 2010 / 2011

Hoja 3: Estructura Einsteniana y Cosmología

1. Para un espacio-tiempo de cuatro dimensiones con simetría esférica y estático, en el que se tiene una masa M, la métrica para el espacio-tiempo exterior a dicha masa se puede escribir como:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2)$$

Esta métrica se conoce como métrica de Schwarzschild. Calcúlense los símbolos de Christoffel, el tensor de Riemann, el tensor de Ricci y finalmente el tensor $G_{\mu\nu}$. Aceptando la validez de las ecuaciones de Einstein, escríbase a partir de los cálculos anteriores la forma de las componentes no nulas del tensor energía-impulso.

2. ¿Qué energía ha perdido un fotón emitido en el suelo y recogido en un edificio a 20 m de altura a lo largo de su trayecto?

3. Al espacio-tiempo cuya métrica es $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{1+a^{-1}|z|}\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{e}^{1+a^{-1}|z|}\mathrm{d}z^2$, le corresponde un tensor de Ricci dado por $R_{tt} = R_{zz} = a^{-1}\delta(z)$ con todas las demás componentes nulas. De acuerdo con las ecuaciones de Einstein, el contenido material $T_{\mu\nu}$ de este espacio-tiempo
1. está concentrado en el eje Z.
2. es nulo.
3. tiene densidad uniforme.
4. está concentrado en el plano XY.

* NB: $\delta(z)$ significa la habitual distribución delta de Dirac de variable z.

4. Sean las ecuaciones de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \;=\; 8\pi G T_{\mu\nu}$$

En una geometría vacía, es decir donde no hay materia ni energía. ¿Puede concluirse algo sobre la curvatura escalar R? ¿y sobre el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$?

Considérese ahora el caso en el que se tiene energía oscura en forma de constante cosmológica Λ, de modo que las ecuaciones quedan

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \;=\; 8\pi G T_{\mu\nu}$$

¿Qué puede concluirse nuevamente en esta situación de geometría vacía para la curvatura escalar y el tensor de Ricci? Ayuda: $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 4$ con μ y ν índices sumados.

5. Dos agujeros negro de tipo Schwarzschild y de igual masa M se fusionan en un agujero negro de igual tipo y masa M', liberándose con ello una energía E. Sabiendo que en ese proceso el área de los horizontes crece, calcular el valor máximo que puede alcanzar el rendimiento energético, definido éste como $E/2M$. Notar que la energía inicial del sistema ser la suma de las masas iniciales y que la energía final será la suma de la masa final M' más la energía liberada E.

6. Para un universo FRW espacialmente plano con materia en polvo (el contenido en radiación se desprecia) y constante cosmológica Λ, la expansión en tiempo coordenado t viene dada por

$$a(t) \;=\; \left(\frac{1-\Omega_\Lambda}{\Omega_\Lambda}\right)^{1/3} \sinh^{2/3}\left(\frac{3\sqrt{\Omega_\Lambda}}{2}H_0 t\right)$$

donde $\Omega_\Lambda = \Lambda/3H_0^2$, $\Omega_m = 8\pi G\rho_m(t_{hoy})/3H_0^2$ y $H_0 = (71{,}00 \pm 0{,}004)\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$ es el parámetro de Hubble hoy. Demostrar

a) que esta expansión $a(t)$ es efectivamente solución de la ecuación de Friedmann para este tipo de universos.

b) Sabiendo que para $t = t_{hoy}$ la expansión cumple $a(t_{hoy}) = 1$, determinar la edad del universo, es decir, t_{hoy}.

c) Verificar que $\mathrm{d}^2 a(t)/\mathrm{d}t^2$ es positiva para $t = t_{hoy}$.

d) Determinar el parámetro de deceleración $q(t)$ para todo tiempo t. Evalúese este parámetro en $t = t_{hoy}$ tomando los valores $\Omega_\Lambda = 0{,}73$ y $\Omega_m = 0{,}23$.

6. En un Universo FRW con constante cosmológica y ecuación de estado $P = \omega\rho$, considérese la ecuación del movimiento de la densidad

$$\rho'(t) + 3\frac{a'(t)}{a(t)}(1+\omega)\rho(t) \;=\; 0 \tag{1}$$

y la ecuación de Friedmann

$$\left(\frac{a'(t)}{a(t)}\right)^2 \;=\; \frac{8\pi G}{3}\rho(t) + \frac{\Lambda}{3} \tag{2}$$

donde $'$ denota derivada respecto al tiempo. Demuestre que si se deriva la ecuación (2) respecto de t, y se utilizan (1) y (2) en la ecuación obtenida, se llega a la ecuación de la aceleración dada por

$$\frac{a''(t)}{a(t)} \;=\; -\frac{4\pi G}{3}\rho(t)(1+3\omega) + \frac{\Lambda}{3}$$