

# Cálculo I

*Artemio González López*

Madrid, octubre de 1999

# Índice general

<b>0. Preliminares</b>	<b>1</b>
<b>1. La recta real</b>	<b>4</b>
1.1. Concepto de cuerpo . . . . .	4
1.2. Consecuencias de los axiomas de cuerpo . . . . .	5
1.2.1. Potencias . . . . .	6
1.3. Cuerpos ordenados . . . . .	7
1.4. Consecuencias de los axiomas de orden . . . . .	8
1.4.1. Relaciones entre $\leq$ y $\cdot$ . . . . .	9
1.4.2. Otras consecuencias de los axiomas de orden . . . . .	10
1.5. Valor absoluto . . . . .	10
1.5.1. Máximo y mínimo . . . . .	11
1.6. Axioma del supremo . . . . .	12
1.7. Consecuencias del axioma del supremo . . . . .	15
1.7.1. La propiedad arquimediana de los números reales . . . . .	16
1.7.2. Intervalos . . . . .	17
1.7.3. Existencia de raíces $n$ -ésimas . . . . .	18
1.8. Potencias . . . . .	21
<b>2. Funciones reales de variable real</b>	<b>24</b>
2.1. Definición. Dominio, imagen y gráfica. . . . .	24
2.2. Funciones inyectivas, suprayectivas y biyectivas . . . . .	26
2.3. Composición de funciones . . . . .	29
2.4. Funciones monótonas . . . . .	29
2.5. Logaritmos . . . . .	30
2.6. Funciones periódicas . . . . .	33
2.6.1. Funciones trigonométricas . . . . .	34
2.7. Operaciones algebraicas con funciones . . . . .	38
<b>3. Límites y continuidad</b>	<b>40</b>
3.1. Límites . . . . .	40
3.1.1. Límites infinitos . . . . .	44
3.1.2. Límites laterales . . . . .	45

3.1.3.	Propiedades de los límites . . . . .	47
3.2.	Continuidad . . . . .	49
3.2.1.	Continuidad en un punto . . . . .	49
3.2.2.	Continuidad en intervalos . . . . .	53
3.3.	Teoremas fundamentales . . . . .	54
3.3.1.	Teorema de Bolzano . . . . .	54
3.3.2.	Teorema de los valores intermedios . . . . .	55
3.3.3.	Teorema de acotación . . . . .	56
3.3.4.	Existencia de máximo y mínimo . . . . .	57
3.4.	Funciones monótonas y continuidad . . . . .	57
<b>4.</b>	<b>Derivación</b> . . . . .	<b>61</b>
4.1.	Definición . . . . .	61
4.2.	Cálculo de derivadas . . . . .	65
4.2.1.	Regla de la cadena . . . . .	67
4.2.2.	Derivadas de orden superior . . . . .	70
4.2.3.	Derivada de la función inversa . . . . .	72
4.3.	Teoremas de Rolle y del valor medio . . . . .	76
4.3.1.	Crecimiento, decrecimiento y extremos locales . . . . .	76
4.3.2.	Teorema de Rolle . . . . .	78
4.3.3.	Teorema del valor medio . . . . .	79
4.4.	Extremos locales . . . . .	81
4.5.	Reglas de L'Hospital . . . . .	83
4.6.	Convexidad . . . . .	85
<b>5.</b>	<b>Integración</b> . . . . .	<b>94</b>
5.1.	Preliminares . . . . .	94
5.2.	Propiedades de la integral . . . . .	102
5.3.	Continuidad e integrabilidad . . . . .	107
5.4.	El teorema fundamental del Cálculo . . . . .	110
5.5.	Cálculo de primitivas . . . . .	113
5.5.1.	Integración por partes . . . . .	115
5.5.2.	Cambio de variable . . . . .	117
5.5.3.	Integración de funciones racionales . . . . .	119
5.5.4.	Integrales reducibles a integrales de funciones racionales	121
5.6.	Integrales impropias . . . . .	125
5.6.1.	Integrales impropias de primera especie . . . . .	125
5.6.2.	Integrales impropias de segunda especie . . . . .	131
5.6.3.	Integrales impropias de tercera especie . . . . .	133
5.7.	Aplicaciones de la integral . . . . .	134
5.7.1.	Área limitada por la gráfica de una función . . . . .	134
5.7.2.	Longitud de un arco de curva . . . . .	135
5.7.3.	Volumen y área de un sólido de revolución . . . . .	137

<b>6. El teorema de Taylor</b>	<b>139</b>
<b>7. Sucesiones y series</b>	<b>146</b>
7.1. Sucesiones numéricas . . . . .	146
7.1.1. Teorema de Bolzano–Weierstrass . . . . .	148
7.1.2. El criterio de Cauchy . . . . .	151
7.2. Series numéricas . . . . .	152
7.2.1. Criterios de convergencia . . . . .	153
7.3. Sucesiones y series de funciones . . . . .	158
7.3.1. Convergencia uniforme . . . . .	160
7.3.2. Series de funciones . . . . .	163
7.4. Series de Taylor y series de potencias . . . . .	165

# Capítulo 0

## Preliminares

Aunque aceptaremos la noción de **conjunto** como un concepto primitivo (es decir, no definido en término de otros conceptos más fundamentales), la idea intuitiva de conjunto es la de una colección de objetos. Es esencial que la pertenencia de un objeto a un conjunto determinado sea una noción bien definida y no ambigua. Por ejemplo,  $A = \{1, 2, \sqrt{7}, \text{España}\}$  es un conjunto, al igual que  $B = \{x : x \text{ es ciudadano español}\}$ , mientras que  $C = \{x : x \text{ es un país desarrollado}\}$  no lo es. Usaremos la notación  $x \in A$  (respectivamente  $x \notin A$ ) para denotar que  $x$  es (respectivamente no es) un elemento del conjunto  $A$ . Denotaremos por  $\emptyset$  al **conjunto vacío**, definido como aquél conjunto que no posee ningún elemento. Por ejemplo,

$$\{x \in \mathbf{N} : x^2 < 0\} = \emptyset.$$

Dados dos conjuntos  $A$  y  $B$ , diremos que  $A$  está **contenido** en  $B$  (ó que  $A$  es un **subconjunto** de  $B$ ), y escribiremos  $A \subset B$ , si todo elemento de  $A$  está también en  $B$ . Simbólicamente,

$$A \subset B \iff (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

La notación  $B \supset A$  significa lo mismo que  $A \subset B$ . Por definición, dos conjuntos  $A$  y  $B$  son **iguales** (lo que será denotado por  $A = B$ ) si  $A \subset B$  y  $B \subset A$ . Equivalentemente,

$$A = B \iff (x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

Utilizaremos a veces la notación  $A \subsetneq B$  para indicar que  $A \subset B$  y  $A \neq B$ .

Dado un conjunto  $A$ , denotaremos por  $\mathcal{P}(A)$  al **conjunto de las partes de  $A$** , definido como el conjunto de los subconjuntos de  $A$ :

$$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subset A\}.$$

La relación de inclusión ( $\subset$ ) es una **relación de orden parcial** en  $\mathcal{P}(A)$ , ya que goza de las siguientes propiedades:

$$\text{I) } \forall B \in \mathcal{P}(A), B \subset B \quad (\text{propiedad reflexiva})$$

$$\text{II) } \forall B, C \in \mathcal{P}(A), B \subset C \text{ y } C \subset B \implies B = C \quad (\text{prop. antisimétrica})$$

$$\text{III) } \forall B, C, D \in \mathcal{P}(A), B \subset C \text{ y } C \subset D \implies B \subset D \quad (\text{propiedad transitiva})$$

Evidentemente, cualquiera que sea  $A$  los conjuntos  $\emptyset$  y  $A$  son subconjuntos de  $A$  (i.e., son elementos del conjunto  $\mathcal{P}(A)$ ). A estos dos subconjuntos en cierto modo triviales se les llama subconjuntos **impropios** de  $A$ , mientras que un subconjunto **propio** de  $A$  es cualquier subconjunto de  $A$  distinto de  $\emptyset$  y de  $A$ .

Dados dos conjuntos  $A$  y  $B$ , se definen los conjuntos  $A \cap B$  (**intersección** de  $A$  con  $B$ ) y  $A \cup B$  (**unión** de  $A$  y  $B$ ) mediante

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}, \quad A \cup B = \{x : x \in A \text{ ó } x \in B\}.$$

Obviamente,  $A \cap B \subset A, B \subset A \cup B$ . Denotaremos por  $A - B$  a la **diferencia** de los conjuntos  $A$  y  $B$ , definida por

$$A - B = \{x \in A : x \notin B\} = A \cap \{x : x \notin B\}.$$

La unión y la intersección de conjuntos gozan de las siguientes propiedades elementales:

$$\text{I) } A \cap B = B \cap A, \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$\text{II) } A \cap B = A \iff A \subset B$$

$$\text{III) } A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$\text{IV) } A \cup B = B \cup A, \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$\text{V) } A \cup B = A \iff B \subset A$$

$$\text{VI) } A \cup \emptyset = A$$

$$\text{VII) } A \subset B \implies A \cap C \subset B \cap C, \quad A \subset C, B \subset C \implies A \cup B \subset C$$

La unión y la intersección verifican además las siguientes **propiedades distributivas**:

$$\text{I) } A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\text{II) } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Demostremos, por ejemplo, la primera de estas igualdades. En virtud de la definición de igualdad de dos conjuntos, basta probar que el miembro izquierdo está contenido en el miembro derecho y viceversa.

En primer lugar,

$$B, C \subset B \cup C \implies A \cap B \subset A \cap (B \cup C), \quad A \cap C \subset A \cap (B \cup C),$$

de donde se deduce que el miembro derecho está contenido en el miembro izquierdo. Recíprocamente, si  $x \in A \cap (B \cup C)$  entonces  $x \in A$  y  $x \in B \cup C$ , es decir  $(x \in A \text{ y } x \in B)$  ó  $(x \in A \text{ y } x \in C)$ , de donde se deduce que  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ . Esto prueba que el miembro izquierdo está contenido en el miembro derecho.

En general, si  $I$  es un conjunto de índices arbitrario (finito ó infinito) tal que a todo  $i \in I$  le corresponde un conjunto  $A_i$ , se define la unión y la intersección de la familia de conjuntos  $\{A_i : i \in I\}$  mediante las fórmulas

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : \exists j \in I \text{ tal que } x \in A_j\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x : x \in A_j, \forall j \in I\}.$$

El **producto cartesiano** de dos conjuntos  $A$  y  $B$  es el conjunto

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}.$$

Nótese que en esta definición  $(x, y)$  es un **par ordenado**. En otras palabras,

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \iff x_1 = x_2 \text{ e } y_1 = y_2.$$

De esto se deduce que  $A \times B$  no tiene por qué ser igual a  $B \times A$ . (*Ejercicio:* ¿cuándo es  $A \times B = B \times A$ ?) Más generalmente, dados  $n$  conjuntos  $A_1, \dots, A_n$  definiremos su producto cartesiano mediante

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in A_i, \forall i = 1, 2, \dots, n\}.$$

En particular, si  $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$  escribiremos

$$\underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ veces}} = A^n.$$

En otras palabras,

$$A^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in A, \forall i = 1, 2, \dots, n\}.$$

*Ejercicio.* ¿Son iguales los conjuntos  $\emptyset$ ,  $\{\emptyset\}$ ,  $\{\{\emptyset\}\}$ ?

# Capítulo 1

## La recta real

### 1.1. Concepto de cuerpo

**Definición 1.1.** Un **cuerpo** es un conjunto  $\mathbf{F}$  en el que hay definidas dos operaciones  $+$  :  $\mathbf{F} \times \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}$ ,  $\cdot$  :  $\mathbf{F} \times \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}$  (**suma** y **producto**, respectivamente) y dos elementos  $0 \neq 1$  que cumplen las propiedades siguientes:

I)  $(\mathbf{F}, +)$  es grupo abeliano: si  $x, y, z \in \mathbf{F}$  se tiene

I)  $x + y = y + x$  (*propiedad conmutativa*)

II)  $(x + y) + z = x + (y + z)$  (*propiedad asociativa*)

III)  $x + 0 = x, \forall x \in \mathbf{F}$  (*elemento neutro ó cero*)

IV)  $\forall x \in \mathbf{F}, \exists y \in \mathbf{F}$  tal que  $x + y = 0$  (*inverso respecto de la suma*)

II)  $(\mathbf{F} - \{0\}, \cdot)$  es grupo abeliano: si  $x, y, z \in \mathbf{F}$  se tiene

v)  $x \cdot y = y \cdot x$  (*propiedad conmutativa*)

VI)  $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$  (*propiedad asociativa*)

VII)  $1 \cdot x = x, \forall x \in \mathbf{F}$  (*elemento neutro ó unidad*)

VIII)  $\forall x \in \mathbf{F}$  con  $x \neq 0, \exists y \in \mathbf{F}$  tal que  $x \cdot y = 1$  (*inverso respecto del producto*)

III) Propiedad distributiva de la suma respecto del producto:

IX)  $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \forall x, y, z \in \mathbf{F}$

A partir de ahora, escribiremos  $xy$  en lugar de  $x \cdot y$ .

**Ejemplo 1.2.** Los conjuntos  $\mathbf{N}$  y  $\mathbf{Z}$  no son cuerpos. El conjunto  $\mathbf{Q}$  sí lo es. El cuerpo más pequeño es el conjunto  $\{0, 1\}$  con la suma y multiplicación usuales módulo 2.



## 1.2. Consecuencias de los axiomas de cuerpo

**Proposición 1.3.** Si  $(\mathbf{F}, +, \cdot)$  es un cuerpo entonces se cumple:

I) 0 es único: si  $x + 0' = x, \forall x \in \mathbf{F}$ , entonces  $0' = 0$ .

En efecto,  $0 + 0' = 0$  (por ser  $0'$  cero)  $= 0'$  (por ser  $0$  cero)  $\Rightarrow 0 = 0'$ .

II) El inverso respecto de la suma es único:  $x + y = 0 = x + y' \Rightarrow y = y'$ .

En efecto,  $y + (x + y) = y + (x + y') \Rightarrow (y + x) + y = (y + x) + y' \Rightarrow y = y'$ .

- Debido a esta propiedad, podemos llamar a partir de ahora  $-x$  al inverso de  $x$  respecto de la suma.

- De la unicidad del inverso respecto de la suma se deduce que  $-(-x) = x, \forall x \in \mathbf{F}$ .

- A partir de ahora,  $x - y$  denotará el número  $x + (-y)$ .

III) Si  $a, b \in \mathbf{F}$ , la ecuación  $x + a = b$  tiene la solución única  $x = b - a$ .

IV) 1 es único: si  $1' \cdot x = x, \forall x \in \mathbf{F}$ , entonces  $1' = 1$ .

V) El inverso respecto del producto es único: si  $x \neq 0, xy = 1 = xy' \Rightarrow y = y'$ .

- Debido a esta propiedad, podemos llamar a partir de ahora  $x^{-1} = \frac{1}{x}$  al inverso de  $x$  respecto del producto.

- De la unicidad del inverso respecto del producto se sigue que  $(x^{-1})^{-1} = x, \forall x \neq 0, x \in \mathbf{F}$ .

- A partir de ahora,  $\frac{y}{x}$  denotará el número  $y \frac{1}{x}$ .

VI) Si  $x, y \neq 0$ , entonces  $\frac{1}{xy} = \frac{1}{x} \frac{1}{y}$ .

VII) Si  $a, b \in \mathbf{F}$  y  $a \neq 0$ , la ecuación  $ax = b$  tiene la solución única  $x = \frac{b}{a}$ .

VIII)  $\forall x \in \mathbf{F}$  se tiene  $0 \cdot x = 0$ .

En efecto,  $0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x \Rightarrow 0 \cdot x = 0$  (sumando  $-(0 \cdot x)$ ).

**Corolario 1.4.**  $0^{-1}$  no existe en ningún cuerpo.

En efecto,  $\forall x \in \mathbf{F}$  se tiene  $x \cdot 0 = 0 \neq 1$ .

Todo cuerpo incluye los elementos  $1 \neq 0, 1 + 1 = 2, 1 + 1 + 1 = 3$ , etc., análogos a los números naturales. La diferencia es que puede ocurrir que  $k = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_k = 0$ . Por ejemplo,  $2 = 0$  en el cuerpo  $\{0, 1\}$ . Esto motiva

la siguiente definición:

**Definición 1.5.** La **característica** de un cuerpo es el número natural  $p$  más pequeño tal que  $\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{p \text{ veces}} = 0$ . Si  $1 + 1 + \cdots + 1$  es siempre distinto de cero, diremos que la característica es cero.

Por ejemplo,  $\{0, 1\}$  tiene característica 2, mientras que  $\mathbf{Q}$  tiene característica 0. Todo cuerpo con característica 0 incluye el conjunto infinito  $\{1, 2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1, \dots\}$ , que es equivalente a  $\mathbf{N}$  y denotaremos simplemente por  $\mathbf{N}$  a partir de ahora. Por el mismo motivo, un cuerpo de característica 0 contiene también (conjuntos equivalentes) a  $\mathbf{Z}$  y  $\mathbf{Q}$ .

**Proposición 1.6.** Si la característica de un cuerpo es distinta de cero, entonces es un número primo.

Esto es consecuencia de la siguiente importante proposición:

**Proposición 1.7.** Sea  $\mathbf{F}$  un cuerpo, y sean  $a, b \in \mathbf{F}$ . Si  $ab = 0$ , entonces  $a = 0$  ó  $b = 0$ .

*Demostración.* Si  $a \neq 0$ , multiplicando por  $a^{-1}$  obtenemos  $b = 0$ . Análogamente, si  $b \neq 0$  multiplicando por  $b^{-1}$  obtenemos  $a = 0$ . *Q.E.D.*

En particular, si la característica de un cuerpo fuera un número natural  $p = rs$  con  $1 < r, s < p$ , entonces  $p = 0 \Rightarrow r = 0$  ó  $s = 0$ , y por tanto habría un número “natural” ( $r$  ó  $s$ ) menor que  $p$  e igual a cero.

**Nota:** para todo número primo  $p$ , hay un cuerpo de característica  $p$ . Un ejemplo es el cuerpo  $\{0, 1, \dots, p-1\}$  con la suma y el producto ordinario módulo  $p$ .

### 1.2.1. Potencias

Dado  $x \in \mathbf{F}$ , definimos  $x^1 = x$ ,  $x^2 = x \cdot x$ ,  $\dots$ ,  $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{n \text{ veces}}$  (ó, si se quiere,  $x^1 = x$  y  $x^{n+1} = x \cdot x^n$ , recursivamente). Esto define  $x^n$  para todo  $n \in \mathbf{N}$ . Además, si  $n, m \in \mathbf{N}$  se tiene

$$x^n x^m = x^{n+m}.$$

[Dem.: fíjese  $n$  y aplíquese inducción sobre  $m$ .]

Si  $x \neq 0$ , podemos definir  $x^n$  para todo  $n \in \mathbf{Z}$  imponiendo que la fórmula anterior sea válida para todo  $n, m \in \mathbf{Z}$ . En primer lugar, como  $x^{n+0} = x^n x^0 = x^n$  ( $n \in \mathbf{N}$ ), debemos definir  $x^0 = 1$ . Análogamente, al ser  $x^0 = 1 = x^{n-n} = x^n x^{-n}$ , debemos definir  $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$  para todo  $n \in \mathbf{N}$ . Definiendo de esta forma  $x^k$  para  $k \in \mathbf{Z}$ , se *demuestra* que la fórmula anterior es válida para todo par de enteros  $m$  y  $n$ :

*Demostración.* Si  $m$  ó  $n$  son cero, o si  $n, m \in \mathbf{N}$ , la afirmación es trivial. Sólo quedan por considerar los siguientes subcasos:

- $n > 0, m = -p < 0, p \leq n$ :

$$x^n x^m = x^{n-p} x^p \frac{1}{x^p} = x^{n-p} = x^{n+m}.$$

- $n > 0, m = -p < 0, p > n$ :

$$x^n x^m = x^n \frac{1}{x^{p-n} x^n} = \frac{1}{x^{p-n}} = x^{n-p} = x^{n+m}.$$

- $n < 0, m > 0$ : se reduce a los casos anteriores intercambiando  $n$  y  $m$ .
- $n = -q < 0, m = -p < 0$ :

$$x^n x^m = \frac{1}{x^q} \frac{1}{x^p} = \frac{1}{x^q x^p} = \frac{1}{x^{p+q}} = x^{-(p+q)} = x^{n+m}.$$

*Q.E.D.*

Nótese que la definición  $x^{-1} = \frac{1}{x}$  concuerda con el resultado que acabamos de probar. Del mismo modo se demuestra que

$$x \neq 0 \implies (x^n)^m = x^{nm}, \quad \forall n, m \in \mathbf{Z}.$$

Obsérvese, sin embargo, que hemos evitado definir  $0^{-n}$  para todo  $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$  (ya que  $\frac{1}{0}$  no está definido en un cuerpo). Por último, mencionaremos las dos propiedades elementales pero útiles siguientes:

- Si  $u \neq 0$  y  $v \neq 0$ ,  $\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = \frac{xv + yu}{uv}$ .
- $\forall x \in \mathbf{F}, -x = (-1)x$  ( $\implies (-1)^2 = 1$ ).

### 1.3. Cuerpos ordenados

Recuérdese que una **relación** en un conjunto  $A$  es un subconjunto de  $A \times A$ . En  $\mathbf{Q}$ , además de las operaciones de cuerpo hay una relación  $\leq$  que ordena los números racionales, y tiene propiedades bien conocidas. Estas propiedades motivan la siguiente definición general:

**Definición 1.8.** Un cuerpo  $(\mathbf{F}, +, \cdot)$  es un **cuerpo ordenado** si hay una relación  $\leq$  definida en  $\mathbf{F}$  que cumple las propiedades siguientes:

- I)  $\forall x \in \mathbf{F}, x \leq x$  (*propiedad reflexiva*)
- II) Si  $x, y \in \mathbf{F}$ , ó bien  $x \leq y$  ó bien  $y \leq x$  (ó ambas). Además, si  $x \leq y$  e  $y \leq x$  entonces  $x = y$ .
- III) Si  $x, y, z \in \mathbf{F}, x \leq y$  e  $y \leq z \implies x \leq z$  (*propiedad transitiva*)

iv) Si  $x, y \in \mathbf{F}$  y  $x \leq y$ , entonces  $x + z \leq y + z$ ,  $\forall z \in \mathbf{F}$

v) Si  $x, y \in \mathbf{F}$ ,  $0 \leq x$  y  $0 \leq y \implies 0 \leq xy$

A la relación  $\leq$  se la denomina **relación de orden**.

A partir de ahora, la notación  $x \geq y$  será equivalente a  $y \leq x$ . Por definición,  $x < y$  si y sólo si  $x \leq y$  y  $x \neq y$ . También utilizaremos la notación  $y > x$  para indicar que  $x < y$ . Una consecuencia de estas definiciones y de los axiomas de  $\leq$  es la *propiedad de tricotomía*: si  $x$  e  $y$  son elementos cualesquiera de un cuerpo ordenado, se cumple exactamente una de las tres relaciones  $x < y$ ,  $x = y$  ó  $x > y$ .

**Ejemplo 1.9.** Evidentemente,  $\mathbf{Q}$  es un cuerpo ordenado. No lo es sin embargo  $\{0, 1\}$ . En efecto, si definimos  $0 < 1$  entonces el axioma iv) implica  $1 \leq 0$ , y como  $1 \neq 0$  obtendríamos la contradicción  $1 < 0$ . Del mismo modo, si definiéramos  $1 < 0$  obtendríamos  $0 < 1$ . De forma análoga se prueba que un cuerpo de característica no nula no puede ordenarse: basta sumar repetidamente 1 a ambos miembros de la desigualdad  $0 < 1$  ó  $1 < 0$ . Esto prueba la siguiente

**Proposición 1.10.** *Todo cuerpo ordenado tiene característica cero.*

Es interesante observar que no hay forma de introducir una relación  $\leq$  en  $\mathbf{C}$  de forma que  $(\mathbf{C}, \leq)$  sea un cuerpo ordenado (más adelante veremos la razón). En particular, no todo cuerpo de característica cero es un cuerpo ordenado.

## 1.4. Consecuencias de los axiomas de orden

**Proposición 1.11.** *Si  $(\mathbf{F}, +, \cdot, \leq)$  es un cuerpo ordenado, y  $x, y, z, \dots$  denotan elementos de  $\mathbf{F}$ , entonces se verifica:*

$$I) (x < y, y \leq z) \implies x < z$$

En efecto,  $x \leq z$  por la propiedad transitiva. Si fuera  $x = z$  entonces  $x \leq y \leq x \implies x = y$  por el axioma II).

$$II) x \leq y \iff 0 \leq y - x \iff -y \leq -x \iff x - y \leq 0$$

Sumar sucesivamente  $-x$ ,  $-y$  y  $x$  a la primera desigualdad.

$$III) x < y \implies x + z < y + z, \forall z \in \mathbf{F}$$

$$IV) x_i \leq y_i \forall i = 1, \dots, n \implies \sum_{i=1}^n x_i \leq \sum_{i=1}^n y_i; \text{ si además } x_j < y_j \text{ para algún } j \in \{1, \dots, n\} \text{ entonces } \sum_{i=1}^n x_i < \sum_{i=1}^n y_i$$

La primera es consecuencia de aplicar repetidamente el axioma IV), mientras que la segunda es consecuencia de la propiedad I).

$$v) x < y \iff 0 < y - x \iff -y < -x \iff x - y < 0$$

Se demuestra como II) utilizando III).

**Definición 1.12.** Sea  $(\mathbf{F}, +, \cdot, \leq)$  un cuerpo ordenado. Diremos que  $x \in \mathbf{F}$  es **positivo** si  $x > 0$ , **no negativo** si  $x \geq 0$ , **negativo** si  $x < 0$ , **no positivo** si  $x \leq 0$ .

Por tanto, 0 es el único número no positivo y no negativo a la vez.

#### 1.4.1. Relaciones entre $\leq$ y $\cdot$

**Proposición 1.13.** Si  $(\mathbf{F}, +, \cdot, \leq)$  es un cuerpo ordenado, y  $x, y, z$  son elementos de  $\mathbf{F}$ , entonces se cumple:

$$I) x > 0, y > 0 \implies xy > 0$$

Como  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$ , por el axioma v)  $xy \geq 0$ . Si fuera  $xy = 0$ , entonces  $x = 0$  ó  $y = 0$ , contradiciendo la hipótesis.

$$II) x \leq y, z \geq 0 \implies xz \leq yz$$

(“Se pueden multiplicar las desigualdades por números positivos”). En efecto,  $y - x \geq 0$  y  $z \geq 0$  implica por el axioma v) que  $z(y - x) \geq 0 \implies xz \leq yz$ .

• Nótese que  $x < y, z > 0 \implies xz < yz$  (ya que  $xz = yz \implies x = y$  al ser  $z \neq 0$ .)

$$III) x \leq 0, y \geq 0 \implies xy \leq 0; x \leq 0, y \leq 0 \implies xy \geq 0$$

Para demostrar la primera, obsérvese que  $-x \geq 0, y \geq 0 \implies (-x)y \geq 0$ .

Como  $(-x)y = -xy$  se obtiene  $-xy \geq 0$ , que es equivalente a  $xy \leq 0$ .

La segunda se demuestra a partir de la primera aplicada a  $x$  y a  $-y$ .

**Corolario 1.14.** Si  $\mathbf{F}$  es un cuerpo ordenado y  $x \neq 0$  es un elemento de  $\mathbf{F}$ , entonces  $x^2 > 0$ .

En otras palabras,  $\forall x \in \mathbf{F}$  se tiene  $x^2 \geq 0$ , y  $x^2 = 0 \iff x = 0$ .

**Corolario 1.15.**  $1 > 0$ .

En efecto,  $1 = 1^2$  y  $1 \neq 0$ .

Ahora es fácil probar que no se puede introducir una relación de orden en el cuerpo de los números complejos. En efecto,  $i^2 = -1 > 0 \implies 1 < 0$ .

Si  $\mathbf{F}$  es un cuerpo ordenado, hemos visto que la característica de  $\mathbf{F}$  es cero, y por tanto  $\mathbf{F}$  contiene subconjuntos equivalentes a  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{Z}$  y  $\mathbf{Q}$ . Además, a partir de los corolarios anteriores se prueba por inducción que el orden inducido por  $\mathbf{F}$  en  $\mathbf{N}$  (y por tanto en  $\mathbf{Z}$  y en  $\mathbf{Q}$ ) coincide con el usual:

**Proposición 1.16.** Si  $\mathbf{F}$  es un cuerpo ordenado,  $\forall k \in \mathbf{N} \subset \mathbf{F}$  se tiene  $k + 1 > k > 0$ .

## 1.4.2. Otras consecuencias de los axiomas de orden

- $x > 1 \Rightarrow x^2 > x$ ;  $0 < x < 1 \Rightarrow x^2 < x$
- $0 \leq x \leq y, 0 \leq z \leq u \implies xz \leq yu$   
En efecto  $x \leq y, 0 \leq z \Rightarrow xz \leq yz, yz \leq u, y \geq 0 \Rightarrow yz \leq uy$ .  
Análogamente se demuestra que
- $0 \leq x < y, 0 < z \leq u \implies xz < yu; 0 \leq x < y, 0 \leq z < u \implies xz < yu$
- $0 \leq x < y \implies x^n < y^n, \forall n \in \mathbf{N}$   
Basta aplicar repetidamente la segunda de las propiedades anteriores con  $z = x, u = y$ .
- Si  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$  entonces  $x = y \iff x^n = y^n (n \in \mathbf{N})$ . Análogamente, si  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$  entonces  $x < y \iff x^n < y^n (n \in \mathbf{N})$ .
- $x > 0 \Rightarrow 1/x > 0$  (pues  $x \cdot 1/x = 1 > 0$ ); además

$$0 < x < y \implies 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x} \implies 0 < y^{-n} < x^{-n}, \forall n \in \mathbf{N}.$$

En efecto, para probar la primera implicación basta observar que  $\frac{1}{x} > 0, \frac{1}{y} > 0 \Rightarrow \frac{1}{xy} > 0$  y multiplicar la desigualdad  $x < y$  por  $\frac{1}{xy}$ . La segunda es consecuencia de aplicar repetidamente la primera.

- Si  $z \geq 0$  y  $z < x$  para todo  $x > 0$ , entonces  $z = 0$ .

En efecto, si  $z > 0$  entonces haciendo  $x = z$  obtendríamos  $z < z$ .

## 1.5. Valor absoluto

Sea, como siempre,  $\mathbf{F}$  un cuerpo ordenado. Si  $x \in \mathbf{F}$ , ó bien  $x \geq 0$  ó bien  $x < 0 \iff -x > 0$ . Por tanto, si definimos el **valor absoluto** de  $x$  (denotado por  $|x|$ ) mediante

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

entonces  $|x| \geq 0$  para todo  $x \in \mathbf{F}$ , y  $|x| = 0 \iff x = 0$ . Claramente  $|x| \geq x$  y  $|x| \geq -x$ . De la definición de  $|x|$  se sigue inmediatamente que  $|-x| = |x|$ . Además, de  $(-x)^2 = x^2$  se obtiene fácilmente que  $|x|^2 = x^2$ . Más generalmente, veamos que

$$|xy| = |x| |y|, \quad \forall x, y \in \mathbf{F}.$$

En efecto, como ambos miembros son no negativos basta probar el cuadrado de esta igualdad. Pero

$$|xy|^2 = (xy)^2 = x^2 y^2 = |x|^2 |y|^2 = (|x| |y|)^2.$$

Otra propiedad interesante del valor absoluto es que

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a.$$

En efecto, si  $x \geq 0$  ambas desigualdades se reducen a  $x \leq a$ , ya que  $a \geq |x| \geq 0 \Rightarrow a \geq 0 \Rightarrow -a \leq 0 \leq x$  trivialmente. Y si  $x < 0$  entonces lo anterior implica que

$$|x| \leq a \Leftrightarrow |-x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq -x \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a.$$

Una desigualdad muy importante satisfecha por el valor absoluto es la llamada **desigualdad triangular**:

$$|x + y| \leq |x| + |y|, \quad \forall x, y \in \mathbf{F}.$$

Como ambos miembros de esta desigualdad son no negativos, basta probar su cuadrado. Y, en efecto, se tiene

$$\begin{aligned} |x + y|^2 &= (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leq x^2 + 2|x y| + y^2 \\ &= |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2. \end{aligned}$$

Aplicando repetidamente la desigualdad triangular se demuestra la siguiente generalización de dicha desigualdad:

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbf{F}.$$

### 1.5.1. Máximo y mínimo

Si  $x, y \in \mathbf{F}$ , se define

$$\text{mín}(x, y) = \begin{cases} x, & x \leq y \\ y, & x > y. \end{cases}$$

De la definición se sigue que  $\text{mín}(x, y) = \text{mín}(y, x)$ , y  $\text{mín}(x, y) \leq x$ ,  $\text{mín}(x, y) \leq y$ , para todo  $x, y \in \mathbf{F}$ . Análogamente, definimos

$$\text{máx}(x, y) = \begin{cases} y, & x \leq y \\ x, & x > y. \end{cases}$$

Evidentemente,  $\text{máx}(x, y) = \text{máx}(y, x)$ , y  $\text{máx}(x, y) \geq x$ ,  $\text{máx}(x, y) \geq y$ , para todo  $x, y \in \mathbf{F}$ . De hecho, las propiedades de máx se pueden deducir de las de mín observando que

$$\text{máx}(x, y) = -\text{mín}(-x, -y).$$

El valor absoluto de  $x \in \mathbf{F}$  se expresa mediante el máximo por la fórmula

$$|x| = \text{máx}(x, -x).$$

Recíprocamente, mín y máx se expresan en términos de  $|\cdot|$  por las fórmulas

$$\text{mín}(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|), \quad \text{máx}(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|).$$

En general, si  $\{x_1, \dots, x_n\}$  es un subconjunto *finito* de  $\mathbf{F}$  podemos definir  $\text{mín}(x_1, \dots, x_n)$  y  $\text{máx}(x_1, \dots, x_n)$  por inducción. Al igual que antes, tanto mín como máx no dependen de como ordenemos sus argumentos,

$$\text{mín}(x_1, \dots, x_n) \leq x_i \leq \text{máx}(x_1, \dots, x_n), \quad \forall i = 1, 2, \dots, n,$$

y

$$\text{máx}(x_1, \dots, x_n) = -\text{mín}(-x_1, \dots, -x_n).$$

## 1.6. Axioma del supremo

Un subconjunto  $A$  de un cuerpo ordenado  $\mathbf{F}$  está **acotado superiormente** (resp. **inferiormente**) si  $\exists x \in \mathbf{F}$  tal que

$$a \leq x, \quad \forall a \in A$$

$$(\text{resp. } x \leq a, \quad \forall a \in A).$$

A cualquier número  $x$  con la propiedad anterior le llamaremos una **cota superior** (resp. **cota inferior**) de  $A$ . Diremos que  $A$  es un conjunto **acotado** si  $A$  es acotado a la vez superior e inferiormente. Escribiremos  $A \leq x$  si  $x$  es una cota superior de  $A$ , y  $x \leq A$  si  $x$  es una cota inferior de  $A$ . Es importante observar que una cota inferior (o superior) de  $A$  no tiene por qué existir, ni ser única, ni pertenecer a  $A$ .

### Ejemplo 1.17.

- El conjunto vacío es acotado, ya que cualquiera que sea  $x \in \mathbf{F}$  se cumplen trivialmente las dos afirmaciones “ $\forall a \in \emptyset, a \leq x$ ” y “ $\forall a \in \emptyset, x \leq a$ ” al no haber ningún  $a \in \emptyset$ . En particular, todo elemento de  $\mathbf{F}$  es a la vez una cota superior e inferior de  $\emptyset$ .
- Si  $\mathbf{F}$  es un cuerpo ordenado, entonces el conjunto  $\mathbf{F}$  no está acotado ni superior ni inferiormente. En efecto, si por ejemplo  $\mathbf{F}$  estuviera acotado superiormente entonces existiría  $x \in \mathbf{F}$  tal que  $a \leq x, \forall a \in \mathbf{F}$ . Esto es claramente contradictorio si tomamos  $a = x + 1$ .



- En el cuerpo  $\mathbf{Q}$ , el conjunto  $A = \{a \in \mathbf{Q} : a < 1\}$  está acotado superiormente, siendo las cotas superiores de  $A$  los racionales  $x \geq 1$ . En particular, en este caso ninguna cota superior de  $A$  pertenece a  $A$ . Además, es claro que  $A$  no está acotado inferiormente.

**Definición 1.18.** Si  $A \subset \mathbf{F}$  es un conjunto acotado superiormente, una cota superior mínima de  $A$  es un número  $x \in \mathbf{F}$  tal que

- I)  $x$  es una cota superior de  $A$ :  $a \leq x, \forall a \in A$
- II) Si  $y$  es cualquier cota superior de  $A$ , entonces  $x \leq y$

De la definición se deduce que si  $x$  e  $y$  son dos cotas superiores mínimas de  $A$  entonces  $x = y$ . Por tanto, un conjunto acotado superiormente sólo puede tener *a lo sumo* una cota superior mínima. Si tal cota superior mínima existe, la denotaremos simplemente por  $\sup A$  (**supremo** de  $A$ ). Análogamente, si  $A \subset \mathbf{F}$  está acotado inferiormente una cota inferior máxima de  $A$  es un número  $x \in \mathbf{F}$  tal que

- I)  $x$  es una cota inferior de  $A$ :  $x \leq a, \forall a \in A$
- II) Si  $y$  es cualquier cota inferior de  $A$ , entonces  $y \leq x$

Al igual que antes, un conjunto acotado inferiormente sólo puede tener a lo sumo una cota superior mínima, a la que denotaremos por  $\inf A$  (**ínfimo** de  $A$ ). Se demuestra fácilmente que

$$\inf A = -\sup(-A),$$

si denotamos por  $-A$  el conjunto

$$-A = \{-x : x \in A\} = \{x : -x \in A\}.$$

**Ejemplo 1.19.** El conjunto vacío (que está acotado superior e inferiormente) no tiene ínfimo ni supremo. En efecto, si por ejemplo existiera  $x = \sup \emptyset$  entonces para todo  $a \in \mathbf{F}$  se cumpliría  $x \leq a$  (ya que todo elemento de  $\mathbf{F}$  es una cota superior de  $\emptyset$ ), y por tanto  $x$  sería una cota inferior de  $\mathbf{F}$ .

**Ejemplo 1.20.** En el cuerpo  $\mathbf{Q}$  hay subconjuntos no vacíos acotados superiormente pero sin supremo. Por ejemplo, considérese el conjunto

$$A = \{a \in \mathbf{Q} : a \leq 0\} \cup \{a \in \mathbf{Q} : a^2 \leq 2\}.$$

Vamos a ver que este conjunto, que obviamente no es vacío, *está acotado superiormente pero no posee supremo*. En primer lugar, es claro que  $A$  está acotado superiormente; por ejemplo,  $A \leq 2$  (ya que  $2 \geq 0$ , y  $a > 2 \Rightarrow a^2 > 4$ ). Intuitivamente, el hecho de que  $A$  no tiene supremo se debe a que el supremo “natural” de  $A$ , que sería  $\sqrt{2}$ , no es un elemento del cuerpo (no hay

ningún racional cuyo cuadrado sea 2). Veamos la demostración rigurosa de este hecho.

Para ello utilizamos las siguientes identidades:

$$x \in \mathbf{Q}, y = \frac{x(x^2 + 6)}{3x^2 + 2} \implies y - x = \frac{2x(2 - x^2)}{3x^2 + 2}, y^2 - 2 = \frac{(x^2 - 2)^3}{(3x^2 + 2)^2}.$$

Nótese que  $x \in \mathbf{Q} \implies y \in \mathbf{Q}$ , ya que  $3x^2 + 2 \geq 2 > 0$ . Supongamos que existiera  $x = \sup A$ . Si  $x \in A$ , entonces  $x \geq 1 > 0$  (ya que  $1 \in A$ ), de donde se sigue que  $x^2 \leq 2$ , lo cual a su vez es equivalente a  $x^2 < 2$ . Si tomamos  $y$  como en la fórmula anterior, entonces  $y - x > 0$ ,  $y^2 - 2 < 0$  implica que  $y \in A$  e  $y > x = \sup A$ , lo que es contradictorio. Supongamos ahora que  $x \notin A$ . Entonces  $x^2 > 2$  y  $x > 0$ , y definiendo otra vez  $y$  como antes se tendrá  $y > 0$ ,  $y - x < 0$ ,  $y^2 - 2 > 0$ . De la primera y la tercera de estas desigualdades se sigue que  $y$  es una cota superior de  $A$ , que es estrictamente menor que  $\sup A$  por la segunda desigualdad. De nuevo llegamos a una contradicción.

Es precisamente el hecho de que cualquier conjunto no vacío acotado superiormente posee supremo la propiedad esencial de la que carece el conjunto de los números racionales, y que sirve para definir y caracterizar al conjunto de los números reales:

**Definición 1.21.** El conjunto  $\mathbf{R}$  de los números reales es un cuerpo ordenado que goza de la siguiente propiedad (**axioma del supremo**):

*Si  $A \subset \mathbf{R}$  está acotado superiormente y  $A \neq \emptyset$ , entonces existe el supremo de  $A$ .*

En otras palabras,  $\mathbf{R}$  es un cuerpo ordenado en el que cualquier subconjunto no vacío y acotado superiormente posee supremo. Naturalmente, para que esta definición tenga sentido hacen falta dos cosas:

- I) Que haya *algún* cuerpo ordenado en el que se cumpla el axioma del supremo.

Esto se puede demostrar de varias formas, lo que equivale a otras tantas construcciones explícitas de los números reales (sucesiones de Cauchy, cortaduras de Dedekind, etc.)

- II) Que esencialmente haya *un sólo* cuerpo ordenado en el que se verifique el axioma del supremo. En efecto, se demuestra que si  $\mathbf{R}_1$  y  $\mathbf{R}_2$  son dos cuerpos ordenados en los que se verifica el axioma del supremo entonces  $\mathbf{R}_1$  y  $\mathbf{R}_2$  son equivalentes (*isomorfos*, en el lenguaje matemático), en el sentido de que existe una biyección entre  $\mathbf{R}_1$  y  $\mathbf{R}_2$  que respeta las operaciones de cuerpo y la relación de orden (y, por tanto, la acotación de los conjuntos y los supremos).

En otras palabras, lo esencial del cuerpo  $\mathbf{R}$  de los números reales es que  $\mathbf{R}$  es un conjunto con dos operaciones  $+$  :  $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $\cdot$  :  $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

y una relación  $\leq$ , que verifican los axiomas i)–ix) de la Definición 1.1 junto con los axiomas del orden, y donde se cumple además el axioma del supremo. A partir de ahora, llamaremos simplemente **números** (ó **puntos**) a los elementos de  $\mathbf{R}$  (números reales).

## 1.7. Consecuencias del axioma del supremo

En primer lugar, del axioma del supremo se sigue la siguiente propiedad equivalente de los números reales (axioma o principio del ínfimo):

**Proposición 1.22.** *Si  $A \subset \mathbf{R}$  es un conjunto no vacío acotado inferiormente, entonces  $A$  posee un ínfimo.*

*Demostración.* Basta aplicar el axioma del supremo al conjunto  $-A$ , que está acotado superiormente, y tener en cuenta que  $\inf A = -\sup(-A)$ . *Q.E.D.*

También es inmediato probar que si  $\emptyset \neq A \subset B$  y  $B$  está acotado superiormente, entonces  $A$  está acotado superiormente y se cumple

$$\sup A \leq \sup B.$$

En efecto, es claro que cualquier cota superior de  $B$  es a la vez una cota superior de  $A$ , por lo que  $A$  está acotado superiormente. En particular,  $\sup B$  es una cota superior de  $A$ , de donde  $\sup A \leq \sup B$ . Del mismo modo se demuestra que si  $A \subset B$  y  $B$  está acotado inferiormente, entonces  $A$  está acotado inferiormente e  $\inf A \geq \inf B$ .

Si  $A \subset \mathbf{R}$  es un conjunto acotado superiormente y  $x = \sup A$  resulta pertenecer al conjunto  $A$ , diremos que  $x$  es el **máximo** de  $A$ , y escribiremos  $x = \max A$  (aunque el conjunto  $A$  sea infinito). Equivalentemente,

$$x = \max A \iff x \in A \text{ y } a \leq x \forall a \in A.$$

Es fácil comprobar que si  $A$  es un conjunto finito esta definición de máximo coincide con la vista anteriormente. Nótese, sin embargo, que aunque  $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}$  esté acotado superiormente el máximo de  $A$  no tiene por qué existir (aunque, por supuesto, la existencia de  $\sup A$  está garantizada). Del mismo modo, si  $A \subset \mathbf{R}$  está acotado inferiormente y  $x = \inf A \in A$  diremos que  $x$  es el **mínimo** de  $A$ , y escribiremos  $x = \min A$ . Equivalentemente,

$$x = \min A \iff x \in A \text{ y } x \leq a \forall a \in A.$$

Al igual que antes, un subconjunto no vacío de  $\mathbf{R}$  acotado inferiormente no tiene por qué tener un mínimo.

### 1.7.1. La propiedad arquimediana de los números reales

Es intuitivamente claro que el conjunto de los números naturales no está acotado en  $\mathbf{R}$ . La demostración rigurosa de este hecho es una consecuencia inmediata de la siguiente propiedad fundamental de los números reales, que como vamos a ver se deduce del axioma del supremo:

**Propiedad arquimediana de los números reales.** *Si  $x > 0$  ( $x \in \mathbf{R}$ ) e  $y \in \mathbf{R}$ , entonces hay un número natural  $n \in \mathbf{N}$  tal que  $nx > y$ .*

*Demostración.* Consideremos el conjunto  $A$  de los múltiplos de  $x$ , es decir

$$A = \{nx \in \mathbf{R} : n \in \mathbf{N}\},$$

que es obviamente no vacío. El enunciado que queremos probar equivale a que  $y$  no es una cota superior de  $A$  (ó, como  $y$  es arbitrario, a que  $A$  no está acotado superiormente). Pero si  $A$  estuviera acotado superiormente entonces, por el axioma del supremo, existiría  $z = \sup A$ , y se tendría

$$nx \leq z, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Como  $n + 1 \in \mathbf{N}$  para todo  $n \in \mathbf{N}$ , de esto deduciríamos que

$$(n + 1)x \leq z, \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad \iff \quad nx \leq z - x, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Esto implicaría que  $z - x < z$  sería una cota superior de  $A$  menor que  $z = \sup A$ , lo que es contradictorio. *Q.E.D.*

Tomando  $x = 1$  en la proposición anterior obtenemos que  $\mathbf{N}$  no es acotado superiormente (sí inferiormente, siendo  $\inf \mathbf{N} = \min \mathbf{N} = 1$ ), de donde se sigue fácilmente que  $\mathbf{Z}$  (y por tanto  $\mathbf{Q}$ , que contiene a  $\mathbf{Z}$ ) es no acotado, ni inferior ni superiormente. Una ligera extensión de la propiedad arquimediana permite probar que dado un número  $x \in \mathbf{R}$  existe un único entero  $n \in \mathbf{Z}$  tal que

$$n \leq x < n + 1.$$

(*Demostración:* sea  $A$  el conjunto de los enteros mayores que  $x$ .  $A$  es no vacío por la propiedad arquimediana, y está acotado inferiormente por  $x$ . Por el principio de inducción,  $A$  tiene un elemento mínimo que denotaremos por  $n + 1$ . En particular,  $x < n + 1$  por ser  $n + 1 \in A$ , y  $x \geq n$  por ser  $n + 1$  el mínimo elemento de  $A$ . Por último, si  $m \in \mathbf{Z}$  y  $m \leq x < m + 1$  entonces  $-m - 1 < -x \leq -m$ , de donde se sigue que  $n - m - 1 < 0 < n - m + 1$  ó, equivalentemente,  $n = m$ .) Al entero  $n$  lo denominaremos **parte entera** del número real  $x$ , y lo denotaremos  $[x]$  (por ejemplo,  $[3] = 3$ ,  $[\pi] = 3$ ,  $[-3] = -3$ ,  $[-\pi] = -4$ ).

Si en el enunciado de la propiedad arquimediana tomamos  $y > 0$ , entonces

$$nx > y \iff 0 < \frac{y}{n} < x,$$

lo que prueba la siguiente

**Proposición 1.23.** Si  $x > 0$  e  $y > 0$  son números reales, existe  $n \in \mathbf{N}$  tal que  $0 < \frac{y}{n} < x$ .

En particular, esto prueba que dado  $y > 0$  se tiene

$$\inf \left\{ \frac{y}{n} : n \in \mathbf{N} \right\} = 0.$$

Hay también una propiedad arquimediana en la que interviene el producto en lugar de la suma:

**Proposición 1.24.** Si  $x > 1$  e  $y$  son números reales, entonces existe  $n \in \mathbf{N}$  tal que  $x^n > y$ .

*Demostración.* Si  $y \leq 0$ , podemos tomar  $n = 1$ . Si  $y > 0$ , basta considerar el conjunto  $A = \{x^n : n \in \mathbf{N}\}$ . Q.E.D.

### 1.7.2. Intervalos

Un ejemplo muy importante de subconjuntos acotados (y, por tanto, que poseen supremo e ínfimo a la vez) es el de los intervalos. Por definición, dados dos números reales  $a < b$  definimos el **intervalo cerrado**

$$[a, b] = \{x \in \mathbf{R} : a \leq x \leq b\},$$

el **intervalo abierto**

$$(a, b) = \{x \in \mathbf{R} : a < x < b\},$$

y los dos **intervalos semiabiertos**

$$[a, b) = \{x \in \mathbf{R} : a \leq x < b\}, \quad (a, b] = \{x \in \mathbf{R} : a < x \leq b\}.$$

Los números  $a < b$  se llaman respectivamente **extremo superior** e **inferior** del intervalo. Por convenio, si  $a = b$  definimos  $[a, a] = \{a\}$ . Es inmediato ver que un intervalo  $I$  de cualquiera de los tipos anteriores está acotado, y que se tiene

$$\inf I = a, \quad \sup I = b.$$

A veces es también útil considerar intervalos no acotados, para los que utilizamos la siguiente notación:

$$\begin{aligned} (-\infty, b) &= \{x \in \mathbf{R} : x < b\}, & (-\infty, b] &= \{x \in \mathbf{R} : x \leq b\}, \\ (a, \infty) &= \{x \in \mathbf{R} : x > a\}, & [a, \infty) &= \{x \in \mathbf{R} : x \geq a\} \end{aligned}$$

y  $(-\infty, \infty) = \mathbf{R}$ . Nótese que los símbolos  $\pm\infty$  se utilizan meramente por conveniencia (*no* son números reales), de modo que las definiciones anteriores se reduzcan formalmente a las de los intervalos acotados si convenimos que  $x > -\infty$  y  $x < \infty$  se satisface para todo número real.

Una consecuencia importante de la propiedad arquimediana es la siguiente

**Proposición 1.25.** *Si  $a < b$ , todo intervalo  $(a, b)$  contiene un punto racional.*

*Demostración.* En efecto, si  $h = b - a > 0$  existe  $n \in \mathbf{N}$  tal que  $\frac{1}{n} < h$ . Si  $m = [na] \in \mathbf{Z}$  entonces

$$m \leq na < m + 1 \iff \frac{m}{n} \leq a < \frac{m+1}{n}.$$

Por otra parte

$$\frac{m+1}{n} = \frac{m}{n} + \frac{1}{n} \leq a + \frac{1}{n} < a + h = b.$$

Por tanto, hemos probado que  $a < \frac{m+1}{n} < b$ , lo que demuestra que  $\frac{m+1}{n}$  pertenece a  $\mathbf{Q} \cap (a, b)$ . *Q.E.D.*

**Corolario 1.26.** *Todo intervalo de extremos  $a < b$  (abierto, semiabierto ó cerrado) contiene infinitos puntos racionales.*

*Demostración.* El caso más desfavorable es el de un intervalo abierto  $(a, b)$ . Por la proposición anterior,  $\exists q_1 \in \mathbf{Q} \cap (a, b)$ . Aplicando ahora la proposición al intervalo abierto  $(a, q_1)$  probamos que  $\exists q_2 \in \mathbf{Q} \cap (a, q_1) \subset \mathbf{Q} \cap (a, b)$ . De esta forma (aplicando reiteradamente la proposición anterior) se construye un conjunto infinito  $\{q_1, q_2, \dots, q_n, \dots\}$  de racionales contenido en el intervalo  $(a, b)$  (y, por tanto, en cualquier intervalo de extremos  $a < b$ ). *Q.E.D.*

En términos topológicos, la proposición anterior se formula diciendo que  $\mathbf{Q}$  es **denso** en  $\mathbf{R}$ .

*Nota:* como el conjunto de los números racionales es numerable y el intervalo de extremos  $a < b$  no lo es, se sigue que todo intervalo de extremos  $a < b$  contiene también infinitos puntos irracionales. Por lo tanto, el conjunto de los números irracionales  $\mathbf{R} - \mathbf{Q}$  también es denso en  $\mathbf{R}$ . Esto se puede probar fácilmente de forma directa: cf. Spivak, problema 8-6.)

### 1.7.3. Existencia de raíces $n$ -ésimas

Otra consecuencia no trivial del axioma del supremo es la existencia de una raíz  $n$ -ésima de cualquier número real positivo, para todo  $n \in \mathbf{N}$ :

**Teorema 1.27.** *Si  $x > 0$  es un elemento de  $\mathbf{R}$  y  $n \in \mathbf{N}$ , entonces hay un único número  $y > 0$  en  $\mathbf{R}$  tal que  $x = y^n$ .*

*Demostración.* Consideremos el conjunto

$$A = \{a \in \mathbf{R} : a \geq 0 \text{ y } a^n \leq x\}.$$

Está claro que este conjunto es no vacío ( $0 \in A$ ) y está acotado superiormente: en efecto, si  $0 < x \leq 1$  entonces  $A$  está acotado por 1 (ya que

$a > 1 \Rightarrow a^n > 1 \geq x$ ), mientras que si  $x > 1$  entonces  $A$  está acotado por  $x$  (ya que  $a > x > 1 \Rightarrow a^n > x^n > x$ ). Si  $y = \sup A$ , es claro que  $y > 0$ , ya que si  $x \geq 1$  entonces  $1 \in A$ , y si  $0 < x < 1$  entonces  $0 < x^n < x \Rightarrow x > 0$ ,  $x \in A$ . Veamos a continuación que efectivamente se cumple la igualdad  $y^n = x$ .

En efecto, supongamos primero que fuera  $y^n < x$ ; entonces probaremos que  $\exists a \in A$  tal que  $a > y$ , lo cual contradice el que  $y = \sup A$ . Para ver esto, sea  $\epsilon = x - y^n > 0$ , y sea  $0 < h < 1$ . Por la fórmula del binomio de Newton

$$\begin{aligned} (y+h)^n &= y^n + h \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} h^{k-1} y^{n-k} \leq y^n + h \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} y^{n-k} \\ &= y^n + h [(y+1)^n - y^n]. \end{aligned}$$

Tomando  $h = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{\epsilon}{(y+1)^n - y^n}\right)$  entonces  $0 < h < 1$ , por lo que  $a = y+h$  cumple que  $a > y = \sup A > 0$  y  $a^n = (y+h)^n \leq y^n + \epsilon = x$ , lo cual implica que  $a \in A$  y contradice la igualdad  $y = \sup A$ .

Supongamos ahora que fuera  $y^n > x$ ; demostraremos a continuación que hay una cota superior de  $A$  estrictamente menor que  $y$ , lo que de nuevo contradice la definición  $y = \sup A$ . En efecto, si  $\epsilon = y^n - x > 0$  y  $0 < h < 1$  obtenemos como antes

$$\begin{aligned} (y-h)^n &= y^n - h \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{k-1} h^{k-1} y^{n-k} \geq y^n - h \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} h^{k-1} y^{n-k} \\ &\geq y^n - h \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} y^{n-k} = y^n - h [(y+1)^n - y^n]. \end{aligned}$$

Tomando  $h = \min\left(y, \frac{1}{2}, \frac{\epsilon}{(y+1)^n - y^n}\right)$  entonces  $0 < h < 1$ , por lo que  $z = y-h$  cumple que  $0 \leq z < y = \sup A$  y  $z^n = (y-h)^n \geq y^n - \epsilon = x$ , lo cual implica que  $z$  es una cota superior de  $A$  y contradice la igualdad  $y = \sup A$ .

Por último, para probar la unicidad basta notar que si  $0 < y_1 < y_2$  entonces  $y_1^n < y_2^n$ . *Q.E.D.*

Llamaremos al único número  $y > 0$  tal que  $y^n = x$  la **raíz  $n$ -ésima** de  $x$ , y lo denotaremos por  $\sqrt[n]{x}$  ó  $x^{1/n}$ . De la unicidad de la raíz  $n$ -ésima se siguen todas las propiedades elementales del cálculo con raíces. Por ejemplo

$$x > 0, y > 0 \implies (xy)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}};$$

en efecto,

$$\left(x^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}}\right)^n = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n \left(y^{\frac{1}{n}}\right)^n = xy.$$

Otra propiedad elemental es que

$$\left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{mn}},$$

ya que

$$\left[ \left( x^{\frac{1}{m}} \right)^{\frac{1}{n}} \right]^{mn} = \left\{ \left[ \left( x^{\frac{1}{m}} \right)^{\frac{1}{n}} \right]^n \right\}^m = \left( x^{\frac{1}{m}} \right)^m = x.$$

También es fácil comprobar la identidad

$$\left( x^m \right)^{\frac{1}{n}} = \left( x^{\frac{1}{n}} \right)^m, \quad \forall x > 0, \forall m, n \in \mathbf{N}.$$

Sea, de nuevo,  $x > 0$ . Si  $n \in \mathbf{N}$  es **par** (es decir, si  $n = 2m$  para algún  $m \in \mathbf{N}$ ), la ecuación  $y^n = x$  tiene exactamente dos soluciones:

$$y_1 = x^{\frac{1}{n}} > 0, \quad y_2 = -x^{\frac{1}{n}} < 0.$$

En efecto, hemos visto que si  $y > 0$  la ecuación anterior tiene una solución única que es por definición  $x^{1/n}$ , mientras que si  $y < 0$  entonces poniendo  $y = -z$  con  $z > 0$  la ecuación se convierte en

$$(-1)^n z^n = (-1)^{2m} z^n = ((-1)^2)^m z^n = z^n = x,$$

que de nuevo tiene la solución única  $z = x^{\frac{1}{n}}$ , lo cual implica que  $y = -z = -x^{\frac{1}{n}}$ . Por tanto

$$y^n = x \iff y = \pm x^{\frac{1}{n}} \quad (x > 0, n \text{ par}).$$

Si  $n$  es **impar** (es decir,  $n = 2m - 1$  para algún  $m \in \mathbf{N}$ ) y  $x > 0$ , entonces la ecuación  $y^n = x$  tiene la solución única  $y = x^{\frac{1}{n}}$ . En efecto, basta tener en cuenta que si  $y < 0$  y  $n = 2m - 1$  es impar entonces

$$y^n = y^{2m-1} = y^{2(m-1)}y = (y^{m-1})^2 y < 0.$$

Por tanto se cumple

$$y^n = x \iff y = x^{\frac{1}{n}} \quad (x > 0, n \text{ impar}).$$

Sea ahora  $x < 0$ . Si  $n$  es par, la ecuación  $y^n = x$  no tiene ninguna solución, ya que  $n$  par implica  $y^n \geq 0$ . Por tanto, en este caso el número  $x$  no tiene ninguna raíz  $n$ -ésima:

$$x < 0, n \text{ par} \implies \nexists y \in \mathbf{R} \text{ tal que } y^n = x.$$

Por el contrario, si  $n$  es impar entonces la ecuación  $y^n = x$  tiene exactamente una solución

$$y = -(-x)^{\frac{1}{n}} = -|x|^{\frac{1}{n}} < 0.$$

En efecto, al ser  $x < 0$  ha de ser  $y = -z < 0$ . Sustituyendo en la ecuación  $y^n = x$  y teniendo en cuenta que  $n$  es impar obtenemos la ecuación  $z^n = -x > 0$ , lo que prueba nuestra afirmación. Definiremos en este caso  $\sqrt[n]{x} = x^{1/n} = y$ , es decir

$$y^n = x \iff y = \sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{|x|} \quad (x < 0, n \text{ impar}).$$

En particular, si  $x > 0$  entonces  $x^{1/n} \equiv \sqrt[n]{x} > 0$ , mientras que si  $x < 0$  y  $n$  es impar entonces  $x^{1/n} \equiv \sqrt[n]{x} < 0$ .



## 1.8. Potencias

Si  $r \in \mathbf{Q}$ , podemos escribir  $r = \frac{p}{q}$  con  $p \in \mathbf{Z}$ ,  $q \in \mathbf{N}$ . Si  $x > 0$ , definimos entonces

$$x^r = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(x^p\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Nótese que esta definición tiene sentido, ya que si  $m \in \mathbf{N}$

$$x^{\frac{mp}{mq}} = \left(x^{\frac{1}{mq}}\right)^{mp} = \left[\left(\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1}{m}}\right)^m\right]^p = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p.$$

Se demuestra fácilmente que con esta definición se cumplen las reglas usuales de las potencias, es decir

$$\begin{aligned} x^{r+s} &= x^r x^s \implies \frac{1}{x^r} = x^{-r} \\ x^{rs} &= \left(x^r\right)^s & \forall r, s \in \mathbf{Q}, \forall x > 0, \forall y > 0 \ (x, y \in \mathbf{R}). \\ (xy)^r &= x^r y^r \end{aligned}$$

Si  $x < 0$ , la definición anterior en general no funciona, ya que en este caso  $\sqrt[n]{x}$  no existe si  $n \in \mathbf{N}$  es par. En este caso sólo podemos definir  $x^r$  con  $r \in \mathbf{Q}$  si al poner  $r$  en la forma  $\frac{p}{q}$  con  $p \in \mathbf{Z}$ ,  $q \in \mathbf{N}$  y  $(|p|, q)$  primos entre sí el número natural  $q$  es impar. Si  $r$  es de esta forma, definimos de nuevo  $x^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$ . Puede verse entonces que las reglas anteriores siguen siendo válidas también en este caso si tanto  $r$  como  $s$  satisfacen la condición anterior.

Utilizando lo anterior, se puede definir  $a^x$  para todo  $a > 0$  ( $a \in \mathbf{R}$ ) y para todo  $x \in \mathbf{R}$ . En efecto, empezamos por suponer que  $a > 1$ .

**Lema 1.28.** *Si  $a \in \mathbf{R}$ ,  $a > 1$ ,  $r, s \in \mathbf{Q}$  y  $r < s$ , entonces  $a^r < a^s$ .*

*Demostración.* El número  $s - r > 0$  es racional, por lo que existirán  $p, q \in \mathbf{N}$  tales que  $s - r = p/q$ . Si  $z = a^{s-r} = (a^p)^{1/q}$ , entonces  $z > 1$ , ya que si fuera  $z < 1$  llegaríamos a la contradicción  $z^q = a^p < 1$ . Multiplicando la desigualdad  $a^{s-r} > 1$  por  $a^r > 0$  llegamos a la desigualdad deseada. *Q.E.D.*

Definamos a continuación los conjuntos

$$A_- = \{a^r : r < x, r \in \mathbf{Q}\}, \quad A_+ = \{a^r : r > x, r \in \mathbf{Q}\}.$$

Entonces  $A_- < A_+$  (y tanto  $A_-$  como  $A_+$  obviamente no vacíos) implica (ejercicio) que  $A_-$  está acotado superiormente,  $A_+$  está acotado inferiormente y  $\sup A_- \leq \inf A_+$ . De hecho, puede probarse la siguiente

**Proposición 1.29.**

$$\sup A_- = \inf A_+.$$

*Demostración.* Basta probar que dado cualquier  $\epsilon > 0$  existen  $r, s \in \mathbf{Q}$  tales que  $r < x < s$  y  $a^s - a^r < \epsilon$  (dado que  $a^r < \sup A_- \leq \inf A_+ < a^s$ ; véase la última propiedad 1.4.2). Empecemos probando que para todo  $\epsilon > 0$  existe  $q \in \mathbf{N}$  tal que  $a^{1/q} - 1 < \epsilon$ . Como ambos miembros de la desigualdad  $a^{1/q} < 1 + \epsilon$  son positivos (mayores que 1), basta ver que existe  $q \in \mathbf{N}$  tal que  $a < (1 + \epsilon)^q$ . Pero esto último es consecuencia de la propiedad arquimediana multiplicativa.

Dado  $\epsilon > 0$ , sea  $t \in \mathbf{Q}$  tal que  $t > x$ , sea  $q \in \mathbf{N}$  tal que  $a^{1/q} < 1 + a^{-t}\epsilon$ , y sea  $r \in \mathbf{Q} \cap (x - \frac{1}{q}, x)$ . Si  $s = r + \frac{1}{q}$  entonces  $r < x < s$  y  $a^s - a^r = a^r(a^{1/q} - 1) < a^r a^{-t}\epsilon < \epsilon$ . *Q.E.D.*

Por definición,

$$a^x = \sup A_- = \inf A_+.$$

Con esto hemos definido  $a^x$  para  $a > 1$ . Si  $0 < a < 1$ , guiados por las propiedades básicas de las potencias de exponente racional definimos

$$a^x = \frac{1}{(a^{-1})^x},$$

ya que  $1/a > 1$  si  $a < 1$ . De esta forma tenemos definido  $a^x$  para  $0 < a \neq 1$ . Finalmente, definimos

$$\begin{aligned} 1^x &= 1, & \forall x \in \mathbf{R} \\ 0^x &= 0, & \forall x \in \mathbf{R}, x > 0. \end{aligned}$$

Nótese, en particular, que  $0^x$  no está definido si  $x \leq 0$ , y que tampoco se ha definido  $a^x$  cuando  $a < 0$  y  $x$  es un real arbitrario (a menos que  $x$  sea un número racional cuya expresión en forma de fracción irreducible tenga denominador impar). Con estas definiciones, las propiedades de las potencias son las mismas que ya vimos para potencias con exponente racional.

*Nota.* Es inmediato que si  $a > 0$  y  $x \in \mathbf{Q}$  la definición de  $a^x$  que acabamos de ver coincide con la definición de potencia de exponente racional dada anteriormente.

*Ejercicio.* Sean  $a$  y  $x$  números reales. Probar que

$$\begin{aligned} a > 1, x > 0 &\implies a^x > 1; & 0 < a < 1, x > 0 &\implies 0 < a^x < 1 \\ a > 1, x < 0 &\implies 0 < a^x < 1; & 0 < a < 1, x < 0 &\implies a^x > 1. \end{aligned}$$

*Solución.* Si  $a > 1$  y  $x > 0$ , tomando  $r \in \mathbf{Q} \cap (0, x)$  y aplicando el Lema 1.28 obtenemos

$$1 = a^0 < a^r \leq \sup A_- = a^x.$$

Esto prueba la desigualdad pedida para  $a > 1$  y  $x > 0$ . Las demás desigualdades son consecuencias inmediatas de ésta. Por ejemplo, si  $0 < a < 1$  y  $x < 0$  entonces

$$\frac{1}{a} > 1, -x > 0 \implies \left(\frac{1}{a}\right)^{-x} = \frac{1}{a^{-x}} = a^x > 1.$$

□

*Ejercicio.* Probar que si  $a, x, y \in \mathbf{R}$  se cumple

$$a > 1, x < y \implies a^x < a^y; \quad 0 < a < 1, x < y \implies a^x > a^y. \quad (1.1)$$

*Solución.* Supongamos primero que  $a > 1$ . Al ser  $y - x > 0$ , por el ejercicio anterior se verifica  $a^{y-x} > 1$ . Multiplicando por  $a^x > 0$  se obtiene la primera desigualdad. La segunda desigualdad es consecuencia inmediata de la primera. □

*Ejercicio.* Probar que si  $a, b, x \in \mathbf{R}$  se cumple

$$0 < a < b, x > 0 \implies a^x < b^x; \quad 0 < a < b, x < 0 \implies a^x > b^x. \quad (1.2)$$

*Solución.* Si  $0 < a < b$  entonces  $b/a > 1$  implica, por el primer ejercicio, que  $(b/a)^x = b^x/a^x > 1$  si  $x > 0$  y  $(b/a)^x = b^x/a^x < 1$  si  $x < 0$ . Multiplicando ambos miembros de estas desigualdades por  $a^x > 0$  se obtienen las desigualdades propuestas. □

## Capítulo 2

# Funciones reales de variable real

### 2.1. Definición. Dominio, imagen y gráfica.

Informalmente, una **función** entre dos conjuntos  $A$  y  $B$  es una regla que a ciertos elementos del conjunto  $A$  les asigna un elemento bien definido del conjunto  $B$ . Por ejemplo, la regla que a cada ciudadano español le asigna su estatura expresada en centímetros es una función del conjunto  $A$  de todos los ciudadanos españoles al conjunto  $\mathbf{R}$  de los números reales. A nosotros nos interesarán casi exclusivamente las funciones reales de variable real, para las cuales  $A$  y  $B$  son subconjuntos de  $\mathbf{R}$ . Por ejemplo, una tal función es la función  $f$  que a cada número real  $x$  le asocia su cuadrado  $x^2$  (*función cuadrado*), ó la función  $g$  que a cada número real  $x \geq 0$  le asocia su raíz cuadrada  $\sqrt{x}$  (*función raíz cuadrada*).

Si  $f$  es una función entre  $A$  y  $B$ , escribiremos  $f : A \rightarrow B$ ; nótese que esta notación *no* significa que  $f$  esté definida para todo elemento de  $A$ . Dado un  $a \in A$  para el que  $f$  esté definida, denotaremos por  $f(a)$  (**imagen** de  $a$  bajo  $f$ , ó **valor** de  $f$  en  $a$ ) al elemento de  $B$  asignado por  $f$  al elemento  $a \in A$ . Al subconjunto de  $A$  formado por todos los elementos  $a \in A$  para los cuales  $f(a)$  está definido lo denominaremos **dominio** de la función  $f$ , y lo denotaremos por  $\text{dom } f$ . Análogamente, al conjunto de todos los elementos de  $B$  que son la imagen de algún elemento de  $A$  bajo  $f$ , es decir al conjunto

$$\{y \in B : \exists a \in A \text{ tal que } y = f(a)\} = \{f(a) : a \in \text{dom } f\}$$

lo denominaremos **imagen** de la función  $f$ , y lo denotaremos por  $\text{im } f$  ó  $f(A)$  indistintamente. En particular,

$$\text{dom } f \subset A, \quad \text{im } f \subset B.$$

**Ejemplo 2.1.** Sea  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  la función definida por  $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ .

Entonces  $\text{dom } f$  es el subconjunto de  $\mathbf{R}$  tal que  $x^2 - 1 \geq 0$ , es decir

$$\text{dom } f = \{x : |x| \geq 1\} = (-\infty, -1] \cup [1, \infty).$$

Como  $\sqrt{a} \geq 0$  para todo  $a \geq 0$ , la imagen de  $f$  está contenida en  $[0, \infty)$ . Para ver si la imagen de  $f$  coincide con este conjunto, hay que determinar si para todo  $y \geq 0$  existe  $x \in \text{dom } f$  tal que

$$\sqrt{x^2 - 1} = y.$$

Esto es cierto, ya que la ecuación anterior tiene obviamente las dos soluciones  $x = \pm\sqrt{1 + y^2} \in \text{dom } f$ . Luego en este caso

$$\text{im } f = [0, \infty).$$

Más formalmente (dado que el concepto de *regla* es un tanto impreciso), podemos considerar una función como determinada por su valor en todos los puntos de su dominio, es decir por todos los pares ordenados de la forma  $(a, b)$ , donde  $a$  es un elemento de  $A$  para el que  $f$  está definida y  $b = f(a)$  es la imagen de  $a \in A$  bajo  $f$ . Por ejemplo, la función raíz cuadrada está determinada por todos los pares de la forma  $(x, \sqrt{x})$ , donde  $x \in \mathbf{R}$  es un número real no negativo. Equivalentemente, la función raíz cuadrada queda perfectamente definida por el conjunto

$$\{(x, \sqrt{x}) : x \in \mathbf{R}, x \geq 0\}.$$

Evidentemente, si  $(a, b_1)$  y  $(a, b_2)$  son dos pares ordenados asociados a la misma función  $f$  entonces

$$b_1 = f(a), b_2 = f(a) \implies b_1 = b_2.$$

Estas consideraciones justifican la siguiente definición formal de función:

**Definición 2.2.** Una **función**  $f : A \rightarrow B$  es un subconjunto del producto cartesiano  $A \times B$  con la siguiente propiedad:

$$(a, b) \in f, (a, c) \in f \implies b = c.$$

Por ejemplo, el subconjunto

$$\{(x, x^2) : x \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$$

define una función  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  (la función cuadrado), mientras que

$$\{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$$

no define una función de  $\mathbf{R}$  en  $\mathbf{R}$ , dado que por ejemplo tanto  $(0, 1)$  como  $(0, -1)$  pertenecen a dicho conjunto.

Esta definición precisa de función implica que dos funciones  $f : A \rightarrow B$  y  $g : A \rightarrow B$  son **iguales** si determinan el mismo conjunto de  $A \times B$ , es decir si

$$I) \text{ dom } f = \text{ dom } g$$

$$II) f(x) = g(x), \forall x \in \text{ dom } f = \text{ dom } g$$

Por ejemplo, la función  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  definida por  $f(x) = x^2$  y la función  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  definida por  $g(x) = (x+1)^2 - 2x - 1$  son iguales.

**Ejemplo 2.3.** Sean  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  y  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  las funciones definidas respectivamente por  $f(x) = x$  y  $g(x) = \sqrt{x^2}$ . Entonces  $\text{dom } f = \text{dom } g = \mathbf{R}$ , y  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \geq 0$ . Sin embargo,  $f \neq g$ , ya que  $f(x) < 0$  si  $x < 0$  y  $g(x) \geq 0$  para todo  $x \in \mathbf{R}$ . De hecho, se tiene

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{|x|^2} = |x|, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Si  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  es una función, su **gráfica** es el subconjunto del plano  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$  determinado por  $f$ , es decir el conjunto

$$\{(x, f(x)) : x \in \text{dom } f\}.$$

Por definición de función, este conjunto tiene la propiedad de que una recta vertical  $x = a$  ó bien no lo corta (si  $a \notin \text{dom } f$ ) o bien lo corta en un sólo punto (si  $a \in \text{dom } f$ ).

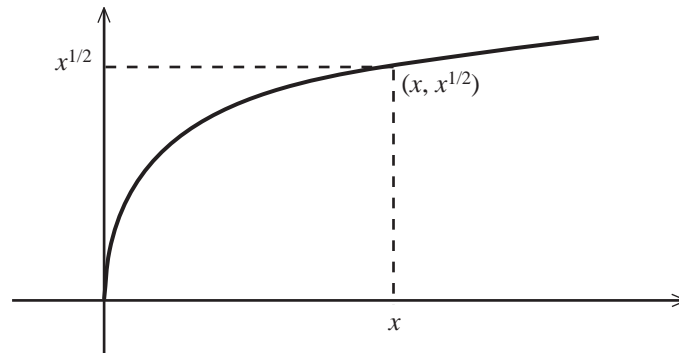


Figura 2.1: gráfica de la función raíz cuadrada

## 2.2. Funciones inyectivas, suprayectivas y biyectivas

Una función  $f : A \rightarrow B$  se dice **inyectiva** (ó **uno-uno**) si puntos distintos de  $\text{dom } f$  tienen imágenes distintas:

$$x, y \in \text{dom } f, x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$$

Equivalentemente,  $f$  es inyectiva si

$$\forall x, y \in \text{dom } f, f(x) = f(y) \implies x = y.$$

La función  $f : A \rightarrow B$  se dice **suprayectiva** (ó **sobreyectiva**) si todo punto de  $B$  es la imagen bajo  $f$  de un punto de  $\text{dom } f$ :

$$\forall y \in B, \exists x \in \text{dom } f \text{ tal que } y = f(x).$$

En otras palabras,

$$f \text{ es suprayectiva} \iff \text{im } f = B.$$

Nótese que el ser  $f$  inyectiva ó suprayectiva depende de la elección de los conjuntos  $A$  y  $B$ . Por ejemplo, si tomamos  $B = \text{im } f$  entonces  $f$  es automáticamente suprayectiva.

*Nota.* En términos de la gráfica,  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  es inyectiva si toda recta horizontal corta a su gráfica *a lo sumo* en un punto, y es suprayectiva si toda recta horizontal corta a la gráfica *por lo menos* en un punto.

**Ejemplo 2.4.** La función  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  definida por  $f(x) = x^2$  no es inyectiva, ya que  $f(-x) = f(x)$ , para todo  $x \in \mathbf{R}$ . Tampoco es suprayectiva, ya que  $\text{im } f = [0, \infty)$ . Sin embargo, la función  $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$  definida por  $g(x) = x^2$  sí es inyectiva, ya que

$$x \geq 0, y \geq 0, x^2 = y^2 \implies x = y.$$

Nótese que  $f$  y  $g$  *no* son iguales, ya que  $\text{dom } f \neq \text{dom } g$ . De hecho, al ser  $\text{dom } g \subset \text{dom } f$  y  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in \text{dom } g$  se suele decir que  $g$  es la **restricción** de  $f$  al conjunto  $[0, \infty)$ . Por último, la función  $h : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  definida de nuevo por  $h(x) = x^2$  es a la vez inyectiva y suprayectiva.

**Definición 2.5.** Una función  $f : A \rightarrow B$  es **biyectiva** si  $\text{dom } f = A$ , y  $f$  es a la vez inyectiva y suprayectiva.

Por ejemplo, la función  $h$  del ejemplo anterior es biyectiva. En términos de la gráfica,  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  es biyectiva si toda recta horizontal corta a su gráfica *exactamente* en un punto. El ejemplo más obvio de función biyectiva es la **función identidad**  $I_A : A \rightarrow A$ , definida por

$$I_A(x) = x, \quad \forall x \in A.$$

Cuando sea claro por el contexto (ó irrelevante) cuál es el conjunto  $A$  escribiremos simplemente  $I$  en lugar de  $I_A$ . Es inmediato probar el siguiente resultado:

**Proposición 2.6.** Una función  $f : A \rightarrow B$  es biyectiva si y sólo si  $f$  es **invertible**, es decir si y sólo si existe  $g : B \rightarrow A$  tal que

$$g(f(x)) = x, \quad \forall x \in A \quad y \quad f(g(y)) = y, \quad \forall y \in B. \quad (2.1)$$

Diremos que la función  $g : B \rightarrow A$  que cumple (2.1) es la **inversa** de la función invertible  $f$ , y escribiremos

$$g = f^{-1}.$$

Nótese que según esta definición la función  $g$  también es invertible (y por tanto biyectiva), siendo

$$g^{-1} = f.$$

En otras palabras, se cumple

$$(f^{-1})^{-1} = f,$$

y análogamente para  $g$ . La relación entre  $f$  y  $f^{-1}$  se puede expresar concisamente en la forma siguiente:

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y), \quad (x \in A, y \in B).$$

**Ejemplo 2.7.** Sea  $h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  la función definida para todo  $x \in \mathbf{R}$  por  $h(x) = x^2 - x$ . Para ver si esta función es biyectiva, basta comprobar que la ecuación en  $x$

$$x^2 - x = y$$

tiene una solución única para todo  $y \in \mathbf{R}$ . (Si ésto es así, para cada  $y$  la solución de esta ecuación es precisamente  $h^{-1}(y)$ ). Completando el cuadrado obtenemos la ecuación equivalente

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = y + \frac{1}{4}.$$

Esta ecuación tiene solución si y sólo si  $y \geq -1/4$ ; por tanto,  $\text{im } h = [-1/4, \infty)$ . Sin embargo, para  $y > -1/4$  la ecuación anterior tiene dos soluciones distintas

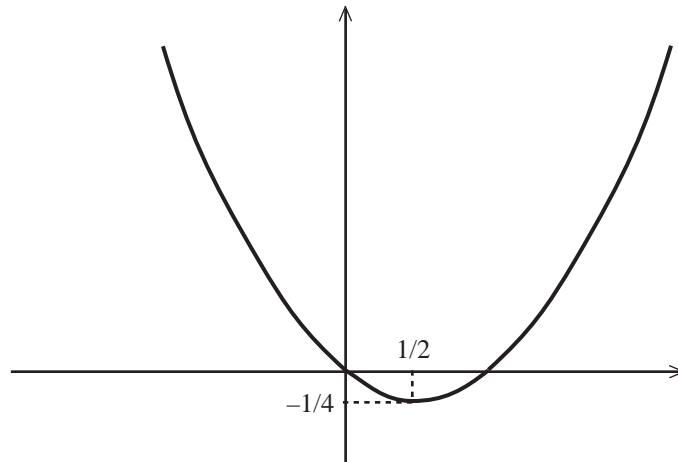
$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{y + \frac{1}{4}},$$

una de las cuales es mayor que  $1/2$  y la otra menor que  $1/2$ . Por tanto, la función  $h$  no es ni inyectiva ni biyectiva. Sin embargo la función  $f : [1/2, \infty) \rightarrow [-1/4, \infty)$  definida de nuevo por  $f(x) = x^2 - x$  es invertible, siendo su inversa la función  $f^{-1} : [-1/4, \infty) \rightarrow [1/2, \infty)$  definida por

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{2} + \sqrt{y + \frac{1}{4}}, \quad \forall y \geq -\frac{1}{4}$$

(y análogamente para la restricción de  $h$  al intervalo infinito  $(-\infty, -1/2]$  considerada como función  $(-\infty, -1/2] \rightarrow [-1/4, \infty)$ .) Todo esto es muy fácil de comprender intuitivamente dibujando la gráfica de  $h$  (fig. 2.2).



Figura 2.2: gráfica de la función  $h(x) = x^2 - x$ 

### 2.3. Composición de funciones

Lo anterior se puede formular de manera más concisa utilizando el concepto de composición de funciones. Por definición, si  $f : A \rightarrow B$  y  $g : B \rightarrow C$  la **composición** de  $g$  con  $f$  es la función  $g \circ f : A \rightarrow C$  definida por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

El dominio de  $g \circ f$  es el conjunto

$$\text{dom}(g \circ f) = \{x \in \text{dom } f : f(x) \in \text{dom } g\} \subset \text{dom } f;$$

en particular,  $g \circ f$  estará definida sólo si dicho conjunto es no vacío. Por ejemplo, si  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  y  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  están definidas respectivamente por  $f(x) = -1 - x^2$  y  $g(x) = \sqrt[4]{x}$  entonces  $g \circ f$  no está definida. Nótese también que el orden es importante en la notación  $g \circ f$ , ya que en general  $g \circ f \neq f \circ g$ . Por ejemplo, en este caso

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^{1/4}) = -1 - (x^{1/4})^2 = -1 - \sqrt{x}, \quad \forall x \geq 0.$$

Utilizando el concepto de composición, podemos formular la Proposición 2.6 como sigue:  $f : A \rightarrow B$  es invertible si y sólo si existe  $g : B \rightarrow A$  tal que

$$f \circ g = I_B, \quad g \circ f = I_A.$$

### 2.4. Funciones monótonas

Una función  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  es **monótona creciente** si

$$x, y \in \text{dom } f, \quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y),$$

y **monótona no decreciente** si

$$x, y \in \text{dom } f, x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y),$$

La función  $f$  es **monótona decreciente** ó **monótona no creciente** si  $-f$  es monótona creciente o monótona no decreciente, siendo

$$(-f)(x) = -f(x), \quad \forall x \in \text{dom } f.$$

En otras palabras,  $f$  es monótona decreciente ó monótona no creciente si

$$x, y \in \text{dom } f, x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

ó

$$x, y \in \text{dom } f, x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y),$$

respectivamente. Finalmente, diremos que  $f$  es **estrictamente monótona** si es monótona creciente ó decreciente. Es claro que una función estrictamente monótona es inyectiva, y por tanto será biyectiva si y sólo si es suprayectiva.

*Ejercicio.* Probar que si  $f$  es estrictamente monótona e invertible entonces  $f^{-1}$  es monótona del mismo tipo que  $f$ .

## 2.5. Logaritmos

Dado  $a > 0$ , consideremos la función  $f_a : \mathbf{R} \rightarrow (0, \infty)$  definida por  $f_a(x) = a^x$  para todo  $x \in \mathbf{R}$  (obsérvese que  $a^x > 0$  para todo  $x \in \mathbf{R}$ ). Por las propiedades de las potencias vistas en el capítulo anterior (ec. (1.1)), si  $0 < a < 1$   $f_a$  es monótona decreciente, mientras que para  $a > 1$   $f_a$  es monótona creciente ( $f_1$  es la función constante 1). Por tanto, si  $1 \neq a > 0$  la función  $f_a$  es inyectiva. Se puede ver (cf. la gráfica de estas funciones) que para estos valores de  $a$  la función  $f_a$  es también suprayectiva, y por tanto biyectiva:

*Demostración.* Supongamos, en primer lugar, que  $a > 1$ ; hay que probar que para todo  $y > 0$  existe  $x \in \mathbf{R}$  tal que  $a^x = y$ . Para ello consideramos el conjunto

$$A = \{t \in \mathbf{R} : a^t < y\}.$$

$A$  es no vacío por la propiedad arquimediana multiplicativa de  $\mathbf{R}$  (al ser  $a > 1$ , existe  $p \in \mathbf{N}$  tal que  $a^p > 1/y$ , y por tanto  $-p \in A$ ). Además,  $A$  está acotado superiormente, ya que (de nuevo por la propiedad arquimediana multiplicativa) existe  $q \in \mathbf{N}$  tal que  $a^q > y$ , y al ser  $a > 1$  de esto se sigue que  $A < q$ . Por tanto, existe  $x = \sup A$ ; probaremos a continuación que  $a^x = y$ . En efecto, si fuera  $a^x < y$  entonces podríamos escoger (una vez más por la propiedad arquimediana multiplicativa)  $n \in \mathbf{N}$  tal que  $(y a^{-x})^n > a$ . Pero entonces se tendría  $a^{x+\frac{1}{n}} < y$ , y por tanto  $x + \frac{1}{n} > x \equiv \sup A$  pertenecería

a  $A$ . Análogamente, si  $a^x > y$  entonces la propiedad arquimediana multiplicativa implicaría la existencia de  $m \in \mathbf{N}$  tal que  $(y^{-1}a^x)^m > a$ , lo cual es equivalente a la desigualdad  $a^{x-\frac{1}{m}} > y$ . Esto implica (al ser  $a > 1$ ) que  $A < x - \frac{1}{m} < x \equiv \sup A$ , lo que de nuevo contradice la definición de  $\sup A$ . Luego ha de ser  $a^x = y$ . Esto prueba la suprayectividad de  $f_a$  para  $a > 1$ . Si  $0 < a < 1$ , la suprayectividad de  $f_a$  se deduce de lo anterior utilizando la igualdad  $f_a(x) = f_{1/a}(-x)$ . Q.E.D.

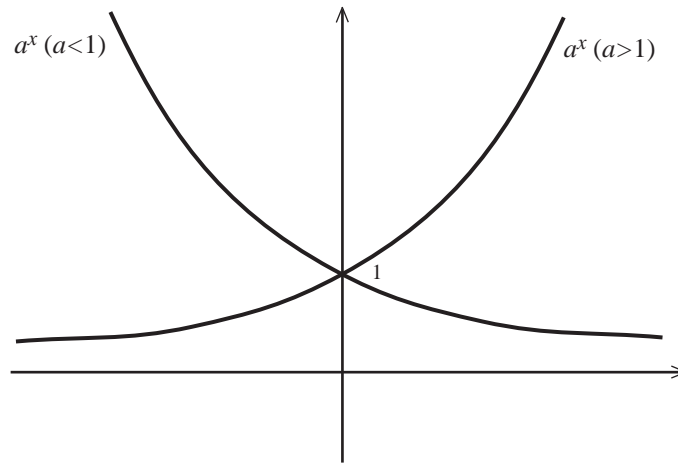


Figura 2.3: gráfica de la función  $a^x$

Si  $0 < a \neq 1$ , a la función inversa de  $f_a$  le llamaremos **logaritmo en base  $a$** , y la denotaremos por  $\log_a$ . En particular, nótese que  $\log_a : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ . Por definición,

$$\text{Si } y > 0, \quad x = \log_a y \iff y = a^x$$

ó también

$$a^{\log_a x} = x, \quad \forall x > 0; \quad \log_a(a^x) = x, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

En particular,

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1; \quad \forall a > 0.$$

La gráfica de la función  $\log_a$  se puede obtener fácilmente de la de la función  $f_a$ :

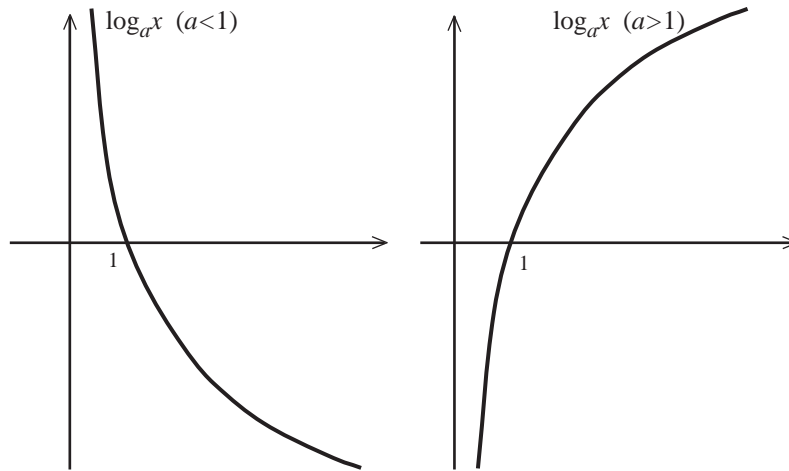


Figura 2.4: gráfica de la función  $\log_a$

Por el ejercicio 2.4,  $\log_a$  es monótona creciente (decreciente) si  $a > 1$  ( $a < 1$ ). Nótese también que

$$\log_{1/a} x = -\log_a x, \quad \forall a > 0, \forall x > 0.$$

En efecto,

$$\log_{1/a} x = y \iff (1/a)^y = x \iff a^{-y} = x \iff -y = \log_a x$$

Las propiedades de la función  $\log_a$  se deducen de propiedades análogas de  $f_a$ . Por ejemplo, de

$$a^{x+y} = a^x a^y, \quad \forall a > 0, \forall x, y \in \mathbf{R}$$

se deduce que

$$x + y = \log_a(a^x a^y).$$

Si llamamos  $u = a^x > 0$ ,  $v = a^y > 0$  entonces  $x = \log_a u$ ,  $y = \log_a v$  y obtenemos una de las propiedades fundamentales de la función logaritmo:

$$\log_a(uv) = \log_a u + \log_a v, \quad \forall u > 0, v > 0.$$

Análogamente, de

$$(a^y)^x = a^{xy}$$

obtenemos

$$\log_a(v^x) = x \log_a v, \quad \forall v > 0, \forall x \in \mathbf{R}.$$

*Ejercicio.* Utilizar las propiedades anteriores para probar que si  $a$ ,  $b$  y  $x$  son números reales positivos entonces se tiene:

$$\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x.$$

Deducir de esto que

$$\log_a b = (\log_b a)^{-1}.$$

*Solución.* Si  $y = \log_a x$  entonces

$$a^y = x, \quad a = b^{\log_b a} \implies x = b^{y \log_b a} \implies \log_b x = y \log_b a = \log_b a \cdot \log_a x.$$

Haciendo  $x = b$  obtenemos la segunda igualdad.  $\square$

## 2.6. Funciones periódicas

Una función  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  es **periódica** si existe algún número  $a > 0$  tal que

$$f(x + a) = f(x), \quad \forall x \in \text{dom } f.$$

A cualquier número  $a > 0$  que cumpla la condición anterior se le denomina un **período** de  $f$ . Es obvio que si  $a > 0$  es un período de  $f$  también lo es  $na$ , para todo  $n \in \mathbf{N}$  (de hecho, la igualdad anterior se verifica para todo  $n \in \mathbf{Z}$  si suponemos que  $\text{dom } f$  es invariante bajo la translación  $x \mapsto x - a$ ). El **mínimo período** de  $f$  es el mínimo del conjunto de períodos de  $f$ , si es que dicho conjunto (que está acotado inferiormente por cero) posee un mínimo. Cuando  $f$  posee un período mínimo  $T$ , normalmente se dice que  $f$  es una función de período  $T$ , ó que *el* período de  $f$  es  $T$ , aún cuando, estrictamente hablando, cualquier número de la forma  $nT$  con  $n \in \mathbf{N}$  también es un período de  $f$ .

**Ejemplo 2.8.** La función  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

es periódica. En efecto, es fácil ver que cualquier racional positivo es un período de  $f$ . Esta función no tiene un período mínimo, ya que el conjunto de períodos de  $f$  no tiene mínimo (su ínfimo es cero).

**Ejemplo 2.9.** La función  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  definida por  $f(x) = (-1)^{[x]}$  es una función periódica de período 2 (cf. su gráfica).

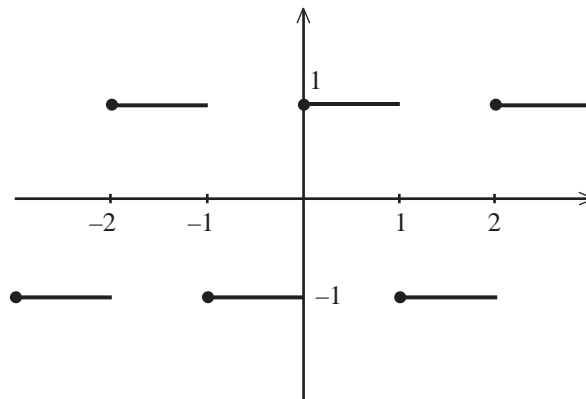


Figura 2.5: gráfica de la función  $f(x) = (-1)^{[x]}$

### 2.6.1. Funciones trigonométricas

Las funciones periódicas por antonomasia son las funciones trigonométricas  $\text{sen } x$ ,  $\text{cos } x$ ,  $\text{tan } x = \text{sen } x / \text{cos } x$ ,  $\text{sec } x = 1 / \text{cos } x$ ,  $\text{cosec } x = 1 / \text{sen } x$  y  $\text{cot } x = \text{cos } x / \text{sen } x$ . La “definición” geométrica de las funciones  $\text{sen}$  y  $\text{cos}$  está resumida en la figura 2.6.

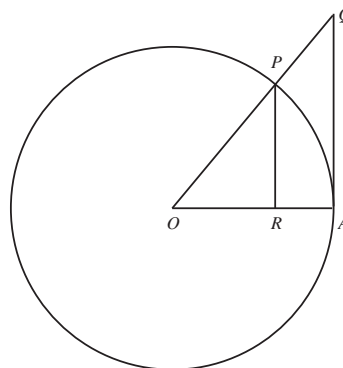


Figura 2.6: Funciones  $\text{sen}$ ,  $\text{cos}$  y  $\text{tan}$ . Si  $OA = 1$  y el arco  $AP$  tiene longitud  $x$ , entonces el **ángulo**  $OAP$  mide  $x$  radianes<sup>1</sup>,  $OR = \text{cos } x$ ,  $RP = \text{sen } x$  y  $AQ = \text{tan } x$ .

Las funciones  $\text{sen}$ ,  $\text{cos}$ ,  $\text{sec}$  y  $\text{cosec}$  tienen período mínimo  $2\pi$ , mientras que  $\text{tan}$  y  $\text{cot}$  tienen período mínimo  $\pi$ , donde  $\pi = 3,141592653\dots$  es la mitad de la circunferencia de radio unidad. Las funciones  $\text{sen}$  y  $\text{cos}$  tienen por dominio todo  $\mathbf{R}$ , y están relacionadas por la identidad

$$\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

<sup>1</sup>Si el ángulo se mide en **grados**,  $1^\circ = \frac{\pi}{180}$  rad. Por ejemplo,  $\text{sen } d^\circ = \text{sen} \left( \frac{\pi d}{180} \right)$ .

Nótese que  $(\cos x, \sin x)$  es siempre un punto de la circunferencia de centro  $(0, 0)$  y radio unidad. En particular, se tienen las acotaciones

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \quad -1 \leq \cos x \leq 1, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Los dominios de las demás funciones trigonométricas son los siguientes:

$$\begin{aligned} \text{dom sec} &= \text{dom tan} = \mathbf{R} - \{(2k + 1)\pi/2 : k \in \mathbf{Z}\}, \\ \text{dom cosec} &= \text{dom cot} = \mathbf{R} - \{k\pi : k \in \mathbf{Z}\}, \end{aligned}$$

Las gráficas de las funciones trigonométricas son como sigue:

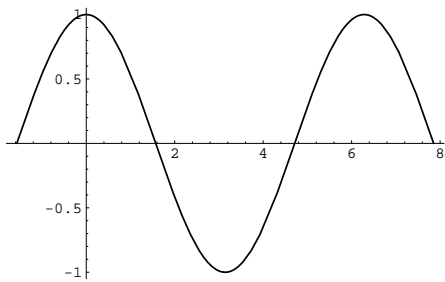


Figura 2.7: gráfica de cos

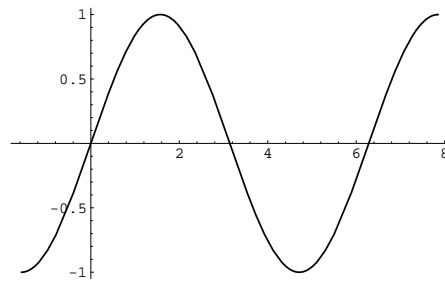


Figura 2.8: gráfica de sen

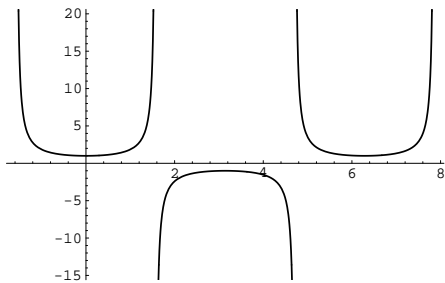


Figura 2.9: gráfica de sec

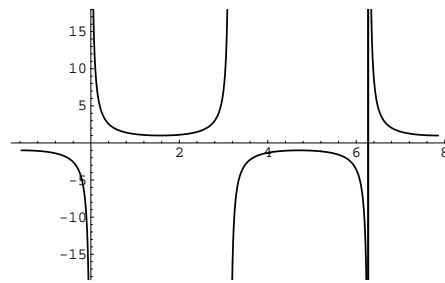


Figura 2.10: gráfica de cosec

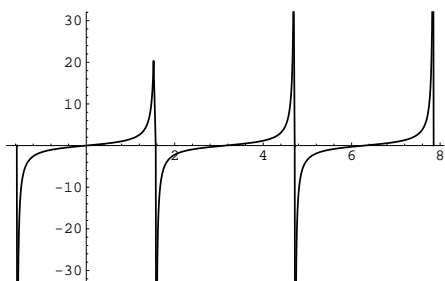


Figura 2.11: gráfica de tan

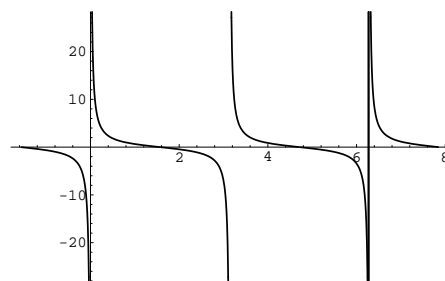


Figura 2.12: gráfica de cot

Se observa a simple vista que las gráficas de sen y cos están relacionadas por una traslación. En efecto, se cumple la relación

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} x \left( = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right), \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Al ser periódicas, las funciones trigonométricas no pueden ser invertibles en sus dominios “naturales” vistos anteriormente. Para poder invertir las, debemos restringirlas (al menos) a un intervalo de longitud menor que un período. Observando las gráficas anteriores, salta a la vista que todas las funciones trigonométricas son inyectivas en un intervalo de longitud  $\pi$  adecuado. Qué intervalo concreto se toma es algo convencional, aunque por supuesto la función inversa obtenida depende de la elección del intervalo. Además, para definir las funciones trigonométricas inversas hay que restringir las funciones trigonométricas a funciones de los intervalos anteriores a sus imágenes. Por ejemplo, para definir la función  $\operatorname{arc} \operatorname{sen} \equiv \operatorname{sen}^{-1}$  consideramos a sen como una función  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ , lo que convierte a sen en una función invertible. Se obtienen así las siguientes funciones trigonométricas inversas:

$$\operatorname{arc} \operatorname{cos} = \cos^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{sen} = \operatorname{sen}^{-1} : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\operatorname{arctan} = \tan^{-1} : \mathbf{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{sec} = \operatorname{sec}^{-1} : \mathbf{R} - (-1, 1) \rightarrow [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{csc} = \operatorname{cosec}^{-1} : \mathbf{R} - (-1, 1) \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{cot} = \cot^{-1} : \mathbf{R} \rightarrow (0, \pi)$$

Las gráficas de estas funciones son:

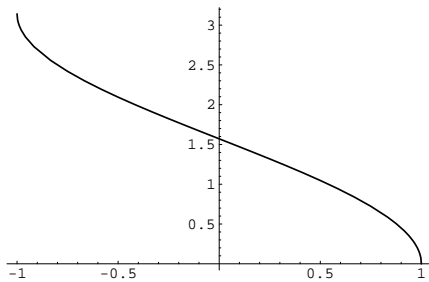


Figura 2.13: gráfica de arc cos

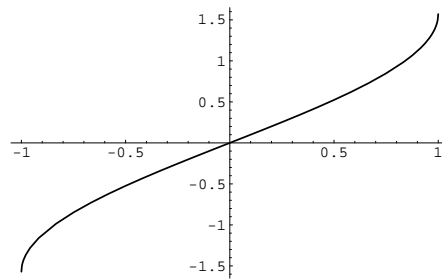


Figura 2.14: gráfica de arc sen



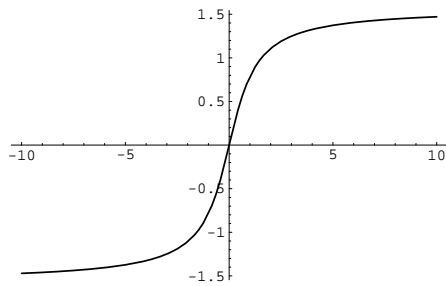


Figura 2.15: gráfica de arctan

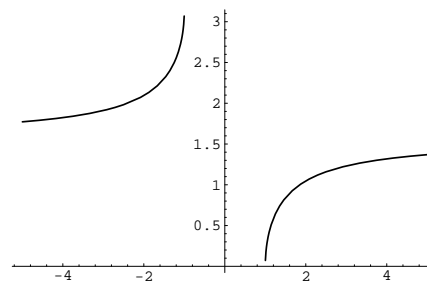


Figura 2.16: gráfica de arcsec

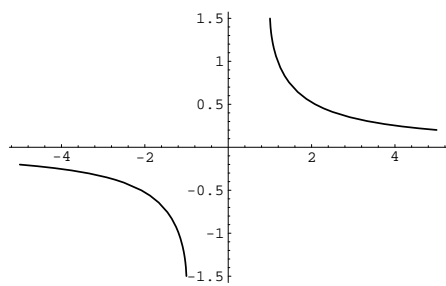


Figura 2.17: gráfica de arccsc

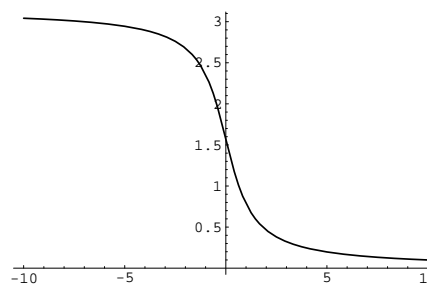


Figura 2.18: gráfica de arccot

Es evidente a partir de estas gráficas que las funciones trigonométricas inversas están relacionadas por identidades sencillas. En efecto, es fácil probar que se cumplen las identidades siguientes:

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsen x,$$

$$\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x,$$

$$\operatorname{arccsc} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsec} x,$$

$$\operatorname{arcsec} x = \arccos \frac{1}{x},$$

$$\operatorname{arccsc} x = \arcsen \frac{1}{x}.$$

Debido a estas identidades, normalmente las funciones arcsec, arccsc y arccot son poco utilizadas.

*Ejercicio.* Probar que para todo  $x \neq 0$  se cumple

$$\arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sig} x - \arctan x,$$

siendo sig la **función signo**, definida por  $\operatorname{sig} x = 1$  si  $x > 0$ ,  $\operatorname{sig} x = -1$  si  $x < 0$ , y  $\operatorname{sig} x = 0$  si  $x = 0$ .

## 2.7. Operaciones algebraicas con funciones

Las operaciones algebraicas con números reales se pueden extender a las funciones entre subconjuntos de  $\mathbf{R}$  de forma natural. En efecto, si  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  y  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  son funciones, definimos las funciones  $f + g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $fg : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  y  $\frac{f}{g} \equiv f/g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  como sigue:

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (fg)(x) &= f(x) \cdot g(x) \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)}.\end{aligned}$$

Los dominios de estas funciones son:

$$\begin{aligned}\text{dom}(f + g) &= \text{dom}(fg) = \text{dom } f \cap \text{dom } g, \\ \text{dom } \frac{f}{g} &= (\text{dom } f \cap \text{dom } g) - \{x \in \text{dom } g : g(x) = 0\}.\end{aligned}$$

Así, por ejemplo,  $\tan = \text{sen} / \text{cos}$ ,  $\cot = \text{cos} / \text{sen}$ ,  $\sec = 1 / \text{cos}$ ,  $\text{cosec} = 1 / \text{sen}$ . Es evidente que las propiedades de la suma y el producto de funciones son las mismas que las de la suma y el producto de números reales:

$$f + g = g + f, \quad (f + g) + h = f + (g + h), \quad f(g + h) = fg + fh,$$

etc. Una función es **constante** si su imagen consta sólo de un punto. En otras palabras,  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  es constante si existe  $c \in \mathbf{R}$  tal que  $f(x) = c$  para todo  $x \in \mathbf{R}$ . El producto  $cf$  del número real  $c$  por la función  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  se define como el producto  $fg$  de  $f$  con la función constante  $g = c$ , es decir

$$(cf)(x) = c \cdot f(x), \quad \forall x \in \text{dom } f.$$

El conjunto de las funciones de  $\mathbf{R}$  en  $\mathbf{R}$  con dominio un subconjunto  $A \subset \mathbf{R}$  es un *espacio vectorial* sobre el cuerpo  $\mathbf{R}$ , con la suma de funciones y el producto de funciones por números reales definidos anteriormente. El elemento 0 de este espacio vectorial es la función constante 0, y la función  $-f$  es la definida por

$$(-f)(x) = -f(x), \quad \forall x \in \text{dom } f.$$

Las operaciones algebraicas con funciones, junto con la operación de composición vista anteriormente, permiten construir funciones relativamente complicadas a partir de funciones más sencillas. Así, por ejemplo, a partir de la multiplicación de funciones podemos definir las potencias de una función  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  mediante

$$(f^n)(x) = (f(x))^n, \quad \forall x \in \text{dom } f, \forall n \in \mathbf{N}.$$

Podemos extender esta definición a potencias enteras no positivas si excluimos del dominio de la función los puntos  $x \in \mathbf{R}$  en que  $f(x) = 0$  (en particular,  $f^0 = 1$ ), y a potencias reales arbitrarias si excluimos los puntos  $x \in \mathbf{R}$  tal que  $f(x) \leq 0$ . Tomando las potencias enteras no negativas de la función identidad  $I$  ( $I(x) = x$  para todo  $x \in \mathbf{R}$ ), multiplicándolas por constantes y sumando obtenemos las **funciones polinómicas**:

$$p = \sum_{i=0}^n a_i I^i.$$

En otras palabras,

$$p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Si  $a_n \neq 0$ , al número  $n$  se le denomina el **grado** del polinomio  $p$ . (Por convenio, el grado del polinomio 0 no está definido.) Se puede demostrar que dos funciones polinómicas son iguales si y sólo si tienen el mismo grado e iguales coeficientes:

$$a_n \neq 0, b_m \neq 0, \sum_{i=0}^n a_i x^i = \sum_{i=0}^m b_i x^i, \quad \forall x \in \mathbf{R};$$

$$\iff b_i = a_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n = m.$$

Definimos las **funciones racionales** como cocientes  $R = p/q$  de dos funciones polinómicas, siendo el polinomio  $q$  distinto del polinomio 0. El dominio de la función  $R$  es el conjunto

$$\text{dom } R = \{x \in \mathbf{R} : q(x) \neq 0\}.$$

Nótese que un polinomio es un caso particular de función racional (con denominador igual al polinomio constante 1). Con las funciones racionales, las funciones potenciales ( $f(x) = x^a$  para todo  $x > 0$ , siendo  $a \in \mathbf{R}$  arbitrario), las exponenciales ( $f(x) = a^x$  para todo  $x \in \mathbf{R}$ , con  $a > 0$ ), las logarítmicas ( $\log_a$ ,  $a > 0$ ) y las trigonométricas podemos construir multitud de funciones aplicando las operaciones algebraicas, la composición y la operación de tomar la función inversa (cuando esta operación sea aplicable) un número *finito* de veces. A las funciones obtenidas de esta forma les llamaremos **funciones elementales**.

**Ejemplo 2.10.** La función  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  definida por

$$f(x) = \log_3 \left( 1 + \arctan^4(2^{x-x^3}) \right) - x^{5 \cot x^2}$$

es una función elemental. Su dominio es el conjunto

$$\{x \in \mathbf{R} : x > 0, x^2 \neq k\pi \text{ con } k \in \mathbf{N}\} = (0, \infty) - \left\{ \sqrt{k\pi} : k \in \mathbf{N} \right\}.$$

Su imagen, sin embargo, no es fácil de calcular.

## Capítulo 3

# Límites y continuidad

### 3.1. Límites

Un número real  $x$  es un **punto de acumulación** de un conjunto  $A \subset \mathbf{R}$  si cualquier intervalo abierto que contenga a  $x$  contiene algún punto de  $A$  distinto de  $x$ . En otras palabras, si  $J$  es un intervalo abierto y  $x \in J$  entonces  $(J - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ . Nótese que para esto *no* hace falta que  $x$  pertenezca a  $A$ . Es inmediato probar a partir de la definición que si  $x$  es un punto de acumulación de  $A$  entonces cualquier intervalo abierto que contenga a  $x$  contiene *infinitos* puntos de  $A$  (distintos de  $x$ ).

#### Ejemplo 3.1.

- $a$  es punto de acumulación de cualquier intervalo con extremos  $a < b$
- Todo punto de un intervalo de cualquier tipo (excepto de la forma  $[a, a]$ ) es punto de acumulación de dicho intervalo
- 0 es un punto de acumulación del conjunto  $\{1/n : n \in \mathbf{N}\}$
- Si  $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}$  está acotado superiormente (resp. inferiormente) y  $\sup A \notin A$  (resp.  $\inf A \notin A$ ), entonces  $\sup A$  (resp.  $\inf A$ ) es punto de acumulación de  $A$
- Ningún número real es punto de acumulación del conjunto  $\mathbf{Z}$  de los números enteros
- Todo número real es un punto de acumulación del conjunto  $\mathbf{Q}$  de los números racionales

Sea  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  una función, y sea  $a \in \mathbf{R}$  un punto de acumulación de  $\text{dom } f$ ; para esto *no* es necesario que  $a$  pertenezca a  $\text{dom } f$ , es decir que  $f(a)$  tenga sentido, pero sí tiene que haber puntos distintos de  $a$  en los que  $f$  esté definida arbitrariamente próximos a  $a$ . Intuitivamente, *el límite de  $f$*

en  $a$  es  $l$  si  $f(x)$  está tan próximo como se quiera a  $l$  siempre que  $x \neq a$  esté suficientemente próximo a  $a$ . La definición rigurosa de límite no hace más que formalizar ó expresar en términos matemáticamente precisos esta definición intuitiva.

**Definición 3.2.** Sea  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  una función, y sea  $a \in \mathbf{R}$  un punto de acumulación de  $\text{dom } f$ . Diremos que el **límite** de  $f$  en  $a$  es  $l$ , y escribiremos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l,$$

si para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$x \in \text{dom } f \text{ y } 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - l| < \epsilon.$$

En otras palabras, dado cualquier  $\epsilon > 0$  podemos conseguir que

$$l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon$$

sin más que tomar

$$x \in \text{dom } f, \quad a - \delta < x < a + \delta, \quad x \neq a,$$

para algún  $\delta$  cuyo valor dependerá en general de  $\epsilon$ . (Por ejemplo, es razonable pensar que cuanto más pequeño sea  $\epsilon$  menor habrá de ser  $\delta$ .) En términos de la gráfica de la función  $f$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  significa que dado cualquier  $\epsilon > 0$  podemos encontrar un  $\delta > 0$  (que, en general, dependerá de  $\epsilon$ ) de forma que para  $0 < |x - a| < \delta$  la gráfica de la función  $f$  esté contenida en el rectángulo de la fig. 3.1.

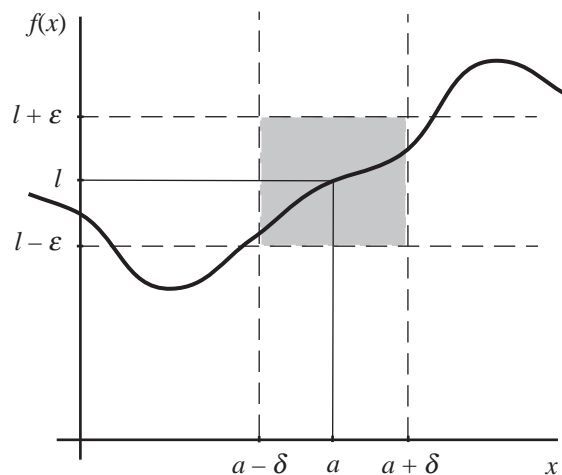


Figura 3.1: geometría de la definición de  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

*Nota.* Es muy importante observar que la existencia y el valor de  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  no dependen para nada de la existencia y el valor de  $f$  en el punto  $a$ .

- Si  $f = c$  es una función constante entonces se cumple que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} c = c = f(a)$  para todo  $a \in \mathbf{R}$ . En efecto, cualquiera que sea  $\epsilon > 0$  podemos tomar como  $\delta$  cualquier número positivo.
- Otro ejemplo muy sencillo es la función identidad, cuyo límite en cualquier punto existe y coincide con el valor de la función en dicho punto:

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a.$$

En efecto, dado  $\epsilon > 0$  arbitrario podemos conseguir que  $|x - a| < \epsilon$  para todo  $x$  que satisfaga  $0 < |x - a| < \delta$  tomando  $\delta = \epsilon$ .

**Ejemplo 3.3.** Veamos que la función  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  dada por  $f(x) = x^2$  cumple  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  (es decir,  $\lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2$ ) cualquiera que sea  $a \in \mathbf{R}$ . En primer lugar,  $\text{dom } f = \mathbf{R}$ , luego todo número real  $a$  es punto de acumulación de  $\text{dom } f$ . Si  $\epsilon > 0$ , supondremos que  $0 < |x - a| < \delta$  y veremos cómo hay que tomar  $\delta$  para que la desigualdad anterior implique que  $|x^2 - a^2| < \epsilon$ . Para ello, obsérvese que

$$|x^2 - a^2| = |x - a| |x + a| \leq \delta |x + a|.$$

El problema se reduce pues a probar que  $|x + a|$  no puede ser muy grande si  $0 < |x - a| < \delta$ . En efecto,

$$|x + a| = |(x - a) + 2a| \leq 2|a| + |x - a| < \delta + 2|a|.$$

Luego

$$0 < |x - a| < \delta \implies |x^2 - a^2| < \delta(\delta + 2|a|).$$

Debemos pues tomar  $\delta > 0$  tal que

$$\delta(\delta + 2|a|) \leq \epsilon. \quad (3.1)$$

Pero esto siempre es posible. En efecto, si tomamos  $0 < \delta \leq 1$  entonces  $\delta^2 \leq \delta$  y por tanto

$$\delta(\delta + 2|a|) = \delta^2 + 2|a|\delta \leq \delta(2|a| + 1) \leq \epsilon \quad \text{si} \quad \delta \leq \frac{\epsilon}{2|a| + 1}.$$

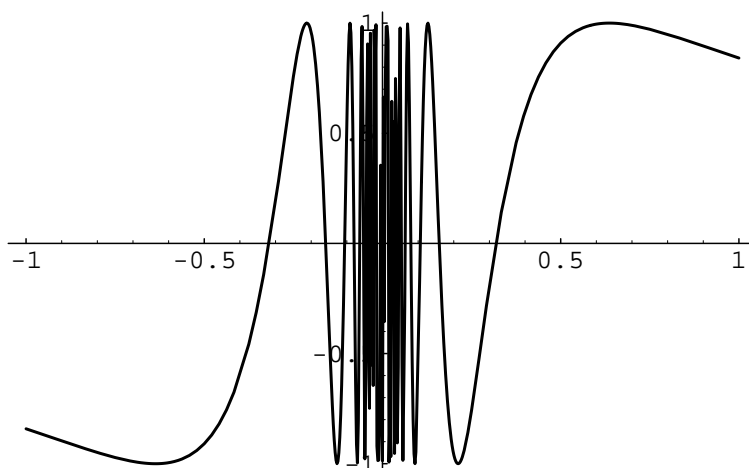
En resumen, cualquiera que sea  $\epsilon > 0$ , si tomamos

$$\delta = \min \{1, \epsilon / (2|a| + 1)\}$$

entonces

$$0 < |x - a| < \delta \implies |x^2 - a^2| < \epsilon,$$

como queríamos demostrar.

Figura 3.2: gráfica de la función  $\text{sen } \frac{1}{x}$ 

*Nota.* No hace falta conseguir el valor óptimo (es decir **mayor**) de  $\delta$  para el cual  $|f(x) - l| < \epsilon$  si  $0 < |x - a| < \delta$  y  $x \in \text{dom } f$ . Por ejemplo, en este caso el mayor  $\delta$  para el que se cumple (3.1) es  $\delta = \sqrt{\epsilon + a^2} - |a|$ .

**Ejemplo 3.4.** Veamos que no existe  $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sen } \frac{1}{x}$ . Esto significa que cualquiera que sea el número  $l \in \mathbf{R}$  se cumple

$$\lim_{x \rightarrow 0} \text{sen } \frac{1}{x} \neq l.$$

En primer lugar, veamos que el límite que estamos estudiando tiene sentido. Para ello, basta observar que en este caso el dominio de  $f$  es  $\mathbf{R} - \{0\}$ , del cual 0 (aunque *no* pertenece a  $\text{dom } f$ ) es punto de acumulación. Sea ahora  $l \in \mathbf{R}$  arbitrario. En general, la afirmación

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq l,$$

es decir, la *negación* de la afirmación  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ , significa exactamente lo siguiente:

$$\exists \epsilon > 0 \text{ tal que } \forall \delta > 0 \exists x \text{ cumpliendo } 0 < |x - a| < \delta \text{ y } |f(x) - l| \geq \epsilon.$$

En otras palabras: si  $\epsilon > 0$  se escoge suficientemente pequeño, para todo  $\delta > 0$  siempre hay algún  $x \in \text{dom } f$  distinto de  $a$  en el intervalo  $(a - \delta, a + \delta)$  tal que  $|f(x) - l| \geq \epsilon$ . En este caso concreto, observemos que si

$$x_n = \frac{2}{(4n+1)\pi}, \quad y_n = \frac{2}{(4n-1)\pi}, \quad \forall n \in \mathbf{N},$$

entonces

$$f(x_n) = 1, \quad f(y_n) = -1, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Si tomamos  $\epsilon = 1/2$ , cualquiera que sea  $\delta > 0$  podemos hallar un  $n \in \mathbf{N}$  suficientemente grande de modo que

$$0 < x_n < y_n < \delta.$$

Es imposible, sin embargo, que se cumpla a la vez

$$|f(x_n) - l| < \frac{1}{2}, \quad |f(y_n) - l| < \frac{1}{2}, \quad (3.2)$$

porque  $f(x_n) - f(y_n) = 2$  implica que  $f(x_n)$  y  $f(y_n)$  no pueden estar ambos en el intervalo de longitud 1  $(l - \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2})$ . En efecto, si se cumpliera (3.2) se tendría

$$2 = |f(x_n) - f(y_n)| \leq |f(x_n) - l| + |f(y_n) - l| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

*Ejercicio.* Probar de la misma forma que no existe  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sig}(x)$ .

*Ejercicio.* Probar que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$ .

### 3.1.1. Límites infinitos

La definición de  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  se generaliza fácilmente al caso de límites infinitos.

**Definición 3.5.** Sea  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  una función, y supongamos que  $\operatorname{dom} f$  no está acotado superiormente. Diremos que el límite de  $f(x)$  cuando  $x$  **tiende a infinito** es  $l$ , y escribiremos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l,$$

si para todo  $\epsilon > 0$  existe  $M \in \mathbf{R}$  tal que

$$x \in \operatorname{dom} f \text{ y } x > M \implies |f(x) - l| < \epsilon.$$

Análogamente,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$$

si  $\operatorname{dom} f$  no está acotado inferiormente, y para todo  $\epsilon > 0$  existe  $M \in \mathbf{R}$  tal que

$$x \in \operatorname{dom} f \text{ y } x < M \implies |f(x) - l| < \epsilon.$$

**Ejemplo 3.6.** Veamos que

$$\forall 0 < a < 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0.$$

En efecto, aquí  $\operatorname{dom} f = \mathbf{R}$ , que no está acotado. Hay que probar que cualquiera que sea  $\epsilon > 0$  existe  $M \in \mathbf{R}$  tal que  $x > M$  implica  $|a^x| = a^x < \epsilon$ . A



su vez, esta última desigualdad es equivalente a la desigualdad  $(1/a)^x > 1/\epsilon$ . Por la propiedad arquimediana multiplicativa de los números reales, al ser  $1/a > 1$  existe  $N \in \mathbf{N}$  tal que  $(1/a)^N > 1/\epsilon$ , y por ser la función  $(1/a)^x$  monótona creciente se cumple que  $(1/a)^x > 1/\epsilon$  si  $x > N$ , es decir

$$a^x < \epsilon, \quad \forall x > N.$$

Luego tomando  $M = N$  se cumple la definición para este  $\epsilon > 0$ , que era arbitrario.

Otra forma de probar este resultado es utilizando que para  $0 < a < 1$   $f_a(x) = a^x$  y su inversa  $\log_a$  son monótonas decrecientes en sus respectivos dominios  $\mathbf{R}$  y  $(0, \infty)$ . Por tanto, cualquiera que sea  $\epsilon > 0$  se cumplirá la desigualdad  $a^x < \epsilon$  sin más que tomar  $x > \log_a \epsilon$ .

De forma análoga se define el límite

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty. \quad (3.3)$$

En efecto, diremos que (3.3) se cumple si  $a$  es un punto de acumulación de  $\text{dom } f$ , y para todo  $M \in \mathbf{R}$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$x \in \text{dom } f \text{ y } 0 < |x - a| < \delta \implies f(x) > M.$$

Por ejemplo, es fácil probar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

*Ejercicio.* Defínanse los límites  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ , siendo  $a$  un número real.

*Ejercicio.* Probar que si  $a$  es un punto de acumulación de  $\text{dom}(1/f)$  entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{|f(x)|} = \infty.$$

### 3.1.2. Límites laterales

Otro tipo de límites que interesa definir son los límites laterales.

**Definición 3.7.** Sea  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , y sea  $a \in \mathbf{R}$  un punto de acumulación de  $(a, \infty) \cap \text{dom } f$  (i.e., todo intervalo  $J$  que contiene a  $a$  contiene algún punto  $x > a$  perteneciente al dominio de  $f$ ). Diremos que el **límite lateral** de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a  $a$  **por la derecha** es  $l$ , y escribiremos

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l,$$

si para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$x \in \text{dom } f \text{ y } a < x < a + \delta \implies |f(x) - l| < \epsilon.$$

Análogamente, si  $a \in \mathbf{R}$  es un punto de acumulación de  $(-\infty, a) \cap \text{dom } f$  (i.e., todo intervalo  $J$  que contiene a  $a$  contiene algún punto  $x < a$  perteneciente al dominio de  $f$ ) diremos que el límite lateral de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a  $a$  **por la izquierda** es  $l$ , y escribiremos

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l,$$

si para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$x \in \text{dom } f \text{ y } a - \delta < x < a \implies |f(x) - l| < \epsilon.$$

Por ejemplo, ya hemos visto (Ejercicio 3.1) que no existe  $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sig}(x)$ . Sin embargo, es fácil ver que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \text{sig}(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \text{sig}(x) = -1.$$

En efecto, basta observar que para  $x > 0$  ó  $x < 0$   $f$  es constante, respectivamente igual a 1 ó  $-1$ .

**Proposición 3.8.** *Si los dos límites laterales de  $f$  en  $a$  existen y son iguales a un número  $l \in \mathbf{R}$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ . Recíprocamente, si  $a$  es un punto de acumulación de  $\text{dom } f \cap (-\infty, a)$  y de  $\text{dom } f \cap (a, \infty)$ , y  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$ .*

**Ejemplo 3.9.** Aunque  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$  (pruébese esto a partir de la definición), no existe  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x}$ , ya que  $\text{dom } f \cap (-\infty, 0) = \emptyset$  en este caso.

Los límites laterales se extienden de forma obvia al caso de límites infinitos. Por ejemplo,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$$

si  $a$  es punto de acumulación de  $\text{dom } f \cap (a, \infty)$ , y para todo  $M \in \mathbf{R}$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$x \in \text{dom } f \text{ y } a < x < a + \delta \implies f(x) > M.$$

Así, por ejemplo,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty.$$

*Ejercicio.* Si  $a \in \mathbf{R}$ , defínanse los límites  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$  y  $\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = -\infty$ . Pruébese que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} 1/x = -\infty$ .

### 3.1.3. Propiedades de los límites

**Teorema** (unicidad del límite). *Si existe el límite de una función en un punto, dicho límite es único.*

*Demostración.* Hay que probar que si

$$l_1 = \lim_{x \rightarrow a} f(x), \quad l_2 = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

entonces  $l_1 = l_2$ . Supongamos, en efecto, que  $l_1 \neq l_2$ . Tomando, entonces,  $\epsilon = |l_1 - l_2|/2 > 0$  en la definición de límite se deduce que existen dos números positivos  $\delta_1$  y  $\delta_2$  tales que

$$x \in \text{dom } f \text{ y } 0 < |x - a| < \delta_i \implies |f(x) - l_i| < \epsilon, \quad i = 1, 2.$$

Si  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$  y  $x \in \text{dom } f$  es un número cualquiera que cumple  $0 < |x - a| < \delta$  entonces

$$|l_1 - l_2| \leq |f(x) - l_1| + |f(x) - l_2| < 2\epsilon = |l_1 - l_2|,$$

lo cual es absurdo.

*Q.E.D.*

*Nota.* Idéntico resultado es válido para límites laterales ó infinitos, con una demostración análoga.

Probemos, en primer lugar, que si  $f$  tiene límite (finito) en  $a \in \mathbf{R}$  entonces  $f$  está acotada en las proximidades del punto  $a$ :

**Proposición 3.10.** *Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe, entonces  $f$  está **acotada** en algún intervalo de la forma  $(a - \delta, a + \delta)$  con  $\delta > 0$ .*

*Demostración.* Hay que probar que existen  $\delta > 0$  y  $M > 0$  tales que

$$|f(x)| < M, \quad \forall x \in \text{dom } f \cap (a - \delta, a + \delta).$$

Por la existencia de  $l = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$|f(x) - l| < 1, \quad \forall x \neq a \text{ tal que } x \in \text{dom } f \cap (a - \delta, a + \delta).$$

Si  $x \neq a$  y  $x \in \text{dom } f \cap (a - \delta, a + \delta)$ , entonces

$$|f(x)| \leq |f(x) - l| + |l| < 1 + |l|.$$

Se obtiene por tanto la acotación deseada tomando (por ejemplo)  $M = 1 + |l|$  si  $a \notin \text{dom } f$ , ó  $M = \max(1 + |l|, 1 + |f(a)|) > 0$  si  $a \in \text{dom } f$ . *Q.E.D.*

Otro resultado importante acerca del límite se refiere al comportamiento del signo de una función que tiende a un límite distinto de cero en un punto. Más precisamente, se verifica el siguiente resultado:

**Proposición 3.11.** Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l > 0$ , entonces existen  $\delta > 0$  y  $c > 0$  tales que  $0 < c < f(x)$  para todo  $x \neq a$  en  $\text{dom } f \cap (a - \delta, a + \delta)$ .

*Demostración.* De la definición de límite aplicada a  $\epsilon = l/2 > 0$  se deduce la existencia de  $\delta > 0$  tal que

$$-\frac{l}{2} < f(x) - l < \frac{l}{2}, \quad \forall x \in \text{dom } f \cap (a - \delta, a + \delta), \quad x \neq a.$$

El resultado se cumple por tanto tomando este  $\delta > 0$  y  $c = l/2 > 0$ . *Q.E.D.*

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l < 0$ , aplicando la proposición anterior a  $-f$  se demuestra que existen  $\delta > 0$  y  $c > 0$  tales que

$$f(x) < -c < 0, \quad \forall x \in \text{dom } f \cap (a - \delta, a + \delta), \quad x \neq a.$$

Por tanto, si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0$  existen  $\delta > 0$  y  $c > 0$  tales que

$$|f(x)| > c > 0, \quad \forall x \in \text{dom } f \cap (a - \delta, a + \delta), \quad x \neq a.$$

**Corolario 3.12.** Análogamente, si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \neq 0$ , entonces hay un  $\delta > 0$  tal que el signo de  $f$  es constante e igual a  $\text{sig } l$  en el conjunto  $(a - \delta, a + \delta) \cap \text{dom } f - \{a\}$ .

La siguiente proposición proporciona un método muy útil para probar que una función tiene límite, “encajándola” entre dos funciones que tienden al mismo límite:

**Proposición 3.13.** Sean  $f, g_1, g_2 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  funciones tales que para algún  $h > 0$  se cumple

$$g_1(x) \leq f(x) \leq g_2(x), \quad \forall x \in \text{dom } f \cap (a - h, a + h), \quad x \neq a.$$

Si  $a$  es punto de acumulación de  $\text{dom } f$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g_1(x) = \lim_{x \rightarrow a} g_2(x) = l$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ .

*Demostración.* Dado  $\epsilon > 0$ , existen  $\delta_1 > 0$  y  $\delta_2 > 0$  tales que

$$x \in \text{dom } g_i \text{ y } 0 < |x - a| < \delta_i \implies l - \epsilon < g_i(x) < l + \epsilon, \quad i = 1, 2.$$

Tomando  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, h) > 0$  y teniendo en cuenta que por hipótesis  $\text{dom } f \cap (a - h, a + h) - \{a\} \subset \text{dom } g_i \cap (a - h, a + h) - \{a\}$  ( $i = 1, 2$ ) se obtiene

$$x \in \text{dom } f \text{ y } 0 < |x - a| < \delta \implies l - \epsilon < g_1(x) \leq f(x) \leq g_2(x) < l + \epsilon.$$

*Q.E.D.*

**Corolario 3.14.** Si existe  $h > 0$  tal que  $0 \leq |f(x)| \leq g(x)$  para todo  $x \in \text{dom } g \cap (a - h, a + h)$  con  $x \neq a$ , y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ .

El siguiente teorema describe el comportamiento de la operación de paso al límite en relación con las operaciones algebraicas entre funciones introducidas en el capítulo anterior:

**Teorema** (propiedades de los límites). Sean  $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , y supongamos que existen los límites  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l_1$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l_2$ . Si  $a \in \mathbf{R}$  es un punto de acumulación de  $\text{dom } f \cap \text{dom } g$  se cumple:

$$\text{I) } \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = l_1 + l_2$$

$$\text{II) } \lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = l_1 l_2$$

En particular, para todo  $c \in \mathbf{R}$  se tiene

$$\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = cl_1.$$

Si, además,  $l_2 \neq 0$ , entonces

$$\text{III) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}.$$

*Demostración.* Demostremos, por ejemplo, la última propiedad. Utilizando la segunda, no se pierde generalidad tomando  $f = 1$ . Aplicando la Proposición 3.11 a  $|g|$  deducimos que existen  $\delta_1 > 0$  y  $c > 0$  tales que

$$|g(x)| > c > 0, \quad \forall x \in \text{dom } g \cap (a - \delta_1, a + \delta_1), \quad x \neq a.$$

En particular, esto implica (¿por qué?) que  $a$  es un punto de acumulación de  $\text{dom } \frac{1}{g}$ . Además, cualquiera que sea  $\epsilon' > 0$  existe  $\delta_2 > 0$  tal que

$$|g(x) - l_2| < \epsilon', \quad \forall x \in \text{dom } g \cap (a - \delta_2, a + \delta_2), \quad x \neq a.$$

Luego si  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$  y  $x \neq a$  pertenece a  $\text{dom } g \cap (a - \delta, a + \delta)$  entonces

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{l_2} \right| = \frac{|g(x) - l_2|}{|l_2| |g(x)|} < \frac{\epsilon'}{c |l_2|} \leq \epsilon$$

si tomamos  $\epsilon' \leq c |l_2| \epsilon$ .

*Q.E.D.*

*Ejercicio.* Probar que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \implies \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |l|$ .

## 3.2. Continuidad

### 3.2.1. Continuidad en un punto

**Definición 3.15.** Una función  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  es **continua** en  $a \in \mathbf{R}$  si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Para que  $f$  sea continua en  $a$  han de cumplirse por tanto las siguientes condiciones:

- I)  $f$  está definida en  $a$ , es decir  $a \in \text{dom } f$ .
- II) Existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ . En particular, obsérvese que  $a$  ha de ser punto de acumulación de  $\text{dom } f$ .
- III)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  coincide con  $f(a)$ .

Si alguna de las condiciones anteriores falla (por ejemplo, si  $a \notin \text{dom } f$ ) entonces  $f$  es **discontinua** en  $a$ .

- La definición de continuidad de  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  en  $a$  se puede expresar de la forma siguiente:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } x \in \text{dom } f \text{ y } |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

- Las funciones constantes, la función identidad y la función cuadrado ( $x \mapsto x^2$ ) son continuas en todo punto  $a \in \mathbf{R}$ .
- La función raíz cuadrada ( $x \mapsto \sqrt{x}$ ) es continua en todos los puntos de su dominio  $[0, \infty)$ .
- Las funciones sig y  $x \mapsto \text{sen}(1/x)$  no son continuas en  $x = 0$  (en ambos casos no existe  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ , mientras que para la segunda de estas funciones 0 ni siquiera pertenece a  $\text{dom } f$ ).

*Ejercicio.* Probar que  $f$  es continua en  $a$  si y sólo si  $\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = f(a)$ .

El Teorema 3.1.3 acerca de las propiedades de los límites proporciona inmediatamente el siguiente importante resultado:

**Teorema 3.16.** *Si  $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  son funciones continuas en  $a \in \mathbf{R}$ , y  $a$  es punto de acumulación de  $\text{dom } f \cap \text{dom } g$  (por ejemplo, esto ocurrirá automáticamente si  $f$  y  $g$  tienen el mismo dominio), entonces  $f \pm g$  y  $fg$  son continuas en  $a$ . Si, además,  $g(a) \neq 0$ , entonces  $f/g$  es continua en  $a$ .*

El teorema anterior nos permite probar fácilmente la continuidad de multitud de funciones. Por ejemplo, de la continuidad de las funciones constantes y de la función identidad en cualquier punto se sigue que *los polinomios son funciones continuas en todo  $\mathbf{R}$* . A su vez, esto implica que si  $P$  y  $Q$  son polinomios y  $Q \neq 0$  la *función racional  $P/Q$  es continua en todo punto de su dominio* (es decir, en todo punto  $a$  tal que  $Q(a) \neq 0$ ).

Otra propiedad importante de la continuidad es su buen comportamiento bajo la operación de composición:

**Teorema 3.17.** *Sean  $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  funciones tales que  $\text{im } g \subset \text{dom } f$ . Si  $g$  es continua en  $a$  y  $f$  es continua en  $g(a)$ , entonces  $f \circ g$  es continua en  $a$ .*

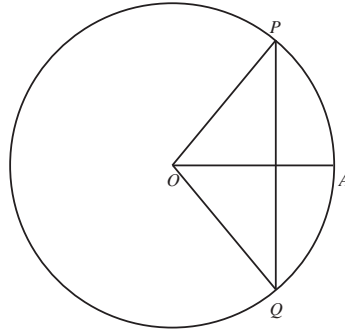


Figura 3.3: si el arco  $AP$  mide  $x$ , entonces  $PQ = 2 \operatorname{sen} x < PAQ = 2x$ .

*Demostración.* En primer lugar,  $\operatorname{im} g \subset \operatorname{dom} f$  implica que  $\operatorname{dom}(f \circ g) = \operatorname{dom} g$ ; en particular,  $a \in \operatorname{dom}(f \circ g)$  y  $a$  es un punto de acumulación de  $\operatorname{dom}(f \circ g)$ . Hay que probar que, dado un  $\epsilon > 0$  cualquiera, es posible encontrar un  $\delta > 0$  tal que

$$x \in \operatorname{dom}(f \circ g) \text{ y } |x - a| < \delta \implies |f(g(x)) - f(g(a))| < \epsilon. \quad (3.4)$$

Al ser  $f$  continua en  $g(a)$ , existe  $\delta_1 > 0$  tal que

$$y \in \operatorname{dom} f \text{ y } |y - g(a)| < \delta_1 \implies |f(y) - f(g(a))| < \epsilon. \quad (3.5)$$

Utilizando ahora la continuidad de  $g$  en  $a$ , podemos escoger  $\delta > 0$  tal que

$$x \in \operatorname{dom} g \text{ y } |x - a| < \delta \implies |g(x) - g(a)| < \delta_1. \quad (3.6)$$

Si  $x \in \operatorname{dom}(f \circ g) = \operatorname{dom} g$  y  $|x - a| < \delta$  entonces  $y = g(x)$  cumple  $y \in \operatorname{dom} f$  y  $|y - g(a)| < \delta_1$  por (3.6), de donde, sustituyendo  $y = g(x)$  en (3.5), se obtiene (3.4). *Q.E.D.*

**Ejemplo 3.18.** En este ejemplo probaremos que las funciones trigonométricas son continuas en cualquier punto de su dominio. Nuestra discusión se basará en la desigualdad elemental (véase la fig. 3.3)

$$0 \leq |\operatorname{sen} h| < h, \quad \forall h > 0.$$

Si  $h < 0$ , entonces

$$0 \leq |\operatorname{sen}(-h)| = |-\operatorname{sen} h| = |\operatorname{sen} h| < -h = |h|.$$

Por tanto

$$0 \leq |\operatorname{sen} h| < |h|, \quad \forall h \neq 0$$

(para  $h=0$ , las desigualdades anteriores se convierten obviamente en igualdades). Empecemos por probar la continuidad de  $\operatorname{sen}$  en  $0$ . En efecto,

$$0 \leq |\operatorname{sen} x - 0| = |\operatorname{sen} x| \leq |x|,$$

y basta aplicar el Corolario 3.14. La continuidad de la función  $\cos$  en 0 se sigue observando que

$$0 \leq |\cos x - 1| = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \leq \frac{x^2}{2}$$

y aplicando de nuevo el Corolario 3.14. De lo anterior se deduce la continuidad de  $\operatorname{sen}$  en  $a \in \mathbf{R}$  arbitrario, ya que

$$\operatorname{sen}(a + h) = \operatorname{sen} a \cos h + \cos a \operatorname{sen} h \xrightarrow{h \rightarrow 0} \operatorname{sen} a \cdot 1 + \cos a \cdot 0 = \operatorname{sen} a$$

por las propiedades de los límites. La continuidad de la función  $\cos$  en cualquier punto se deduce de la fórmula  $\cos = \operatorname{sen} \circ f$ , siendo  $f(x) = \frac{\pi}{2} - x$  una función continua en todo punto (es un polinomio). Del teorema 3.17 se sigue que las funciones  $\tan$ ,  $\cot$ ,  $\sec$  y  $\operatorname{cosec}$  son continuas en todo punto de sus dominios.

*Ejercicio.* Probar que la función  $\log_a$  ( $a > 0$ ) es continua en todo punto de su dominio  $(0, \infty)$ .

*Solución.* Como  $\log_{1/a} = -\log_a$ , podemos tomar sin pérdida de generalidad  $a > 1$ . Veamos, en primer lugar, que si  $a > 1$  entonces  $\log_a$  es continua en 1. Hay que probar que, dado  $\epsilon > 0$ , podemos encontrar  $\delta > 0$  tal que

$$1 - \delta < x < 1 + \delta \implies -\epsilon < \log_a x < \epsilon \quad (3.7)$$

(tomamos también  $\delta \leq 1$  para que  $(1 - \delta, 1 + \delta) \subset \operatorname{dom} \log_a$ ). Esta última desigualdad es equivalente (al ser la función  $x \mapsto a^x$  inversa de  $\log_a$  monótona creciente) a la desigualdad

$$\frac{1}{h} < x < h, \quad \text{si } h = a^\epsilon > 0.$$

Como  $a > 1$  y  $\epsilon > 0$ ,  $0 < 1/h < 1 < h$ ; por tanto, tomando  $\delta = \min(h - 1, 1 - \frac{1}{h}) > 0$  obtenemos (3.7).

Para probar la continuidad de  $\log_a$  en un punto cualquiera  $x > 0$ , observamos que

$$\log_a(x + h) = \log_a \left[ x \left( 1 + \frac{h}{x} \right) \right] = \log_a x + \log_a \left( 1 + \frac{h}{x} \right).$$

Si  $h \rightarrow 0$ , el primer término tiende a  $\log_a x$  (como función de  $h$  es constante) y el segundo tiende a  $\log_a 1 = 0$ . Para probar esto último, basta observar que la función  $h \mapsto \log_a \left( 1 + \frac{h}{x} \right)$  es la composición de la función  $\log_a$  con la función polinómica  $h \mapsto 1 + \frac{h}{x}$ , continuas en 0 y 1, respectivamente.  $\square$



### 3.2.2. Continuidad en intervalos

La continuidad de una función proporciona consecuencias importantes y profundas cuando se cumple no en un punto aislado sino en todos los puntos de un intervalo.

**Definición 3.19.** Una función  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  es **continua por la derecha** en  $a \in \mathbf{R}$  si  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ . Análogamente, diremos que  $f$  es **continua por la izquierda** en  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ .

Equivalentemente,  $f$  es continua por la derecha (resp. por la izquierda) en  $a$  si la restricción de  $f$  al intervalo  $[a, \infty)$  (resp.  $(-\infty, a]$ ) es continua en  $a$ .

- La función raíz cuadrada es continua por la derecha pero no por la izquierda en 0. En efecto, recuérdese que no existe  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x}$ .
- En general, si  $f$  es continua en  $a$  y  $a$  es punto de acumulación de  $\text{dom } f \cap [a, \infty)$  y de  $\text{dom } f \cap (-\infty, a]$  entonces  $f$  es continua por la derecha y por la izquierda en  $a$ . Recíprocamente, si  $f$  es continua por la derecha y por la izquierda en  $a$  entonces  $f$  es continua en  $a$ .
- La función  $x \mapsto [x]$  es continua por la derecha, pero no por la izquierda, en todos los puntos de  $\mathbf{Z}$ .
- La función sig no es continua ni por la derecha ni por la izquierda en 0.

**Definición 3.20.** Una función  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  es **continua en un intervalo cerrado**  $[a, b]$  (siendo  $a < b$  números reales) si  $f$  es continua en  $x$  para todo  $x \in (a, b)$ , es continua por la derecha en  $a$  y es continua por la izquierda en  $b$ .

- Equivalentemente,  $f$  es continua en  $[a, b]$  si la restricción de  $f$  al intervalo  $[a, b]$  es continua en  $x$  para todo  $x \in [a, b]$ .
- En general, diremos que  $f$  es continua en un intervalo cualquiera cuando  $f$  es continua en el correspondiente intervalo abierto, y es continua por la derecha en el extremo inferior del intervalo y continua por la izquierda en el extremo superior, si alguno de estos extremos pertenece al intervalo.
- Por ejemplo, la función parte entera es continua en los intervalos  $[0, 1/2]$  y  $[0, 1)$ , y no lo es en el intervalo  $[0, 1]$  (al no ser continua por la izquierda en 1).

- La función  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ b, & x = 0 \end{cases}$$

no es continua en  $[-1, 1]$ , ya que no es continua en 0 (cualquiera que sea  $b \in \mathbf{R}$ ).

### 3.3. Teoremas fundamentales

La Proposición 3.11 y su Corolario 3.12 proporcionan inmediatamente la siguiente propiedad importante de las funciones continuas, que utilizaremos a menudo:

**Teorema de conservación del signo.** *Si  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  es continua en  $a$  y  $f(a) > 0$ , entonces existen  $\delta > 0$  y  $c > 0$  tales que*

$$f(x) > c > 0, \quad \forall x \in \text{dom } f \cap (a - \delta, a + \delta).$$

*En particular,  $f$  es positiva en  $\text{dom } f \cap (a - \delta, a + \delta)$ . Un resultado análogo es válido si  $f(a) < 0$ .*

Este resultado es válido también cuando  $f$  es continua por la derecha ó por la izquierda en  $a$  y  $f(a) \neq 0$ . Por ejemplo, si  $f$  es continua por la derecha en  $a$  y  $f(a) > 0$  entonces existen  $\delta > 0$  y  $c > 0$  tales que

$$f(x) > c > 0, \quad \forall x \in \text{dom } f \cap [a, a + \delta).$$

#### 3.3.1. Teorema de Bolzano

Vamos a ver a continuación varios teoremas que encierran propiedades fundamentales de las funciones continuas en intervalos. El primero de ellos es una sencilla consecuencia del teorema de conservación del signo:

**Teorema de Bolzano.** *Si  $f$  es continua en  $[a, b]$  (con  $a < b$ ) y  $f(a)f(b) < 0$ , entonces existe  $x \in (a, b)$  tal que  $f(x) = 0$ .*

*Demostración.* La hipótesis del teorema afirma que  $f(a)$  y  $f(b)$  son distintos de cero y tienen signos opuestos. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad (¿por qué?), que  $f(a) < 0$  y  $f(b) > 0$ . La idea de la demostración es muy sencilla: si definimos el conjunto  $A$  mediante

$$A = \{t \in [a, b] : f(t) < 0\},$$

intuitivamente el supremo de este conjunto es el mayor número  $x \in [a, b]$  tal que  $f(x) = 0$ . Para probar esto rigurosamente, observamos en primer lugar que  $a \in A$  por ser  $f(a) < 0$ , luego  $A \neq \emptyset$ . Además, por construcción  $A \leq b$ .

Por el axioma del supremo, existe  $z = \sup A$ ; probaremos a continuación que  $f(z) = 0$ .

En primer lugar, es fácil ver que  $z \in (a, b)$ . En efecto, como  $f(a) < 0$  y  $f$  es continua por la derecha en  $a$ ,  $f$  es negativa en un intervalo de la forma  $[a, a + \delta)$  para  $\delta > 0$  suficientemente pequeño (teorema de conservación del signo), por lo que  $z = \sup A \geq a + \frac{\delta}{2} > a$ . Análogamente, al ser  $f$  continua por la izquierda en  $b$  y  $f(b) > 0$ ,  $f$  es positiva un intervalo de la forma  $(b - \delta, b]$  con  $\delta > 0$ , y por tanto  $A \leq b - \frac{\delta}{2}$  implica  $\sup A \leq b - \frac{\delta}{2} < b$ .

Probemos ahora que  $f(z) = 0$ . En efecto, supongamos que fuera  $f(z) \neq 0$ . Como  $f$  es continua en  $z \in (a, b)$ , por el teorema de conservación del signo existe  $\delta > 0$  tal que  $f$  tiene el mismo signo en todos los puntos del intervalo  $(z - \delta, z + \delta) \subset (a, b)$ . Si fuera  $f(z) < 0$ , entonces los puntos del intervalo  $(z, z + \delta)$  estarían todos en  $A$ , y por tanto  $z$  no sería una cota superior de  $A$ . Y si fuera  $f(z) > 0$ , los puntos del intervalo  $(z - \delta, z)$  serían cotas superiores de  $A$  (ya que  $A \leq z$  y  $z \notin A$ ). La única posibilidad es por tanto que  $f(z) = 0$ . Q.E.D.

*Nota.* El resultado es falso en general si  $f$  deja de ser continua incluso en un sólo punto de  $[a, b]$ . Por ejemplo, considérese la función escalón  $\theta : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , definida por  $\theta(x) = -1$  si  $x \leq 0$  y  $\theta(x) = 1$  para todo  $x > 0$ , en el intervalo  $[-1, 1]$ .

### 3.3.2. Teorema de los valores intermedios

El teorema de Bolzano tiene como consecuencia el siguiente resultado, conocido como teorema de los valores intermedios:

**Teorema de los valores intermedios.** *Si  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  es continua en  $[a, b]$  (con  $a < b$ ) y  $f(a) < c < f(b)$ , entonces existe  $x \in (a, b)$  tal que  $f(x) = c$ . Un resultado análogo es válido si  $f(b) < c < f(a)$ .*

En otras palabras, si  $f$  es continua en  $[a, b]$  entonces  $f$  toma todos los valores entre  $f(a)$  y  $f(b)$ .

*Demostración.* Basta aplicar el Teorema de Bolzano a  $g = f - c$ , que sigue siendo continua en  $[a, b]$  y cumple  $g(a) = f(a) - c < 0$ ,  $g(b) = f(b) - c > 0$ . Existe entonces  $x \in (a, b)$  tal que  $g(x) = f(x) - c = 0$ . Para probar la segunda afirmación, basta aplicar lo anterior a la función  $-f$ . Q.E.D.

*Nota.* De nuevo, el resultado no es cierto en general si  $f$  tiene algún punto de discontinuidad en  $[a, b]$ . Por ejemplo, considérese la función parte entera en el intervalo  $[0, 1]$ .

### 3.3.3. Teorema de acotación

En esta sección probaremos la siguiente propiedad fundamental de las funciones continuas: una función continua en un intervalo cerrado y acotado está acotada en dicho intervalo.

**Teorema 3.21.** *Si  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  es continua en  $[a, b]$  (con  $a < b$ ), entonces  $f$  está acotada en  $[a, b]$ .*

*Demostración.* Hay que probar que existe  $M > 0$  tal que  $|f(x)| < M$  para todo  $x \in [a, b]$ . Para ello, consideramos el conjunto

$$A = \{x \in [a, b] : f \text{ acotada en } [a, x]\}.$$

$A$  es no vacío, ya que  $a \in A$ , y  $A \leq b$ . Por tanto, existe  $z = \sup A$ . Veamos, en primer lugar, que  $z \neq a$ . En efecto, al existir  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ , por la Proposición 3.10 existe  $\delta > 0$  suficientemente pequeño tal que  $f$  está acotada en el intervalo  $[a, a + \delta)$ . Por tanto,  $[a, a + \delta) \subset A$ , por lo que  $z = \sup A \geq a + \frac{\delta}{2} > a$ .

Probemos a continuación que  $z = b$ . En efecto, si  $z < b$  entonces  $f$  continua en  $z \in (a, b)$  implica (de nuevo por la Proposición 3.10) que existe  $\delta > 0$  tal que  $f$  está acotada en el intervalo  $(z - \delta, z + \delta) \subset (a, b)$ . En otras palabras, existe  $N_1 > 0$  tal que

$$|f(x)| < N_1, \quad \forall x \in (z - \delta, z + \delta).$$

Como  $z = \sup A$ , tiene que haber algún  $t \in A$  en el intervalo  $(z - \delta, z]$  (pues, de lo contrario, los elementos de  $(z - \delta, z)$  serían cotas superiores de  $A$  menores que  $z = \sup A$ ). Entonces  $f$  está acotada en  $[a, t]$ , es decir existe  $N_2 > 0$  tal que

$$|f(x)| < N_2, \quad \forall x \in [a, t].$$

Por tanto,  $f$  está acotada superiormente (por  $\max(N_1, N_2) > 0$ ) en el intervalo  $[a, z + \frac{\delta}{2}]$ . Pero esto implica que  $z = \sup A < z + \frac{\delta}{2} \in A$ , lo cual es absurdo. Por tanto, ha de ser  $z = \sup A = b$ .

Sólo queda probar que  $b \in A$ , es decir que  $f$  está acotada en  $[a, b]$ . Para ello, aplicamos una vez más la Proposición 3.10, obteniendo la existencia de  $\delta > 0$  suficientemente pequeño tal que  $f$  está acotada en  $(b - \delta, b]$ . Como  $b = \sup A$ , de nuevo debe existir  $y \in A \cap (b - \delta, b]$ . Igual que antes, al estar  $f$  acotada en  $[a, y]$  y en  $(b - \delta, b] \ni y$  se sigue que  $f$  está acotada en  $[a, b]$ . Q.E.D.

*Nota.* Una vez más, basta con que haya un sólo punto de  $[a, b]$  en que  $f$  sea discontinua para que el resultado anterior pueda ser falso. Por ejemplo, considérese la función  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  dada por  $f(0) = 0$  y  $f(x) = 1/x$ , para todo  $x \neq 0$ , en el intervalo  $[-1, 1]$ . También es fundamental que el intervalo en que  $f$  es continua sea **compacto**, es decir cerrado y acotado a la vez. Por

ejemplo, la función anterior es continua pero no está acotada en el intervalo acotado  $(0, 1)$ , y la función identidad es continua pero tampoco está acotada en el intervalo cerrado  $[0, \infty)$ .

### 3.3.4. Existencia de máximo y mínimo

El siguiente teorema, que es un refinamiento del anterior, afirma la existencia de un máximo y un mínimo de  $\text{im } f$  si  $f$  es una función continua en un intervalo compacto  $[a, b]$ :

**Teorema 3.22.** *Si  $f$  es una función continua en  $[a, b]$  (con  $a < b$ ), entonces existen  $x_1, x_2 \in [a, b]$  tales que*

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \quad \forall x \in [a, b].$$

En otras palabras, *una función continua en un intervalo compacto alcanza su máximo y su mínimo en dicho intervalo.*

*Demostración.* Probemos, en primer lugar, que existe  $x_2 \in [a, b]$  tal que  $f(x) \leq f(x_2)$  para todo  $x \in [a, b]$ . En efecto, consideremos el conjunto

$$A = f([a, b]) = \{f(x) : x \in [a, b]\}.$$

Dicho conjunto es obviamente no vacío, y está acotado superiormente por el teorema anterior. Por tanto, existirá  $z = \sup A$ ; basta probar que  $z \in A$ , es decir que  $z = f(x_2)$  para algún  $x_2 \in [a, b]$ . Supongamos que esto no fuera cierto. Entonces la función  $g = \frac{1}{z-f}$  sería continua en  $[a, b]$ , ya que el denominador no se anularía para ningún  $x \in [a, b]$ . Como  $z = \sup A$  y  $z \notin A$  por hipótesis, dado  $\epsilon > 0$  existe  $y \in A$  tal que  $y \in (z - \epsilon, z)$ , es decir existe  $x \in [a, b]$  tal que  $z - \epsilon < f(x) < z$ . Esto implica que para todo  $\epsilon > 0$  existe  $x \in [a, b]$  tal que  $g(x) > 1/\epsilon$ . En otras palabras,  $g$  no está acotada superiormente en  $[a, b]$ , lo que contradice el teorema anterior.

Resta sólo probar la existencia de algún  $x_1 \in [a, b]$  tal que  $f(x_1) \leq f(x)$  para todo  $x \in [a, b]$ . Para ello, basta aplicar la primera parte de la demostración a la función  $-f$ . *Q.E.D.*

*Nota.* De nuevo, el teorema anterior puede fallar si  $f$  es discontinua en algún punto de  $[a, b]$  o si  $f$  es continua en un intervalo no compacto. Por ejemplo, la función  $x \mapsto 1/x$  es continua y acotada en el intervalo cerrado  $[1, \infty)$ . Sin embargo,  $f$  no alcanza su mínimo en dicho intervalo.

## 3.4. Funciones monótonas y continuidad

En esta sección,  $J$  denotará un intervalo arbitrario (acotado ó no). Obsérvese que los intervalos (de cualquier tipo) se caracterizan por la siguiente propiedad:  $J \subset \mathbf{R}$  es un intervalo si y sólo si

$$x, y \in J \implies [x, y] \subset J.$$

Los siguientes teoremas son consecuencia directa del teorema de los valores intermedios:

**Teorema 3.23.** *Si  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  es continua en un intervalo  $J$ , entonces  $f(J)$  es un intervalo.*

*Demostración.* Si  $f(a) < f(b)$  pertenecen ambos a  $f(J)$ , entonces  $a \neq b$ . Suponiendo, por ejemplo, que  $a < b$ , se tiene que  $[a, b] \subset J$  al ser  $J$  un intervalo. Como  $f$  es continua en  $J$ , lo será también en  $[a, b]$ . Aplicando el teorema de los valores intermedios se obtiene que para todo  $c$  en el intervalo  $(f(a), f(b))$  existe  $x \in (a, b) \subset J$  tal que  $c = f(x)$ . Esto implica que  $[f(a), f(b)] \subset f(J)$ , y  $f(J)$  es por tanto un intervalo. Q.E.D.

**Teorema 3.24.** *Si  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  es una función estrictamente monótona en un intervalo  $J$ , entonces  $f$  es continua en  $J$  si y sólo si  $f(J)$  es un intervalo.*

*Demostración.* Por el teorema anterior, basta probar que si  $f$  es (por ejemplo) monótona creciente y  $f(J)$  es un intervalo, entonces  $f$  es continua en  $J$ . Probaremos que  $f$  es continua en todo punto  $a$  interior a  $J$  (es decir,  $a \in J$  y  $a$  no es un extremo de  $J$ ); el caso en que  $a$  es un extremo de  $J$ , que es totalmente análogo, se propone como ejercicio para el lector.

Al ser  $a$  interior a  $J$ , podemos encontrar  $h > 0$  tal que  $(a - h, a + h) \subset J$ . Por hipótesis, se cumple

$$f(a) \in (f(a - h), f(a + h)) \subset f(J).$$

Dado  $\epsilon > 0$ , podemos encontrar  $\epsilon'$  tal que  $0 < \epsilon' \leq \epsilon$  y  $(f(a) - \epsilon', f(a) + \epsilon') \subset (f(a - h), f(a + h)) \subset f(J)$ ; por ejemplo, basta tomar  $\epsilon' = \min(\epsilon, f(a + h) - f(a), f(a) - f(a - h))$ .

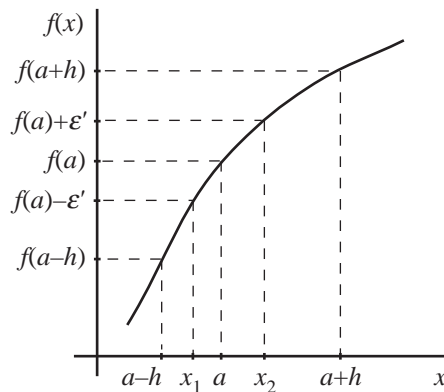


Figura 3.4: definición de  $x_1$  y  $x_2$  ( $\epsilon = \epsilon'$ )

Por ser  $f$  monótona creciente, existen  $x_1, x_2 \in (a - h, a + h) \subset J$  tales que  $x_1 < a < x_2$  y  $f(x_1) = f(a) - \epsilon'$ ,  $f(x_2) = f(a) + \epsilon'$  (veáse la fig. 3.4). Se

cumple entonces

$$\begin{aligned} x_1 < x < x_2 \implies f(a) - \epsilon \leq f(a) - \epsilon' = f(x_1) < f(x) \\ < f(x_2) = f(a) + \epsilon' \leq f(a) + \epsilon. \end{aligned}$$

La definición de continuidad se cumple, por tanto, tomando  $\delta = \min(a - x_1, x_2 - a) > 0$ . Q.E.D.

**Teorema 3.25.** *Si  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  es continua en  $J$ , entonces  $f$  es inyectiva en  $J$  si y sólo si  $f$  es estrictamente monótona en  $J$ .*

*Demostración.* Basta probar que si  $f$  es continua e inyectiva en el intervalo  $J$  entonces  $f$  es estrictamente monótona en  $J$ . Supongamos que no lo fuera; entonces (al ser  $f$  inyectiva) existirían tres puntos  $x < y < z$  en el intervalo  $J$  tales que  $f(x) < f(y)$  y  $f(y) > f(z)$ , ó  $f(x) > f(y)$  y  $f(y) < f(z)$ . Veamos, por ejemplo, que no se puede dar la primera de estas dos posibilidades (la segunda se trata exactamente igual, ó simplemente se aplica lo que veremos a continuación a la función  $-f$ ). En efecto,  $[x, y] \subset J$  e  $[y, z] \subset J$  al ser  $J$  un intervalo, y al ser  $f$  continua en  $J$  también lo será en  $[x, y]$  y en  $[y, z]$ . Si  $f(z) > f(x)$ , aplicando el teorema de los valores intermedios a  $f$  en el intervalo  $[x, y]$ , deducimos que existe  $t \in (x, y)$  tal que  $f(t) = f(z)$ . Pero esto contradice claramente la inyectividad de  $f$  en  $J$ , ya que  $t < y < z$  implica que  $t \neq z$ . Análogamente, si  $f(z) < f(x)$  entonces el teorema de los valores intermedios aplicado a  $f$  en el intervalo  $[y, z]$  proporciona la existencia de  $u \in (y, z)$  tal que  $f(u) = f(x)$ . Esto es, de nuevo, contradictorio, ya que  $x < y < u$  implica que  $x \neq u$ . Q.E.D.

**Teorema 3.26.** *Si  $f : J \rightarrow f(J)$  es inyectiva y continua en un intervalo  $J$ , entonces  $f^{-1}$  es continua en  $f(J)$ .*

*Demostración.* Al ser  $f$  inyectiva y ser por construcción  $\text{im } f = f(J)$ ,  $f$  es biyectiva en  $J$ , y por tanto existe  $f^{-1} : f(J) \rightarrow J$ . Por el teorema anterior,  $f$  es estrictamente monótona, y por el Teorema 3.23  $f(J)$  es un intervalo. Por tanto,  $f^{-1}$  es una función estrictamente monótona en el intervalo  $f(J)$ , y  $f^{-1}(f(J)) = J$  es un intervalo. Por el Teorema 3.24,  $f^{-1}$  es continua en  $f(J)$ . Q.E.D.

**Ejemplo 3.27.** Las funciones trigonométricas inversas son continuas en sus dominios. En efecto, la continuidad de arccos, arccot, arcsen y arctan se deduce aplicando el teorema anterior a cos, cot, sen y tan restringidas a los intervalos  $[0, \pi]$ ,  $(0, \pi)$ ,  $[-\pi/2, \pi/2]$  y  $(-\pi/2, \pi/2)$ , respectivamente. En cuanto a arcsec y arccsc, su continuidad se deduce de las identidades

$$\text{arcsec } x = \arccos \frac{1}{x}, \quad \text{arccsc } x = \arcsen \frac{1}{x}, \quad \forall x \in \mathbf{R} - (-1, 1).$$

**Ejemplo 3.28.** Si  $a > 0$ , la función  $f : \mathbf{R} \rightarrow (0, \infty)$  definida por

$$f(x) = a^x, \quad \forall x \in \mathbf{R},$$

es continua en todo  $\mathbf{R}$ . En efecto,  $f = (\log_a)^{-1}$ , siendo  $\log_a : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$  continua (y, por supuesto, inyectiva) en el *intervalo*  $(0, \infty)$ . De esto se deduce también la continuidad en todos los puntos de su dominio de la función  $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$  definida por

$$g(x) = x^\alpha,$$

siendo  $\alpha \in \mathbf{R}$  un número fijo. En efecto,  $g = f \circ (\alpha \log_a)$  es composición de funciones continuas.

*Ejercicio.*

- I) Probar que si  $\alpha = p/q$  es un número racional con  $p \in \mathbf{Z}$  y  $q \in \mathbf{N}$  primos entre sí, y  $q$  es impar, entonces la función  $g(x) = x^\alpha$  es continua en  $(-\infty, 0)$ .
- II) Demostrar que si  $\alpha > 0$  es de la forma anterior entonces  $g$  es continua en 0, y si  $\alpha < 0$  es un número real cualquiera  $g$  es continua por la derecha en 0.
- III) Finalmente, probar que si  $\alpha < 0$  se verifica

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = \infty,$$

y si  $\alpha = -p/q < 0$  con  $p, q \in \mathbf{N}$  primos entre sí y  $q$  impar entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x^\alpha = (-1)^p \infty.$$

*Solución.* Si  $\alpha = p/q \in \mathbf{Q}$  siendo  $p \in \mathbf{Z}$  y  $q \in \mathbf{N}$  primos entre sí, y  $q$  es impar, entonces

$$x^\alpha = (x^{1/q})^p = (-1)^p ((-x)^{1/q})^p = (-1)^p (-x)^\alpha.$$

Esto prueba la continuidad de  $g$  para  $x < 0$ . Si  $\alpha > 0$  es un número real arbitrario entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0,$$

ya que dado  $\epsilon > 0$  podemos conseguir que  $|x|^\alpha = x^\alpha < \epsilon$  sin más que tomar  $0 < x < \epsilon^{1/\alpha}$ . Si  $\alpha = p/q \in \mathbf{Q}$  con  $p, q \in \mathbf{N}$  primos entre sí y  $q$  impar entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x^\alpha = \lim_{t \rightarrow 0^+} (-t)^\alpha = \lim_{t \rightarrow 0^+} (-1)^p t^\alpha = (-1)^p \cdot 0 = 0.$$

Por tanto, en este caso

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = 0,$$

y  $g$  es continua en 0. Los dos últimos límites se deducen de los anteriores observando que si  $\alpha = -\beta < 0$  entonces  $x^\alpha = 1/x^\beta$ .  $\square$



## Capítulo 4

# Derivación

### 4.1. Definición

El concepto de derivada de una función  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  aparece de forma natural al estudiar la tangente a la gráfica de  $f$  en un punto. La tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $(a, f(a))$  está completamente determinada por su **pendiente**, que denotaremos por  $f'(a)$ ; en efecto, su ecuación es

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

¿Cómo se calcula  $f'(a)$ ? Geométricamente, podemos considerar la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $P = (a, f(a))$  como el límite de las rectas que pasan por  $P$  y un segundo punto  $Q \neq P$  sobre la gráfica cuando  $Q$  tiende a  $P$  (fig. 4.1). Si  $Q = (a + h, f(a + h))$ , la pendiente de la recta  $PQ$  es igual a

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{(a + h) - a} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

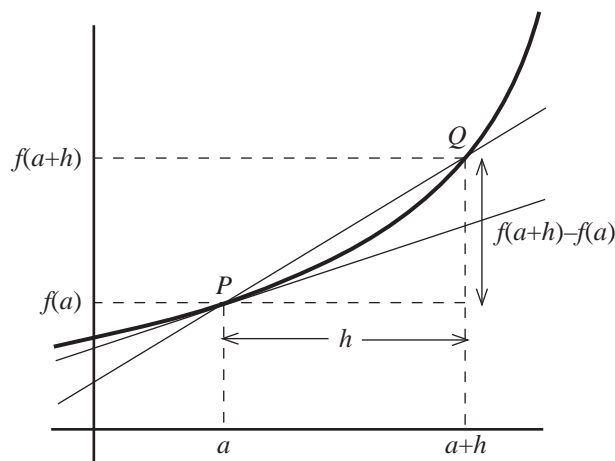


Figura 4.1: definición de derivada

El límite de este número cuando  $Q$  tiende a  $P$  (si es que dicho límite existe), es decir

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad (4.1)$$

debería ser igual a la pendiente de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en  $(a, f(a))$ . Estas consideraciones geométricas motivan la siguiente definición:

**Definición 4.1.** Una función  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  es **derivable** (ó **diferenciable**) en  $a$  si está definida en un intervalo de la forma  $(a - \delta, a + \delta)$  con  $\delta > 0$ , y existe el límite (4.1). Si  $f$  es derivable en  $a$ , el valor del límite (4.1) se denomina la **derivada** de  $f$  en  $a$  y se denota por  $f'(a)$ :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

- Si  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  es una función su **derivada** es la función  $f' : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  cuyo valor  $f'(a)$  en un punto  $a$  es la derivada de  $f$  en dicho punto. Naturalmente,

$$\text{dom } f' = \{x \in \text{dom } f : f \text{ es derivable en } x\} \subset \text{dom } f.$$

- A la cantidad

$$\Delta f(a; h) = f(a+h) - f(a)$$

se le llama **incremento** de  $f$  en  $a$ , mientras que el cociente

$$(f(a+h) - f(a))/h$$

se denomina **cociente incremental** de  $f$  en  $a$ .

- Si  $f(x) = cx + d$  (con  $c, d$  constantes arbitrarias) entonces  $f'(x) = c$  para todo  $x$  en  $\mathbf{R}$ . En particular, *las funciones constantes tienen derivada 0 en todo  $\mathbf{R}$* . En efecto,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c(x+h) + d - (cx + d)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} c = c. \end{aligned}$$

- Nótese que un requisito para que  $f$  sea derivable en  $a$  es que  $f$  esté definida en un intervalo *abierto* centrado en  $a$ . Por ejemplo, la función  $x \mapsto x^{\sqrt{2}}$  no es derivable en 0, ya que su dominio es  $[0, \infty)$ . Sin embargo, en este caso existe el límite lateral por la derecha del cociente incremental:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} h^{\sqrt{2}-1} = 0,$$

al que es natural llamar derivada por la derecha en 0.

**Definición 4.2.** La función  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  es **derivable** (ó **diferenciable**) **por la derecha** en  $a$  si está definida en un intervalo de la forma  $[a, a + \delta)$  con  $\delta > 0$ , y existe el límite lateral

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a+0).$$

Al número  $f'(a+0)$  se le llama **derivada lateral por la derecha** de  $f$  en  $a$ . Análogamente,  $f$  es derivable (ó diferenciable) **por la izquierda** en  $a$  si está definida en un intervalo de la forma  $(a - \delta, a]$  con  $\delta > 0$ , y existe el límite lateral

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a-0),$$

al que se denomina **derivada lateral por la izquierda** de  $f$  en  $a$ .

Es inmediato probar que  $f$  es derivable en  $a$  si y sólo si  $f$  es derivable a la vez por la izquierda y por la derecha en  $a$ , y ambas derivadas laterales coinciden. En tal caso

$$f'(a+0) = f'(a-0) = f'(a).$$

**Ejemplo 4.3.** La función  $f(x) = |x|$  no es derivable en 0 (véase la fig. 4.2). En efecto,

$$f'(0+0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h-0}{h} = 1, \quad f'(0-0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h-0}{h} = -1.$$

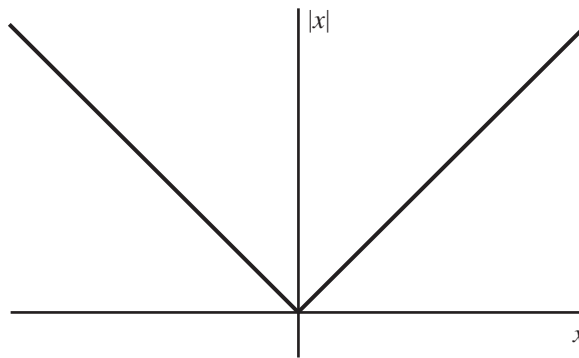


Figura 4.2: gráfica de  $f(x) = |x|$

**Ejemplo 4.4.** La función  $f(x) = \sqrt{x}$  ( $x \geq 0$ ) no puede ser derivable en 0, ya que no está definida en ningún intervalo abierto centrado en 0. Tampoco es derivable por la derecha en 0, ya que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = \infty.$$

Geométricamente, lo que ocurre es que la tangente a la gráfica de  $f$  en  $(0,0)$  es la recta vertical  $x = 0$  (cf. fig. 2.1).

Vemos, por tanto, que hay funciones continuas en un punto  $a$  que no son diferenciables en dicho punto. Sin embargo, probaremos a continuación que la derivabilidad de una función en un punto implica su continuidad. Esto es consecuencia directa del siguiente resultado, que es importante en sí mismo:

**Proposición 4.5.**  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  es derivable en  $a$  si y sólo si existen un número  $l \in \mathbf{R}$  y una función  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  definida un intervalo de la forma  $(-\delta, \delta)$  (con  $\delta > 0$ ) tales que

$$f(a+h) = f(a) + hl + hg(h), \quad \forall h \in (-\delta, \delta) \quad (4.2)$$

y

$$\lim_{h \rightarrow 0} g(h) = 0. \quad (4.3)$$

Si esto ocurre, se cumple además que  $l = f'(a)$ .

*Demostración.* Si  $f$  es diferenciable en  $a$ ,  $f$  está definida en un intervalo de la forma  $(a-\delta, a+\delta)$  con  $\delta > 0$ . Basta entonces definir  $g$  en  $(-\delta, \delta)$  mediante

$$g(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a), \quad h \in (-\delta, \delta), \quad h \neq 0$$

y (por ejemplo)  $g(0) = 0$ . Al ser  $f$  derivable en  $a$  se cumple

$$\lim_{h \rightarrow 0} g(h) = f'(a) - f'(a) = 0.$$

Nótese que, tal como hemos definido  $g(0)$ ,  $g$  es continua en 0.

Recíprocamente, si se cumple (4.2)–(4.3) entonces  $f$  está definida en  $(a-\delta, a+\delta)$ , y se tiene

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} [l + g(h)] = l + 0 = l.$$

Luego  $f$  es derivable en  $a$ , y  $f'(a) = l$ .

*Q.E.D.*

**Corolario 4.6.** Si  $f$  es derivable en  $a$ , entonces  $f$  es continua en  $a$ .

*Demostración.* En efecto, al estar  $f$  definida en un intervalo centrado en  $a$  dicho punto es punto de acumulación de  $\text{dom } f$ . Además, por la proposición anterior, para  $h \in (-\delta, \delta)$  se tiene

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = \lim_{h \rightarrow 0} [f(a) + hf'(a) + hg(h)] = f(a) + f'(a) \cdot 0 + 0 \cdot 0 = f(a).$$

*Q.E.D.*

## 4.2. Cálculo de derivadas

Las reglas fundamentales para el cálculo de derivadas se resumen en el siguiente teorema:

**Teorema 4.7.** *Si  $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  son derivables en  $a \in \mathbf{R}$  entonces  $f + g$  y  $fg$  son derivables en  $a$ , y se verifica*

$$\text{I) } (f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

$$\text{II) } (fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \quad (\text{regla de Leibniz})$$

*Si, además,  $g(a) \neq 0$  entonces  $f/g$  es derivable en  $a$ , y se cumple*

$$\text{III) } \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{g(a)f'(a) - f(a)g'(a)}{[g(a)]^2}.$$

*Demostración.* En primer lugar, nótese que al ser  $f$  y  $g$  derivables en  $a$  ambas están definidas en sendos intervalos abiertos centrados en  $a$ , y por tanto lo mismo ocurrirá para  $f + g$  y  $fg$ . Del mismo modo, si  $g(a) \neq 0$  entonces la continuidad de  $g$  en  $a$  implica además que  $g$  es distinta de cero en un intervalo abierto centrado en  $a$  (teorema de conservación del signo); por tanto,  $f/g$  también estará definida en un intervalo abierto centrado en  $a$ .

i)

$$\begin{aligned} (f + g)'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f + g)(a + h) - (f + g)(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) + g(a + h) - f(a) - g(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a + h) - g(a)}{h} \\ &= f'(a) + g'(a). \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} (fg)'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(fg)(a + h) - (fg)(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h)g(a + h) - f(a)g(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} g(a + h) \frac{f(a + h) - f(a)}{h} + f(a) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a + h) - g(a)}{h} \\ &= g(a) \cdot f'(a) + f(a) \cdot g'(a), \end{aligned}$$

al ser  $g$  continua en  $a$ .

iii) Es suficiente probar que

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{[g(a)]^2}, \quad (4.4)$$

ya que si esto se cumple la parte ii) implica

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = f'(a) \cdot \frac{1}{g(a)} + f(a) \left(-\frac{g'(a)}{[g(a)]^2}\right) = \frac{g(a)f'(a) - f(a)g'(a)}{[g(a)]^2}.$$

Para probar (4.4), nótese que

$$\begin{aligned} \frac{(1/g)(a+h) - (1/g)(a)}{h} &= \frac{1}{h} \left( \frac{1}{g(a+h)} - \frac{1}{g(a)} \right) \\ &= -\frac{1}{g(a)g(a+h)} \cdot \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} -\frac{g'(a)}{[g(a)]^2}, \end{aligned}$$

al ser  $g$  continua en  $a$  y  $g(a) \neq 0$ .

*Q.E.D.*

- Si  $c$  es una constante y  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  es una función derivable en  $a \in \mathbf{R}$ , de la parte ii) se sigue que  $cf$  es derivable en  $a$ , y se cumple

$$(cf)'(a) = cf'(a).$$

- Las partes i) y ii) del Teorema 4.7 admiten una generalización obvia:

$$\begin{aligned} (f_1 + \cdots + f_n)'(a) &= f_1'(a) + \cdots + f_n'(a), \\ (f_1 \cdots f_n)'(a) &= f_1'(a)f_2(a) \cdots f_n(a) + \cdots + f_1(a) \cdots f_{n-1}(a)f_n'(a). \end{aligned}$$

- Como las funciones constantes y la función identidad son derivables en todos los puntos (con derivadas 0 y 1, respectivamente), del teorema anterior se sigue que *los polinomios son derivables en todo  $\mathbf{R}$ , y las funciones racionales son derivables en todos los puntos de su dominio*. Para calcular la derivada de un polinomio cualquiera (y, por tanto, de una función racional arbitraria) necesitamos sólo saber calcular la derivada de la función  $f(x) = x^n$  para  $n \in \mathbf{N}$ . Es fácil probar por inducción (aplicando la parte ii) del Teorema 4.7) que

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad \forall x \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N} \quad (4.5)$$

(nótese el ligero abuso de notación). En notación de Leibniz, la fórmula anterior se escribiría como sigue:

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}.$$

De lo anterior se sigue que

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \implies f'(x) = \sum_{i=1}^n i a_i x^{i-1}.$$

Así, para todo  $n$  natural la derivada de un polinomio de grado  $n$  es un polinomio de grado  $n - 1$ . Aplicando la parte iii) del Teorema 4.7 se deduce que la derivada de una función racional es otra función racional, con el mismo dominio que la función de partida.

- La fórmula (4.5), junto con la regla de derivación de un cociente de funciones derivables, implica que si  $n = -m < 0$  con  $m \in \mathbf{N}$  se verifica

$$(x^n)' = (1/x^m)' = -(1/x^{2m}) \cdot mx^{m-1} = -mx^{-m-1} = nx^{n-1}, \quad \forall x \neq 0.$$

Por tanto, (4.5) es válida para todo  $n \in \mathbf{Z}$  (nótese que para  $n = 0$  se cumple trivialmente).

#### 4.2.1. Regla de la cadena

Otro de los resultados fundamentales que permite calcular la derivada de funciones complicadas a partir de las derivadas de funciones más sencillas es la siguiente fórmula para derivar la composición de dos funciones, conocida como regla de la cadena:

**Regla de la cadena.** Si  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  es derivable en  $a$  y  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  es derivable en  $g(a)$ , entonces  $f \circ g$  es derivable en  $a$ , y se verifica

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a).$$

*Demostración.* Por ser  $g$  derivable en  $a$ , existirá una función  $\epsilon : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  definida en un intervalo  $(-\delta_1, \delta_1)$  tal que  $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$ , y

$$g(a+h) = g(a) + h[g'(a) + \epsilon(h)], \quad \forall h \in (-\delta_1, \delta_1).$$

Como esta fórmula es válida cualquiera que sea el valor de  $\epsilon(0)$ , podemos definir  $\epsilon(0) = 0$ . Del mismo modo, por ser  $f$  derivable en  $g(a)$  se tiene

$$f(g(a) + k) = f(g(a)) + k[f'(g(a)) + \eta(k)], \quad \forall k \in (-\delta_2, \delta_2),$$

donde  $\eta(k)$  está definida para  $k \in (-\delta_2, \delta_2)$ , y  $\lim_{k \rightarrow 0} \eta(k) = 0$ . Como  $g$  es continua en  $a$  (al ser diferenciable en dicho punto), existe  $\delta \leq \delta_1$  tal que

$$h \in (-\delta, \delta) \subset (-\delta_1, \delta_1) \implies g(a+h) - g(a) \in (-\delta_2, \delta_2).$$

En particular, de lo anterior se deduce que  $f \circ g$  está definida en  $(a-\delta, a+\delta)$ . Además, si  $h \in (-\delta, \delta)$  y

$$k = g(a+h) - g(a) = h[g'(a) + \epsilon(h)]$$

se cumple

$$\begin{aligned} f(g(a+h)) &= f(g(a) + k) = f(g(a)) + k[f'(g(a)) + \eta(k)] \\ &= f(g(a)) + h[g'(a) + \epsilon(h)] [f'(g(a)) + \eta(k)]. \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{h \rightarrow 0} k = \lim_{h \rightarrow 0} h[g'(a) + \epsilon(h)] = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{k \rightarrow 0} \eta(k) = 0$$

se tiene

$$\frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h} = [g'(a) + \epsilon(h)] [f'(g(a)) + \eta(k)]$$

$$\xrightarrow{h \rightarrow 0} g'(a) f'(g(a)).$$

*Q.E.D.*

*Nota.* En notación de Leibniz, si  $y = g(x)$  y  $z = f(y)$  entonces  $z(x) = f(g(x))$  y

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}.$$

Nótese, sin embargo, que con esta notación no queda del todo claro que  $\frac{dz}{dy}$  está evaluada en  $y = g(x)$ , y que el miembro izquierdo denota la derivada de  $z$  expresada como función de  $x$  a través de  $y$  en el punto  $x$ .

**Ejemplo 4.8.** En este ejemplo calcularemos la derivada de las funciones trigonométricas. Veamos, en primer lugar, que  $\text{sen}' 0 = 1$  y  $\text{cos}' 0 = 0$ . En efecto,

$$\text{sen}' 0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } h}{h} = 1,$$

$$\text{cos}' 0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{cos } h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{2}{h} \text{sen}^2 \frac{h}{2} = \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{h}{2} \left( \frac{\text{sen}(h/2)}{h/2} \right)^2 = 0.$$

Para calcular la derivada de  $\text{sen}$  en un punto cualquiera  $x \in \mathbf{R}$ , si  $f(h) = \text{sen}(x+h)$  entonces  $f'(0) = \text{sen}' x \cdot 1 = \text{sen}' x$  por la regla de la cadena. Por otra parte,

$$f(h) = \text{sen } x \text{ cos } h + \text{cos } x \text{ sen } h,$$

de donde se sigue que

$$f'(0) = \text{sen } x \text{ cos}' 0 + \text{cos } x \text{ sen}' 0 = \text{sen } x \cdot 0 + \text{cos } x \cdot 1 = \text{cos } x.$$

Por tanto, hemos demostrado que

$$\text{sen}' = \text{cos}.$$

Como  $\text{cos } x = \text{sen} \left( \frac{\pi}{2} - x \right)$ , aplicando la regla de la cadena obtenemos

$$\text{cos}' x = \text{cos} \left( \frac{\pi}{2} - x \right) (-1) = -\text{sen } x, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Las derivadas de las demás funciones trigonométricas se calculan aplicando el Teorema 4.7. Por ejemplo,

$$\text{tan}' x = \frac{\text{cos } x \cdot \text{cos } x - \text{sen } x \cdot (-\text{sen } x)}{\text{cos}^2 x} = \text{sec}^2 x.$$



**Ejemplo 4.9.** Discutiremos en este ejemplo la derivada de la función logaritmo. Para ello, vamos a admitir sin demostración que existe el límite siguiente:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in \mathbf{N}}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

donde  $e = 2,718281828459\dots$  (La demostración de esta afirmación se dará en el capítulo sobre sucesiones y series.) De esto se deduce que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad (4.6)$$

En efecto, si  $n = [x] \geq 1$  se tiene

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Tanto el miembro izquierdo como el derecho de estas desigualdades tiende a  $e$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , ya que

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}}, \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

De esto se sigue fácilmente nuestra afirmación. También se cumple que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad (4.7)$$

ya que si  $t = -x > 0$  entonces

$$\left(1 - \frac{1}{t}\right)^{-t} = \left(\frac{t}{t-1}\right)^t = \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^{t-1} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right).$$

En particular, de (4.6) y (4.7) se sigue que

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{1/h} = e.$$

A partir de ahora, escribiremos

$$\log_e = \log.$$

(Otros autores utilizan la notación  $\ln$  en lugar de  $\log$  para el logaritmo en base  $e$ , al que denominan **logaritmo neperiano**.)

Calculemos, en primer lugar

$$\log' 1 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(1+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \log \left[ (1+h)^{1/h} \right]$$

Como  $\log$  es continua en su dominio, el límite anterior es igual a

$$\log \left[ \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{1/h} \right] = \log e = 1.$$

Por tanto,

$$\log' 1 = 1.$$

(La justificación formal del cálculo del límite anterior es la siguiente. Supongamos que  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  es una función continua en  $l$ , y que  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$ , siendo  $\text{im } g \subset \text{dom } f$ . Si definimos  $g(a) = l$  (lo cual no cambia el valor de  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ ), la función  $g$  es continua en  $a$ , y por tanto (Teorema 3.17)  $f \circ g$  es continua en  $a$ . En consecuencia,  $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(g(a)) = f(l)$ . Este argumento se suele resumir escribiendo que si  $f$  es continua entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f \left( \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right).$$

En el límite calculado anteriormente,  $f = \log$  y  $g(h) = (1+h)^{1/h}$ .

Para calcular  $\log' x$  para cualquier  $x > 0$ , nótese que si  $f(h) = \log(x+h)$

$$\log' x = f'(0).$$

Aplicando la regla de la cadena se obtiene

$$f(h) = \log x + \log \left( 1 + \frac{h}{x} \right) \implies f'(0) = \log' 1 \cdot \frac{d}{dh} \left( 1 + \frac{h}{x} \right) \Big|_{h=0} = 1 \cdot \frac{1}{x}.$$

Por tanto, hemos probado que

$$\log' x = \frac{1}{x}, \quad \forall x > 0.$$

Por último, al ser  $\log_a x = \log x / \log a$  se tiene

$$\log'_a x = \frac{1}{x \log a} = \frac{\log_a e}{x}, \quad \forall x > 0, \forall a > 0.$$

*Ejercicio.* Probar que si  $f(x) = \log |x|$  entonces  $f'(x) = 1/x$  para todo  $x \neq 0$ .

#### 4.2.2. Derivadas de orden superior

Si  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  es diferenciable en todos los puntos de un intervalo  $(a-h, a+h)$  ( $h > 0$ ) centrado en un punto  $a$ , la función  $f'$  está definida en  $(a-h, a+h)$ . Si  $f'$  es diferenciable en  $a$ , a la derivada  $(f')'(a)$  de  $f'$  en  $a$  se la denomina **derivada segunda** de  $f$  en  $a$ , y se la denota por  $f''(a)$ . Si  $f''(a)$  existe, se dice que  $f$  es dos veces derivable en  $a$ . En general,  $f'' : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  es una función definida en todos los puntos en que  $f'$  sea derivable.

Análogamente, la **derivada  $n$ -ésima** de  $f$  en  $a$  se define recursivamente por la fórmula

$$f^{(n)}(a) = (f^{(n-1)})'(a), \quad n \in \mathbf{N},$$

donde se ha utilizado la notación

$$f^{(0)} = f.$$

Nótese que

$$\text{dom } f^{(n)} \subset \text{dom } f^{(n-1)} \subset \dots \subset \text{dom } f' \subset \text{dom } f.$$

De las reglas para el cálculo de derivadas vistas en la Sección 4.2 se deducen reglas análogas para el cálculo de derivadas de orden superior. Así, por ejemplo, si  $f$  y  $g$  son funciones derivables  $n$  veces en  $a \in \mathbf{R}$  y  $c \in \mathbf{R}$  es una constante entonces se verifica:

$$\text{I) } (f + g)^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) + g^{(n)}(a)$$

$$\text{II) } (cf)^{(n)}(a) = c f^{(n)}(a)$$

$$\text{III) } (fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(a)g^{(n-k)}(a)$$

Esta última fórmula, que generaliza la regla de Leibniz, se demuestra fácilmente por inducción sobre  $n$ .

- Si  $f$  es un polinomio entonces  $f'$  es otro polinomio, y por tanto es una función derivable en todo  $\mathbf{R}$ . De esto se sigue (por inducción) que  $f$  es derivable un número arbitrario de veces en todo  $\mathbf{R}$ , siendo  $f^{(k)} = 0$  si  $k$  es mayor que el grado de  $f$ . Del mismo modo, si  $f$  es una función racional entonces  $f$  es derivable infinitas veces (es decir, existe  $f^{(n)}$  para todo  $n \in \mathbf{N}$ ) en su dominio, siendo  $f^{(n)}$  una función racional.
- Las funciones trigonométricas  $\text{sen}$  y  $\text{cos}$  son también infinitamente derivables en todo  $\mathbf{R}$ , ya que  $\text{sen}' = \text{cos}$  y  $\text{cos}' = -\text{sen}$ . De esto se sigue que las funciones  $\text{sec}$ ,  $\text{cosec}$ ,  $\text{tan}$  y  $\text{cot}$ , que son funciones racionales en  $\text{sen}$  y  $\text{cos}$ , son infinitamente derivables en todos los puntos de su dominio.
- Hemos visto en la sección anterior que  $\log' x = 1/x$ , para todo  $x > 0$ . De la parte iii) del Teorema 4.7 se sigue que  $\log$  es infinitamente derivable en  $(0, \infty)$ . Por ejemplo,

$$\log'' x = -\frac{1}{x^2}, \quad x > 0.$$

Por inducción se demuestra que

$$\log^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} (n-1)! x^{-n}, \quad \forall x > 0.$$

De esto se deduce que

$$\log_a^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{\log a} (n-1)! x^{-n}, \quad \forall x > 0, \forall a > 0.$$

### 4.2.3. Derivada de la función inversa

Sea  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  una función invertible y derivable en un punto  $a \in \mathbf{R}$ . Como

$$f^{-1} \circ f = I,$$

si  $f^{-1}$  fuera derivable en  $f(a)$  aplicando la regla de la cadena se obtendría

$$(f^{-1})'(f(a))f'(a) = 1,$$

o bien, llamando  $b = f(a)$ :

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}. \quad (4.8)$$

El problema con este argumento es que no hemos probado todavía que  $f^{-1}$  sea derivable en  $f(a)$  si  $f$  es derivable en  $a$ , cosa que haremos a continuación. Nótese, sin embargo, que el razonamiento anterior prueba rigurosamente que si  $f'(a) = 0$  entonces  $f^{-1}$  *no* es derivable en  $f(a)$ . En otras palabras, una condición *necesaria* para que  $f^{-1}$  sea derivable en  $f(a)$  es que  $f'(a) \neq 0$ . El teorema siguiente demuestra esencialmente que dicha condición es también *suficiente*:

**Teorema 4.10.** *Sea  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  una función continua e inyectiva en un intervalo abierto  $J$  centrado en  $a$ . Si  $f$  es derivable en  $a$  y  $f'(a) \neq 0$ , entonces  $f^{-1} : f(J) \rightarrow J$  es derivable en  $b = f(a)$ , y se cumple (4.8).*

*Demostración.* En primer lugar,  $f$  ha de ser continua e inyectiva en un intervalo cerrado de la forma  $[a - \delta, a + \delta] \subset J$  con  $\delta > 0$ . Por los teoremas vistos en la Sección 3.4,  $f$  es estrictamente monótona en  $[a - \delta, a + \delta]$  y  $f([a - \delta, a + \delta])$  es un intervalo. Es fácil convencerse de que esto implica que  $f([a - \delta, a + \delta]) = [c, d]$ , siendo  $c < b < d$  (si  $f$  es creciente  $c = f(a - \delta)$  y  $d = f(a + \delta)$ , y si es decreciente  $c = f(a + \delta)$  y  $d = f(a - \delta)$ ). En particular,  $f^{-1}$  está definida en un intervalo abierto  $(b - \epsilon, b + \epsilon) \subset [c, d]$  (cf. fig. 4.3).

Por definición,

$$(f^{-1})'(b) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(b+k) - f^{-1}(b)}{k}.$$

Al ser  $f$  invertible en  $[a - \delta, a + \delta]$ , para cada  $k \in (-\epsilon, \epsilon)$  existe un  $h \in (-\delta, \delta)$  (que, obviamente, dependerá de  $k$ ) tal que

$$b+k = f(a+h) \quad (4.9)$$

(véase la fig. 4.3). En términos de este  $h$  se tiene

$$\frac{f^{-1}(b+k) - f^{-1}(b)}{k} = \frac{(a+h) - a}{f(a+h) - b} = \frac{h}{f(a+h) - f(a)}.$$

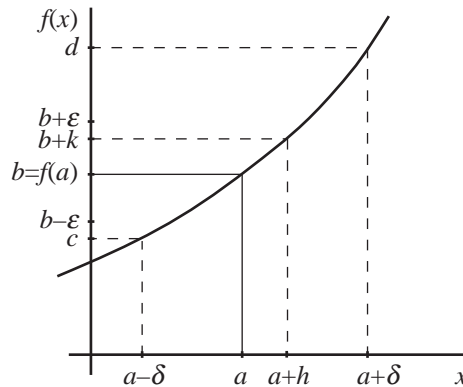


Figura 4.3: derivabilidad de la función inversa

Nótese que el denominador de esta última fracción no se anula si  $k \neq 0$ , al ser  $f$  inyectiva. Por otra parte, despejando  $h$  en (4.9) se obtiene

$$h = f^{-1}(b + k) - a = f^{-1}(b + k) - f^{-1}(b).$$

Como  $f^{-1}$  es continua en  $b$  (al ser  $f$  continua),  $h$  tiende a cero cuando  $k$  tiende a cero. Teniendo en cuenta que, por hipótesis,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(a) \neq 0$$

y aplicando el teorema sobre el cociente de dos límites se obtiene el resultado anunciado. Q.E.D.

**Ejemplo 4.11.** En este ejemplo estudiaremos la derivabilidad de las funciones trigonométricas inversas. Comencemos, en primer lugar, con  $\text{arc sen} : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ . Como  $\text{sen}' y = \cos y$  no se anula si  $y \in (-\pi/2, \pi/2)$ , concluimos que  $\text{arc sen}$  es derivable en  $(-1, 1)$ , y aplicando (4.8) se obtiene

$$\text{arc sen}' x = \frac{1}{\cos(\text{arc sen } x)}, \quad -1 < x < 1.$$

Si  $\text{arc sen } x = y \in (-\pi/2, \pi/2)$  entonces  $x = \text{sen } y$ , y por tanto

$$\cos(\text{arc sen } x) = \cos y = \sqrt{1 - \text{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2},$$

ya que  $\cos y > 0$  si  $y \in (-\pi/2, \pi/2)$ . En definitiva,

$$\text{arc sen}' x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

Por otra parte,  $\text{arc sen}$  no es derivable (por la derecha ó por la izquierda) en  $\pm 1$ , ya que  $\text{sen}' = \cos$  se anula en  $\pm \pi/2$ . Geométricamente, la gráfica de  $\text{arc sen}$  tiene tangente vertical en los puntos  $\pm(1, \pi/2)$ .

Para calcular la derivada de arc cos, podemos utilizar un razonamiento similar, ó bien aplicar la identidad

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

De cualquiera de estas dos formas se obtiene

$$\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

De nuevo, no existe  $\arccos'(\pm 1 \mp 0)$ , lo cuál se refleja geoméricamente en que la tangente a la gráfica de arc cos es vertical en los puntos  $(-1, \pi)$  y  $(1, 0)$ .

Consideremos, a continuación, la derivada de arctan :  $\mathbf{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ . Como  $\tan' y = \sec^2 y \neq 0$  para todo  $y \in (-\pi/2, \pi/2)$ , arctan es derivable en todo  $\mathbf{R}$ . Utilizando la fórmula de la derivada de la función inversa se obtiene

$$\arctan' x = \frac{1}{\sec^2(\arctan x)}.$$

Si  $\arctan x = y \in (-\pi/2, \pi/2)$  entonces  $x = \tan y$ , y

$$\sec^2(\arctan x) = \sec^2 y = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2.$$

Por tanto,

$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

*Ejercicio.* Calcúlense las derivadas de las demás funciones trigonométricas inversas.

*Solución.*

$$\begin{aligned} \operatorname{arccot}' x &= -\frac{1}{1+x^2}, & \forall x \in \mathbf{R}; \\ \operatorname{arcsec}' x &= \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, & \forall |x| > 1; \\ \operatorname{arccsc}' x &= -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, & \forall |x| > 1. \end{aligned}$$

□

Nótese que de lo anterior se deduce que las funciones trigonométricas inversas son infinitamente diferenciables en todos los puntos *interiores* a sus dominios de definición.

**Ejemplo 4.12.** Calculemos la derivada de la **función exponencial**  $\exp : \mathbf{R} \rightarrow (0, \infty)$ , definida por  $\exp x = e^x$ . Como  $\exp = (\log)^{-1}$  y  $\log' y = 1/y$  no se anula para ningún  $y > 0$ , aplicando de nuevo el Teorema 4.10 obtenemos:

$$\exp' x = \frac{1}{(1/\exp x)} = \exp x, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

De esto se deduce inmediatamente que  $\exp$  es infinitamente derivable en todo  $\mathbf{R}$ , y además

$$\exp^{(n)} x = \exp x, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Si  $f(x) = a^x$  ( $a > 0$ ), como  $f(x) = e^{x \log a}$  la regla de la cadena proporciona

$$f'(x) = e^{x \log a} \cdot \log a = \log a \cdot a^x, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

De nuevo,  $f$  es infinitamente derivable en todo  $\mathbf{R}$ , y

$$f^{(n)}(x) = (\log a)^n \cdot a^x, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

**Ejemplo 4.13.** Consideremos ahora la función  $f(x) = x^c$ , definida para  $x > 0$ . Al ser  $f(x) = e^{c \log x}$ , la regla de la cadena proporciona

$$f'(x) = e^{c \log x} \cdot \frac{c}{x} = x^c \cdot \frac{c}{x} = c x^{c-1}, \quad \forall x > 0.$$

Si  $c$  es un número racional para el cual  $x^c$  está definido para  $x < 0$  entonces la fórmula anterior es válida también si  $x < 0$ . En efecto, si  $c = p/q$  con  $p \in \mathbf{Z}$  y  $q \in \mathbf{N}$  impar, entonces

$$f(x) = x^c = (-1)^c (-x)^c.$$

Si  $x < 0$ , aplicando la regla de la cadena y el resultado anterior (ya que  $-x > 0$ ) se obtiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= -(-1)^c c (-x)^{c-1} = (-1)^{c+1} c (-x)^{c-1} \\ &= (-1)^{c-1} c (-x)^{c-1} = c x^{c-1}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Si  $c > 1$  es arbitrario, entonces  $f'(0+0) = 0$ , ya que

$$f'(0+0) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h^c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} h^{c-1} = 0.$$

Si  $c = p/q > 1$  con  $p, q \in \mathbf{N}$  y  $q$  impar entonces

$$f'(0-0) = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{h^c}{h} = \lim_{t \rightarrow 0+} (-t)^{c-1} = \lim_{t \rightarrow 0+} (-1)^{c-1} t^{c-1} = 0.$$

Por tanto, en este caso  $f$  es derivable en 0 y  $f'(0) = 0$ .

Si  $c = 1$ ,  $f = I$  es derivable en todo  $\mathbf{R}$  y  $f' = 1$ , por lo que (4.10) se cumple para todo  $x \in \mathbf{R}$  (interpretando  $0^0$  como 1 si  $x = 0$ ). Por último, si  $c < 1$  entonces no existe ni siquiera  $f'(0+0)$ , ya que en este caso

$$f'(0+0) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h^c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} h^{c-1} = \infty.$$

### 4.3. Teoremas de Rolle y del valor medio

En esta sección demostraremos algunos teoremas fundamentales para profundizar en el significado del concepto de derivada.

#### 4.3.1. Crecimiento, decrecimiento y extremos locales

En primer lugar, probaremos un resultado que relaciona el crecimiento ó decrecimiento de una función derivable con el signo de su derivada:

**Proposición 4.14.** *Sea  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  derivable en  $a \in \mathbf{R}$ . Si  $f$  es monótona no decreciente (resp. no creciente) en algún intervalo abierto centrado en  $a$  entonces  $f'(a) \geq 0$  (resp.  $f'(a) \leq 0$ ). Recíprocamente, si  $f'(a) > 0$  (resp.  $f'(a) < 0$ ) entonces existe  $\delta > 0$  tal que si  $x, y \in (a - \delta, a + \delta)$  entonces*

$$x < a < y \implies f(x) < f(a) < f(y)$$

$$\text{(resp. } x < a < y \implies f(x) > f(a) > f(y)\text{)}.$$

*Nota.* Obsérvese que esta última afirmación no implica que  $f$  sea monótona creciente (resp. decreciente) en  $(a - \delta, a + \delta)$ ; por ejemplo (véase Spivak, problema 11.63), considérese la función definida por  $f(0) = 0$  y  $f(x) = \frac{1}{2}x + x^2 \sin(1/x)$  para  $x \neq 0$ . Tampoco se puede afirmar que si  $f$  es monótona creciente (resp. decreciente) en un intervalo abierto centrado en  $a$  entonces  $f'(a) > 0$  (resp.  $f'(a) < 0$ ); en efecto, basta considerar la función dada por  $f(x) = x^3$  en el origen.

*Demostración.* En primer lugar, basta considerar el caso en que  $f$  es monótona no decreciente ó  $f'(a) > 0$ , ya que los otros casos se deducen aplicando estos dos a la función  $-f$ . Supongamos, para empezar, que  $f$  es monótona no decreciente en un intervalo de la forma  $(a - \delta, a + \delta)$  con  $\delta > 0$ . Entonces el cociente incremental es claramente no negativo para todo  $h \in (-\delta, \delta) - \{0\}$ :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geq 0, \quad \forall h \in (-\delta, \delta), h \neq 0.$$

Por el principio de conservación del signo, esto implica que el límite del cociente incremental cuando  $h \rightarrow 0$ , es decir  $f'(a)$ , no puede ser negativo.

Supongamos ahora que  $f'(a) > 0$ . De nuevo por el principio de conservación del signo, existe un  $\delta > 0$  tal que

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} > 0, \quad \forall h \in (-\delta, \delta), h \neq 0.$$

Esto implica nuestra afirmación, ya que si  $x = a - h_1$ ,  $y = a + h_2$  con  $0 < h_i < \delta$  ( $i = 1, 2$ ) entonces

$$f(a) - f(x) = h_1 \cdot \frac{f(a - h_1) - f(a)}{-h_1} > 0,$$

$$f(y) - f(a) = h_2 \cdot \frac{f(a + h_2) - f(a)}{h_2} > 0.$$



Q.E.D.

El resultado anterior se puede utilizar para hallar los extremos locales de una función derivable.

**Definición 4.15.** Sea  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  una función, y sea  $A \subset \mathbf{R}$ . Un punto  $a \in A$  es un **máximo de  $f$  en  $A$**  si

$$f(x) \leq f(a), \quad \forall x \in \text{dom } f \cap A.$$

Análogamente,  $a \in A$  es un **mínimo de  $f$  en  $A$**  si es un máximo de  $-f$  en  $A$ , es decir si

$$f(x) \geq f(a), \quad \forall x \in \text{dom } f \cap A.$$

Se dice que  $a \in A$  es un **extremo de  $f$  en  $A$**  si  $a$  es un máximo ó un mínimo de  $f$  en  $A$ . Por último,  $a \in \mathbf{R}$  es un **extremo (máximo, mínimo) local de  $f$  en  $A$**  si existe  $\delta > 0$  tal que  $a$  es un extremo (máximo, mínimo) de  $f$  en  $A \cap (a - \delta, a + \delta)$ .

*Nota.* Cuando se habla de alguno de los tipos anteriores de extremo sin mencionar el conjunto  $A$ , se sobreentiende que  $A = \mathbf{R}$ . Así, por ejemplo,  $a$  es un **extremo local** de  $f$  si existe  $\delta > 0$  tal que  $a$  es un extremo de  $f$  en  $(a - \delta, a + \delta)$ .

**Teorema 4.16.** Sea  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  una función derivable en  $a \in \mathbf{R}$ . Si  $a$  es un extremo local de  $f$ , entonces  $f'(a) = 0$ .

*Demostración.* La demostración es una consecuencia inmediata de la proposición anterior. Por ejemplo, si  $f'(a) > 0$  entonces existe  $h > 0$  tal que

$$x, y \in (a - h, a + h), \quad x < a < y \implies f(x) < f(a) < f(y),$$

lo cual es incompatible con que  $a$  sea un máximo ó un mínimo de  $f$  en ningún intervalo de la forma  $(a - \delta, a + \delta)$ . Q.E.D.

El resultado anterior proporciona un método muy poderoso para identificar los puntos en que  $f$  puede tener un extremo local. Es muy importante notar, sin embargo, que la condición  $f'(a) = 0$  es *necesaria* pero no *suficiente* para que  $f$  tenga un extremo relativo en  $a$ . Por ejemplo, si  $f(x) = x^3$  entonces  $f'(0) = 0$ , pero  $f$  no tiene un extremo local en el origen ( $f$  es una función monótona creciente).

**Definición 4.17.** Un **punto crítico** de una función  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  es un punto  $a \in \mathbf{R}$  tal que  $f'(a) = 0$ .

**Proposición 4.18.** Si  $a$  es un extremo de  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  en un intervalo  $[c, d]$  (con  $c < d$ ), entonces ó bien  $a$  es uno de los extremos del intervalo, ó bien  $a \in (c, d)$  y  $f$  no es derivable en  $a$ , ó bien  $a \in (c, d)$  es un punto crítico de  $f$ .

*Demostración.* Si  $a$  es un extremo de  $f$  en  $[c, d]$  y  $a$  no es uno de los extremos de dicho intervalo, entonces  $a$  es también un extremo local de  $f$ . Por el teorema anterior, si  $f$  es derivable en  $a$  entonces  $f'(a) = 0$ . *Q.E.D.*

**Ejemplo 4.19.** Hallemos los extremos de la función  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  dada por  $f(x) = x^4 - 2x^2$  en el intervalo  $[0, 2]$ . En primer lugar, nótese que, al ser  $f$  continua en el intervalo  $[0, 2]$ ,  $f$  ha de alcanzar un máximo y un mínimo en dicho intervalo. Como  $f$  es derivable en todo  $\mathbf{R}$  (es un polinomio), los extremos de  $f$  en  $[0, 2]$  pertenecen al conjunto formado por los extremos del intervalo y los puntos críticos de  $f$  en  $(0, 2)$ . Estos últimos puntos se calculan muy fácilmente:

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 0 \iff x = 0, \pm 1.$$

Por tanto, los extremos de  $f$  en  $[0, 2]$  están en el conjunto  $\{0, 1, 2\}$ . Para hallar los extremos de  $f$  en  $[0, 2]$  (cuya existencia está garantizada por ser  $f$  continua en este intervalo compacto), basta evaluar  $f$  en estos tres puntos, obteniéndose

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1 - 2 = -1, \quad f(2) = 16 - 8 = 8.$$

Por tanto,  $f$  tiene un mínimo en  $[0, 2]$  en el punto 1 y un máximo en el punto 2. Puede probarse (veremos más adelante un método muy sencillo para hacerlo) que 0 es un máximo local de  $f$  en  $[0, 2]$  (véase la fig. 4.4).

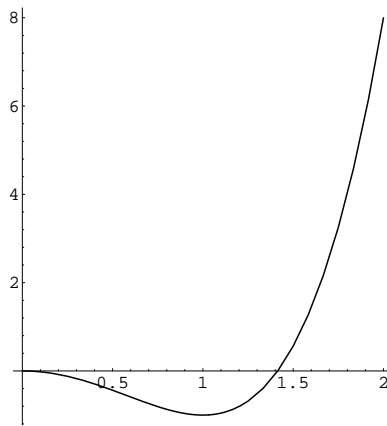


Figura 4.4: extremos de  $f(x) = x^4 - 2x^2$  en el intervalo  $[0, 2]$

### 4.3.2. Teorema de Rolle

Una consecuencia inmediata de la Proposición 4.14 es el siguiente teorema, cuya validez es intuitivamente muy clara (véase la fig. 4.5):

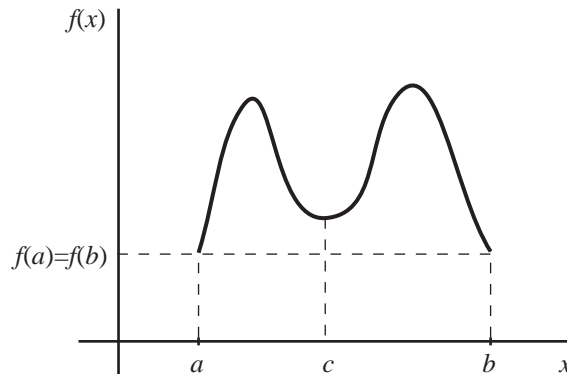


Figura 4.5: teorema de Rolle

**Teorema de Rolle.** Sea  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ . Si  $f(a) = f(b)$ , entonces existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ .

*Demostración.* Al ser  $f$  continua en  $[a, b]$ ,  $f$  ha de tener un mínimo  $x_1$  y un máximo  $x_2$  en  $[a, b]$  (por supuesto, esto no excluye que  $f$  pueda alcanzar un máximo ó un mínimo en varios puntos de  $[a, b]$ ). Como  $f$  es derivable en  $(a, b)$ , la Proposición 4.18 implica que ó bien  $x_i$  coincide con uno de los extremos del intervalo ó bien  $x_i \in (a, b)$  y  $f'(x_i) = 0$  ( $i = 1, 2$ ). Por tanto, si  $x_i \in (a, b)$  para algún  $i = 1, 2$  podemos tomar  $c = x_i$ . Si tanto  $x_1$  como  $x_2$  coinciden ambos con alguno de los extremos del intervalo  $[a, b]$ , entonces  $f(x_1) = f(x_2)$  (al ser  $f(a) = f(b)$  por hipótesis), y por tanto  $f$  es constante en  $[a, b]$ . Pero en tal caso  $f'(x) = 0$  para todo  $x \in (a, b)$ , y por tanto podemos tomar  $c$  igual a cualquier punto de  $(a, b)$ . *Q.E.D.*

*Nota.* La continuidad de  $f$  en  $(a, b)$  es consecuencia de su derivabilidad en dicho intervalo abierto. Por tanto, para aplicar el teorema de Rolle basta comprobar que  $f$  es derivable en  $(a, b)$ , es continua por la derecha en  $a$  y por la izquierda en  $b$ , y cumple la condición  $f(a) = f(b)$ . La continuidad de  $f$  por la derecha en  $a$  ó por la izquierda en  $b$  se demuestra a menudo probando que  $f$  es derivable por la derecha en  $a$  ó por la izquierda en  $b$ , aunque por supuesto estas dos condiciones no son necesarias para poder aplicar el teorema de Rolle.

### 4.3.3. Teorema del valor medio

El teorema de Rolle implica el siguiente teorema del valor medio, demostrado rigurosamente por primera vez por Augustin-Louis Cauchy en 1821:

**Teorema del valor medio de Cauchy.** Sean  $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  dos funciones continuas en  $[a, b]$  y diferenciables en  $(a, b)$ . Si  $g'$  no se anula en ningún

punto de  $(a, b)$ , entonces existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad (4.11)$$

*Demostración.* En primer lugar, nótese que  $g(b) - g(a) \neq 0$ , ya que en caso contrario el teorema de Rolle implicaría que  $g'$  se anula en algún punto de  $(a, b)$ . Para probar el teorema, intentamos aplicar el teorema de Rolle a una combinación lineal apropiada  $h = f + \lambda g$  de  $f$  y  $g$ . Cualquiera que sea la constante  $\lambda \in \mathbf{R}$ , la función  $h$  es claramente continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ . Basta entonces escoger  $\lambda$  de forma que

$$h(a) = f(a) + \lambda g(a) = h(b) = f(b) + \lambda g(b).$$

Como  $g(a) - g(b) \neq 0$ , la ecuación anterior se cumple para

$$\lambda = -\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Aplicando el teorema de Rolle a  $h$  obtenemos entonces que existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$0 = h'(c) = f'(c) + \lambda g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c).$$

Como  $g'(c) \neq 0$  por hipótesis, esta última igualdad es equivalente a (4.11).  
Q.E.D.

El teorema del valor medio de Cauchy tiene multitud de corolarios importantes. Uno de ellos es la siguiente versión del teorema del valor medio, enunciado por primera vez por Lagrange en 1798 y llamado a veces **teorema de los incrementos finitos**:

**Teorema del valor medio.** Si  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  es continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ , entonces existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b - a).$$

*Demostración.* Basta aplicar el teorema del valor medio de Cauchy a  $f$  y  $g = I$ , ya que  $g'(x) = 1$  no se anula en ningún punto. Q.E.D.

El teorema anterior recibe el nombre de teorema de los incrementos finitos porque afirma que el cociente incremental  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$  es exactamente igual a la derivada de  $f$  en algún punto intermedio entre  $a$  y  $b$ . Geométricamente, esto significa que la secante a la gráfica de  $f$  que une  $(a, f(a))$  con  $(b, f(b))$  ha de ser paralela a la tangente a la gráfica en algún punto intermedio (fig. 4.6).

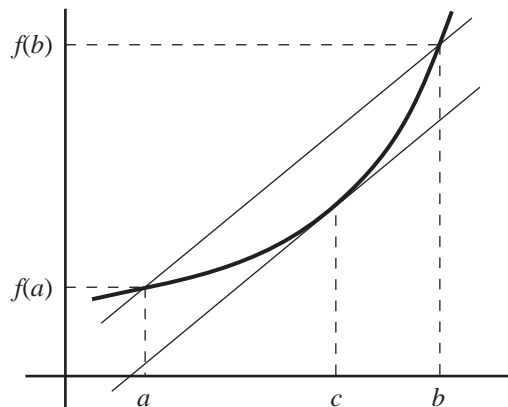


Figura 4.6: teorema del valor medio

#### 4.4. Extremos locales

El teorema del valor medio tiene un gran número de corolarios muy importantes, que veremos a continuación. A partir de ahora, diremos que  $f$  es derivable en un intervalo  $J$  si es derivable en todos los puntos interiores a  $J$  y es derivable por la derecha en el extremo inferior de  $J$  y por la izquierda en el extremo superior, si  $J$  contiene alguno de sus extremos. En particular, si  $f$  es derivable en un intervalo entonces  $f$  es continua en dicho intervalo.

**Proposición 4.20.** *Si  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  es continua en un intervalo  $J$  y derivable en el interior de  $J$ , y  $f'(x) = 0$  para todo  $x$  en el interior de  $J$ , entonces  $f$  es constante en  $J$ .*

*Demostración.* Si  $x < y$  son dos puntos de  $J$  entonces el teorema del valor medio aplicado a  $f$  en  $[x, y]$  implica que existe  $c \in (x, y)$  tal que

$$f(y) = f(x) + f'(c)(y - x) = f(x),$$

ya que  $(x, y)$  está contenido en el interior de  $J$ .

*Q.E.D.*

Otra consecuencia importante del teorema del valor medio relaciona el signo de la derivada de  $f$  en un intervalo con la monotonía de  $f$  en dicho intervalo:

**Proposición 4.21.** *Si  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  es continua en un intervalo  $[a, b]$  (con  $a < b$ ) y derivable en  $(a, b)$ , y  $f'(x) > 0$  (resp.  $f'(x) < 0$ ) para todo  $x \in (a, b)$ , entonces  $f$  es monótona creciente (resp. monótona decreciente) en  $[a, b]$ .*

*Demostración.* Supongamos, por ejemplo, que  $f'$  es positiva en  $(a, b)$ , y sean  $x < y$  dos puntos de  $[a, b]$ . Entonces  $f$  es continua en  $[x, y] \subset [a, b]$  y derivable

en  $(x, y)$ . Aplicando el teorema del valor medio a  $f$  en el intervalo  $[x, y]$  deducimos que existe  $c \in (x, y)$  tal que

$$f(y) - f(x) = (y - x)f'(c) > 0,$$

ya que  $y - x > 0$  y  $f'(c) > 0$  al ser  $c \in (x, y) \subset (a, b)$ . Si  $f'$  es negativa en  $(a, b)$ , basta aplicar lo anterior a la función  $-f$ . Q.E.D.

Los resultados anteriores tienen una aplicación muy importante al cálculo de extremos locales:

**Corolario 4.22.** *Sea  $a \in \mathbf{R}$  un punto crítico de una función  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  derivable en algún intervalo abierto centrado en  $a$ . Si existe  $\delta > 0$  tal que  $f'$  es positiva en  $(a - \delta, a)$  y negativa en  $(a, a + \delta)$  entonces  $a$  es un máximo local de  $f$ . Análogamente, si  $f'$  es negativa en  $(a - \delta, a)$  y positiva en  $(a, a + \delta)$  entonces  $a$  es un mínimo local de  $f$ .*

*Demostración.* La segunda de estas afirmaciones es consecuencia de la primera aplicada a la función  $-f$ . Supongamos, por tanto, que  $f'$  es positiva en  $(a - \delta, a)$  y negativa en  $(a, a + \delta)$ . Por la proposición anterior,

$$x \in (a - \delta, a) \implies f(a) - f(x) > 0,$$

ya que  $f'$  es positiva en  $[x, a)$ . Análogamente,

$$x \in (a, a + \delta) \implies f(x) - f(a) < 0,$$

al ser  $f'$  negativa en  $(a, x]$ . Q.E.D.

*Nota.* De forma muy parecida se demuestra que si  $f'(a) = 0$  pero  $f'$  es positiva ó negativa en  $(a - \delta, a + \delta) - \{a\}$  entonces  $f$  es monótona creciente ó decreciente en  $(a - \delta, a + \delta)$ , y por tanto  $a$  no es un extremo local de  $f$ . Se dice en tal caso que  $f$  tiene un **punto de inflexión** con tangente horizontal en  $a$ . Esto es lo que ocurre, por ejemplo, si  $f$  está dada por  $f(x) = \pm x^3$ .

Una consecuencia inmediata de la proposición anterior es el siguiente criterio para clasificar puntos críticos de  $f$  utilizando el signo de su segunda derivada:

**Proposición 4.23.** *Supongamos que  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  tiene un punto crítico en  $a$  y es dos veces derivable en  $a$ .*

- I) Si  $f''(a) > 0$ ,  $f$  tiene un mínimo local en  $a$
- II) Si  $f''(a) < 0$ ,  $f$  tiene un máximo local en  $a$
- III) Si  $f$  tiene un mínimo local en  $a$ ,  $f''(a) \geq 0$
- IV) Si  $f$  tiene un máximo local en  $a$ ,  $f''(a) \leq 0$ .

*Demostración.* En primer lugar, es claro que los apartados pares se deducen de los impares aplicados a la función  $-f$ . Probaremos por tanto a continuación sólo los apartados impares.

i) Al ser  $f''(a) = (f')'(a) > 0$ , por la Proposición 4.14 existe  $\delta > 0$  tal que

$$a - \delta < x < a < y < a + \delta \implies f'(x) < f'(a) = 0 < f'(y).$$

(Nótese que la existencia de  $f''(a)$  implica que  $f'$  está definida en un intervalo abierto centrado en  $a$ .) En otras palabras,  $f'$  es negativa en  $(a-\delta, a)$  y positiva en  $(a, a+\delta)$ . Por la proposición anterior,  $a$  es un mínimo local de  $f$ .

iii) Este apartado es consecuencia inmediata del segundo. En efecto, si  $f''(a) < 0$  entonces  $a$  sería un máximo local de  $f$ . Al ser  $a$  también un mínimo local de  $f$  por hipótesis,  $f$  debería ser constante en un intervalo abierto centrado en  $a$ . Pero esto implicaría que  $f''(a) = 0$ , lo cual contradice la suposición de que  $f''(a) < 0$ . *Q.E.D.*

Es muy importante notar que los apartados iii) y iv) son sólo recíprocos parciales de i) y ii). En otras palabras, si  $f$  tiene (por ejemplo) un máximo local en  $a$  y  $f''(a)$  existe no está garantizado que  $f''(a)$  sea negativa, ya que podría perfectamente anularse. Esto es lo que ocurre, por ejemplo, con la función  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  dada por  $f(x) = -x^4$ .

## 4.5. Reglas de L'Hospital

En esta sección aplicaremos el teorema del valor medio de Cauchy para deducir un método muy poderoso para calcular límites indeterminados conocido genéricamente como regla de L'Hospital. (Este método se debe, en realidad, a Johann Bernoulli, quién lo desarrolló en 1692 y lo incluyó en el primer texto de Cálculo Diferencial que se conoce, escrito para su alumno Guillaume-François-Antoine de L'Hospital y publicado en 1696 por este último.)

**Proposición** (primera regla de L'Hospital). Sean  $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  derivables en  $(a, b)$ , y supóngase que  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$ . Si  $g'$  no se anula en  $(a, b)$  y  $\lim_{x \rightarrow a^+} [f'(x)/g'(x)] = l$ , donde se admite que  $l$  sea un número real,  $\infty$  ó  $-\infty$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow a^+} [f(x)/g(x)] = l$ .

*Demostración.* Si (re)definimos  $f(a) = g(a) = 0$ , lo cual no cambia el valor de  $\lim_{x \rightarrow a^+} [f(x)/g(x)]$ , entonces  $f$  y  $g$  son continuas por la derecha en  $a$ . Si  $a < x < b$ , como  $f$  y  $g$  son diferenciables en  $x$  son continuas en dicho punto, y son por tanto continuas en el intervalo  $[a, x]$ . Aplicando el teorema del valor medio de Cauchy a  $f$  y  $g$  en dicho intervalo, vemos que existe  $c_x \in (a, x)$  tal que

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Como  $c_x \in (a, x)$ ,  $c_x \rightarrow a+$  cuando  $x \rightarrow a+$ . Por tanto

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{t \rightarrow a+} \frac{f'(t)}{g'(t)} = l.$$

*Q.E.D.*

La proposición anterior admite múltiples variantes. Por ejemplo, es obviamente cierta si  $f$  y  $g$  son derivables en  $(c, a)$  y continuas por la izquierda en  $a$ , siendo  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} g(x) = 0$ . En tal caso, si  $g'$  no se anula en  $(c, a)$  y  $\lim_{x \rightarrow a-} [f'(x)/g'(x)] = l$  entonces  $\lim_{x \rightarrow a-} [f(x)/g(x)] = l$ . Como consecuencia de lo anterior, si  $f$  y  $g$  son derivables en  $A = (a-h, a+h) - \{a\}$  (con  $h > 0$ ),  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ,  $g'$  no se anula en  $A$  y  $\lim_{x \rightarrow a} [f'(x)/g'(x)] = l$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)/g(x)] = l$ .

Otra variante útil de la regla de L'Hospital es la siguiente:

**Proposición** (segunda regla de L'Hospital). *Sean  $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  derivables en  $(a, b)$ , y sea  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \pm\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow a+} g(x) = \pm\infty$ . Si  $g'$  no se anula en  $(a, b)$  y  $\lim_{x \rightarrow a+} [f'(x)/g'(x)] = l$ , donde  $l$  puede ser un número real,  $\infty$  ó  $-\infty$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow a+} [f(x)/g(x)] = l$ .*

*Demostración.* Supongamos en primer lugar que  $l$  es finito. Dado  $\epsilon > 0$ , sea  $d \in (a, b)$  tal que

$$\left| \frac{f'(t)}{g'(t)} - l \right| < \frac{2|l| + 1}{2|l| + 1 + \epsilon} \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall t \in (a, d).$$

Escojamos a continuación  $0 < h < d - a$  tal que  $f(x) \neq 0$ ,  $g(x) \neq 0$ ,  $f(x) \neq f(d)$  y  $g(x) \neq g(d)$  si  $a < x < a + h$ ; tal  $h$  existe, ya que  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \pm\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow a+} g(x) = \pm\infty$ . Podemos entonces definir  $Q(x, d)$  para  $x \in (a, a + h)$  mediante

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(d)}{g(x) - g(d)} \cdot Q(x, d), \quad \forall x \in (a, a + h).$$

Despejando  $Q$  se obtiene

$$Q(x, d) = \frac{\frac{g(x) - g(d)}{g(x)}}{\frac{f(x) - f(d)}{f(x)}} = \frac{1 - \frac{g(d)}{g(x)}}{1 - \frac{f(d)}{f(x)}}, \quad \forall x \in (a, a + h),$$

y por tanto

$$\lim_{x \rightarrow a+} Q(x, d) = 1.$$

Por otra parte, aplicando el teorema del valor medio de Cauchy a  $f$  y  $g$  en el intervalo  $[x, d]$  (nótese que  $f$  y  $g$  son diferenciables en todos los puntos de dicho intervalo) obtenemos

$$\forall x \in (a, a + h) \exists c_x \in (x, d) \text{ tal que } \frac{f(x) - f(d)}{g(x) - g(d)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$



Como  $\lim_{x \rightarrow a+} Q(x, d) = 1$ , existe  $0 < \delta < h$  tal que  $|Q(x, d) - 1| < \frac{\epsilon}{2|l|+1}$  si  $a < x < a + \delta$ . Entonces

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| &= \left| \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} Q(x, d) - l \right| \leq \left| \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} - l \right| + \frac{\epsilon}{2|l|+1} \left| \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \right| \\ &\leq \left( 1 + \frac{\epsilon}{2|l|+1} \right) \left| \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} - l \right| + \frac{|l|\epsilon}{2|l|+1} \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \quad \forall x \in (a, a + \delta), \end{aligned}$$

lo cual muestra que  $f(x)/g(x) \rightarrow l$  cuando  $x \rightarrow a+$ .

Si  $l = \infty$ , dado  $M > 0$  existe  $d \in (a, b)$  tal que

$$t \in (a, d) \quad \Rightarrow \quad g(t) \neq 0, \quad \frac{f'(t)}{g'(t)} > 2M,$$

y podemos escoger  $0 < \delta < d - a$  tal que

$$Q(x, d) > \frac{1}{2}, \quad \forall x \in (a, a + \delta).$$

Por el teorema del valor medio de Cauchy,

$$\forall x \in (a, a + \delta) \quad \exists c_x \in (x, d) \quad \text{tal que} \quad \frac{f(x) - f(d)}{g(x) - g(d)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Pero entonces se tiene

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} Q(x, d) > 2M \cdot \frac{1}{2} = M,$$

lo cual prueba que  $f(x)/g(x)$  tiende a  $\infty$  cuando  $x \rightarrow a+$ . Finalmente, si  $l = -\infty$  basta aplicar lo anterior a  $-f(x)/g(x)$ . Q.E.D.

## 4.6. Convexidad

**Definición 4.24.** Una función  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  es **convexa** en un intervalo  $J$  si para todo  $a, b \in J$  el segmento que une los puntos  $(a, f(a))$  y  $(b, f(b))$  queda por encima de la gráfica de  $f$  en  $(a, b)$ . Se dice que  $f$  es **cóncava** en  $J$  si  $-f$  es convexa en  $J$ .

La caracterización analítica de la convexidad es muy sencilla. En efecto (véase la fig. 4.7),  $f$  es convexa en  $J$  si para todo  $a, b \in J$  y para todo  $x \in (a, b)$  se verifica  $y(x) > f(x)$ .

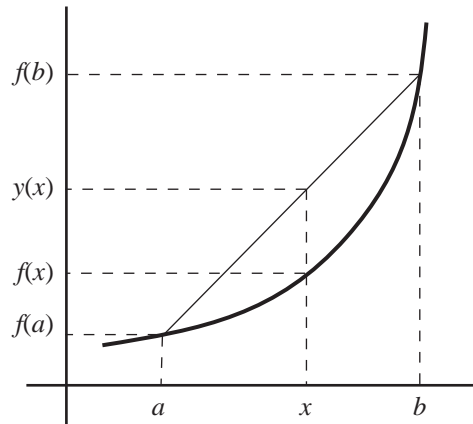


Figura 4.7: gráfica de una función convexa

Como

$$y(x) = f(a) + (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

$f$  será convexa en  $J$  si y sólo si se cumple:

$$a, b \in J, a < x < b \implies \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Análogamente,  $f$  será cóncava en  $J$  si

$$a, b \in J, a < x < b \implies \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Deduciremos en esta sección un criterio muy sencillo para comprobar si una función es cóncava ó convexa en un intervalo en función del signo de su derivada segunda. Empezaremos con el siguiente resultado acerca de la tangente a la gráfica de una función convexa:

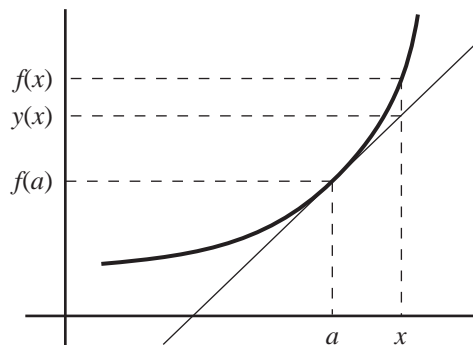


Figura 4.8: tangente a la gráfica de una función convexa

**Lema 4.25.** Si  $f$  es convexa en un intervalo  $J$  y derivable en  $a \in J$ , entonces la gráfica de  $f$  queda por encima de la tangente a  $f$  en  $(a, f(a))$  excepto en el punto  $(a, f(a))$  mismo (cf. fig. 4.8).

*Demostración.* Si  $a < a + h_1 < a + h_2$  pertenecen a  $J$  entonces la convexidad de  $f$  implica

$$\frac{f(a + h_1) - f(a)}{h_1} < \frac{f(a + h_2) - f(a)}{h_2}.$$

En otras palabras, el cociente incremental en  $a$

$$Q(h) = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

es una función creciente para  $h > 0$  tal que  $a + h \in J$ . Esto implica que

$$h > 0, a + h \in J \implies f'(a) < Q(h) \quad (4.12)$$

(en efecto,  $Q(t) - Q(h) < 0$  para  $0 < t < h$  implica que  $f'(a) - Q(h) = \lim_{t \rightarrow 0^+} [Q(t) - Q(h)] \leq 0$  por el principio de conservación del signo; la monotonía de  $Q$  implica entonces que  $f'(a) < Q(h)$ ). Análogamente, si  $a + h_2 < a + h_1 < a$  se tiene

$$\frac{f(a + h_1) - f(a + h_2)}{h_1 - h_2} < \frac{f(a) - f(a + h_2)}{-h_2},$$

lo que implica (multiplicando por  $-h_2(h_1 - h_2) > 0$ , simplificando y dividiendo por  $h_1 h_2 > 0$ )

$$Q(h_1) > Q(h_2), \quad \forall h_2 < h_1 < 0, a + h_2 \in J.$$

Por tanto,  $Q(h)$  es también monótona creciente para  $h < 0$  ( $a + h \in J$ ), de donde se deduce que

$$h < 0, a + h \in J \implies f'(a) > Q(h). \quad (4.13)$$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en  $(a, f(a))$  es

$$y(x) = f(a) + f'(a)(x - a);$$

por tanto, dicha recta estará por debajo de la gráfica de  $f$  en el punto  $(a + h, f(a + h))$  (con  $h \neq 0, a + h \in J$ ) si

$$h[Q(h) - f'(a)] > 0,$$

lo cual se cumple en virtud de (4.12) y (4.13). Q.E.D.

**Proposición 4.26.** Sea  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  una función continua en el intervalo  $[c, d]$  (con  $c < d$ ) y derivable en  $(c, d)$ . Entonces  $f$  es convexa en  $[c, d]$  si y sólo si  $f'$  es creciente en  $(c, d)$ .

*Demostración.*

$\implies$ ) Supongamos que  $f$  es convexa en  $[c, d]$ , y sea  $c < a < b < d$ . Por el lema anterior, la derivada de  $f$  en  $a$  es menor que el cociente incremental en  $a$  para  $h = b - a > 0$ , es decir

$$f'(a) < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Análogamente,  $f'(b)$  ha de ser mayor que el cociente incremental en  $b$  para  $h = a - b < 0$ , es decir

$$f'(b) > \frac{f(a) - f(b)}{a - b},$$

de donde se sigue que  $f'(a) < f'(b)$ . Por tanto,  $f'$  es creciente en  $(c, d)$ .

$\impliedby$ ) Supongamos ahora que  $f'$  sea una función creciente en  $(c, d)$ , y sea  $c \leq a < b \leq d$ . Hay que probar que

$$g(x) = (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a} - f(x) + f(a) > 0, \quad \forall a < x < b.$$

Por el teorema del valor medio, existe  $\xi \in (a, b)$  tal que

$$g'(x) = f'(\xi) - f'(x).$$

Como  $f'$  es creciente en  $(a, b) \subset (c, d)$ , tenemos que  $g'(x) > 0$  para  $x \in (a, \xi)$  y  $g'(x) < 0$  para  $x \in (\xi, b)$ . Al ser  $g$  continua en  $[a, b]$ , la Proposición 4.21 implica que  $g$  es creciente en  $[a, \xi]$  y decreciente en  $[\xi, b]$ . De esto se sigue que

$$x \in (a, \xi] \implies g(x) > g(a) = 0, \quad x \in [\xi, b) \implies g(x) > g(b) = 0.$$

Por tanto,  $g(x) > 0$  para todo  $x \in (a, b)$ .

*Q.E.D.*

**Corolario 4.27.** Sea  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  dos veces derivable en  $(c, d)$  y continua en  $[c, d]$ . Si  $f''(x) > 0$  para todo  $x \in (c, d)$ , entonces  $f$  es convexa en  $[c, d]$ .

*Demostración.* En efecto, al ser  $f''$  positiva en  $(c, d)$   $f'$  es creciente en dicho intervalo.

*Q.E.D.*

**Corolario 4.28.** Sea  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  dos veces derivable en un intervalo abierto centrado en  $a \in \mathbf{R}$ . Si  $f''(a) > 0$  y  $f''$  es continua en  $a$ , entonces  $f$  es convexa en un intervalo de la forma  $(a - \delta, a + \delta)$  para algún  $\delta > 0$ .

*Demostración.* Por el teorema de conservación del signo,  $f''$  es positiva en  $[a - \delta, a + \delta]$  para algún  $\delta > 0$ .

*Q.E.D.*

Evidentemente, todos los resultados anteriores se traducen en resultados análogos para funciones cóncavas sin más que cambiar  $f$  en  $-f$ . Por ejemplo, si  $f$  es continua en  $[c, d]$  y  $f''$  es negativa en  $(c, d)$  entonces  $f$  es cóncava en  $[c, d]$ .

Supongamos que  $f$  es derivable dos veces en  $(c, d)$ , y sea  $f''(a) = 0$  en un punto  $a \in (c, d)$ . Si  $f''$  cambia de signo en  $a$ , entonces la gráfica de  $f$  cambia de cóncava a convexa (si  $f'' < 0$  en  $(a - \delta, a)$  y  $f'' > 0$  en  $(a, a + \delta)$ ) ó de convexa a cóncava (si  $f'' > 0$  en  $(a - \delta, a)$  y  $f'' < 0$  en  $(a, a + \delta)$ ) en  $a$ . Se dice en tal caso que  $f$  tiene un **punto de inflexión** en  $a$  (cf. fig.4.9).

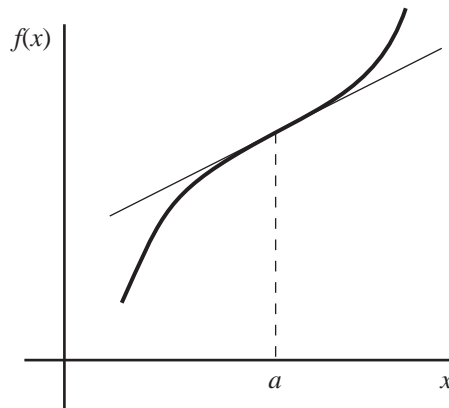


Figura 4.9: función con punto de inflexión en  $a$

**Ejemplo 4.29.** Sea  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  definida por  $f(x) = xe^{-x^2}$ ; dibujaremos esquemáticamente la gráfica de  $f$  utilizando los resultados de este capítulo.

En primer lugar, es claro que  $f$  es infinitamente derivable en todo  $\mathbf{R}$ , ya que es el producto de un polinomio por la función  $x \mapsto e^{-x^2}$ , que es la composición de  $\exp$  con un polinomio. Además,  $f$  es claramente una función impar. El comportamiento de  $f$  en el infinito se deduce fácilmente aplicando la regla de L'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} xe^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2xe^{x^2}} = 0.$$

Además,  $f(x) > 0$  para  $x > 0$  y  $f(x) < 0$  para  $x < 0$ . La derivada primera de  $f$  se calcula fácilmente:

$$f'(x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$$

Los ceros de  $f'$  están en los puntos  $\pm 1/\sqrt{2}$ . El signo de  $f'$  es el mismo que el de  $1 - 2x^2$ , es decir  $f'(x) < 0$  si  $x < -1/\sqrt{2}$ ,  $f'(x) > 0$  si  $-1/\sqrt{2} < x < 1/\sqrt{2}$ , y  $f'(x) < 0$  si  $x > 1/\sqrt{2}$ . Por tanto,  $f$  tiene un mínimo local en  $-1/\sqrt{2}$  y un máximo local en  $1/\sqrt{2}$ , y estos son los únicos extremos locales de  $f$ . (En general, si  $f$  es impar (resp. par) y  $a$  es un máximo local de  $f$  entonces  $-a$  es un mínimo (resp. máximo) local de  $f$ , y viceversa.)

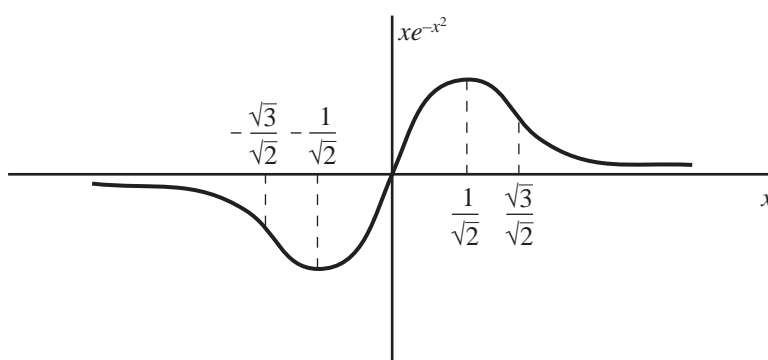


Figura 4.10: gráfica de la función  $f(x) = xe^{-x^2}$

Con estos datos ya es posible dibujar esquemáticamente la gráfica de  $f$ . Sin embargo, podemos obtener aún más información sobre el comportamiento de la función estudiando el signo de  $f''$ , lo cual nos permitirá determinar las regiones en que la gráfica de  $f$  es cóncava ó convexa. Un sencillo cálculo proporciona:

$$f''(x) = e^{-x^2}[-4x - 2x(1 - 2x^2)] = 2xe^{-x^2}(2x^2 - 3).$$

Por tanto,  $f''(x) = 0$  para  $x = 0, \pm\sqrt{3}/\sqrt{2}$ ,  $f''(x) < 0$  para  $x < -\sqrt{3}/\sqrt{2}$ ,  $f''(x) > 0$  si  $-\sqrt{3}/\sqrt{2} < x < 0$ ,  $f''(x) < 0$  si  $0 < x < \sqrt{3}/\sqrt{2}$ , y  $f''(x) > 0$  para  $x > \sqrt{3}/\sqrt{2}$ . Por tanto,  $f$  es cóncava en los intervalos  $(-\infty, -\sqrt{3}/\sqrt{2}]$  y  $[0, \sqrt{3}/\sqrt{2}]$ , y convexa en  $[-\sqrt{3}/\sqrt{2}, 0]$  y  $[\sqrt{3}/\sqrt{2}, \infty)$ . Además, los puntos  $0, \pm\sqrt{3}/\sqrt{2}$  son puntos de inflexión de la función. La gráfica de  $f$  tiene por tanto el aspecto que muestra la fig. 4.10.

**Ejemplo 4.30.** Consideremos la función  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  definida por  $f(x) = x/(x^2 - 1)$ , para todo  $x \neq \pm 1$ . En este caso,  $f$  es de nuevo impar, y es infinitamente diferenciable (es una función racional) para  $x \neq \pm 1$ . El comportamiento de  $f$  cerca de los puntos singulares (no pertenecen al dominio de la función)  $\pm 1$  se averigua calculando el  $\lim_{x \rightarrow \pm 1} f(x)$ . Como  $f$  es impar, basta estudiar el comportamiento en las proximidades de 1. En primer lugar,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x^2 - 1} = \infty,$$

ya que el numerador tiende a 1 y el denominador es positivo y tiende a cero. Aproximándonos por la izquierda obtenemos

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x^2 - 1} = -\infty,$$

ya que ahora  $x > 0$  y  $x^2 - 1 < 0$  para  $x < 1$  suficientemente próximo a 1

(por ejemplo, para  $0 < x < 1$ . Como  $f$  es impar,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{t \rightarrow 1^-} f(-t) = - \lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = \infty, \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{t \rightarrow 1^+} f(-t) = - \lim_{t \rightarrow 1^+} f(t) = -\infty.\end{aligned}$$

En particular, las rectas  $x = \pm 1$  son **asíntotas verticales** de la gráfica de  $f$ .

La derivada de  $f$  es la función racional con dominio  $\mathbf{R} - \{-1, 1\}$  dada por

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1 - x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} < 0, \quad \forall x \neq \pm 1.$$

Por tanto,  $f$  es decreciente en los intervalos  $(-\infty, -1)$ ,  $(-1, 1)$  y  $(1, \infty)$ . Nótese que  $f$  *no* es decreciente en todo  $\mathbf{R}$  (¿por qué esto no contradice la Proposición 4.21?). Esto, junto con el hecho de que  $f(0) = 0$ , ya nos permite dibujar en líneas generales la gráfica de  $f$ .

Para tener una idea más precisa del comportamiento de  $f$ , podemos determinar las regiones de concavidad y convexidad de su gráfica. Para ello lo mejor es calcular la derivada segunda de  $f$ :

$$\begin{aligned}f''(x) &= \frac{-(x^2 - 1)^2 \cdot 2x + 2(x^2 + 1) \cdot 2x(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^4} \\ &= \frac{2x}{(x^2 - 1)^3} [1 - x^2 + 2(x^2 + 1)] \\ &= \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}.\end{aligned}$$

El signo de  $f''$  es pues el mismo que el de  $x(x^2 - 1)$  ( $x \neq \pm 1$ ). Por lo tanto,  $f''(x)$  se anula sólo para  $x = 0$ , es negativa en  $(-\infty, -1)$ , positiva en  $(-1, 0)$ , negativa de nuevo en  $(0, 1)$  y positiva en  $(1, \infty)$ . Luego  $f$  tiene un punto de inflexión en 0, es convexa en los intervalos  $(-1, 0)$  y  $(1, \infty)$  y cóncava en  $(-\infty, -1)$  y en  $(0, 1)$ . Esta información permite dibujar con mucha aproximación la gráfica de  $f$  (fig. 4.11).

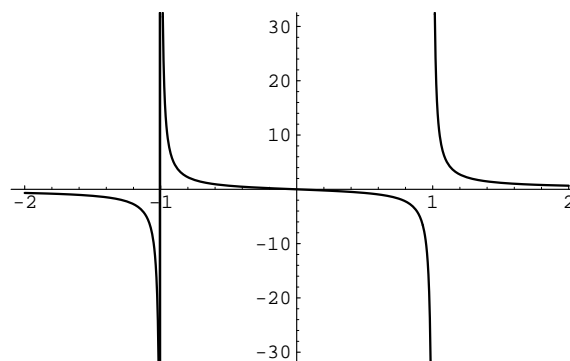


Figura 4.11: gráfica de la función  $f(x) = x/(x^2 - 1)$

Supongamos que se nos pide calcular los extremos de  $f$  en el intervalo  $[0, 5]$ . Como  $1 \in [0, 5]$ ,  $f$  no está acotada (ni superior ni inferiormente) en  $[0, 5]$ ; por tanto,  $f$  no tiene extremos en dicho intervalo.

**Ejemplo 4.31.** Sea ahora

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-3|}, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

La función  $f$  es continua en todo  $\mathbf{R}$  (los dos sumandos son cocientes de funciones continuas con denominador no nulo en todo  $\mathbf{R}$ ). Sin embargo, no está claro si son derivables en 0 y 3 (la función valor absoluto no es derivable en el origen). Por tanto, deberemos estudiar  $f$  por separado en los intervalos  $(-\infty, 0]$ ,  $[0, 3]$  y  $[3, \infty)$ .

En  $(-\infty, 0]$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+3-x} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{4-x}, \quad x \leq 0.$$

Por tanto

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(4-x)^2} > 0, \quad \forall x < 0,$$

y<sup>1</sup>  $f'(0-0) = 17/16$ . Luego  $f$  es creciente en  $(-\infty, 0]$ , siendo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

De esto se deduce que  $f$  no tiene mínimos en este intervalo (ni locales ni globales; el ínfimo de  $\text{im } f$  en este intervalo existe y es igual a cero), mientras que el máximo de  $f$  en  $(-\infty, 0]$  está en el origen, con valor máximo igual a  $f(0) = 5/4$ .

En  $[0, 3]$

$$f(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+3-x} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{4-x}, \quad 0 \leq x \leq 3,$$

por lo que

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(4-x)^2} = \frac{5(2x-3)}{(x+1)^2(x-4)^2}, \quad 0 < x < 3,$$

siendo  $f'(0+0) = -15/16$  y  $f'(3-0) = 15/16$ . En este intervalo  $f'$  se anula sólo en el punto  $3/2$ , es negativa si  $0 < x < 3/2$  y positiva si  $3/2 < x < 3$ . Por tanto,  $f$  tiene un mínimo (local y global) en  $[0, 3]$  en el punto  $3/2$  (siendo  $f(3/2) = 4/5$ ). Como  $f(0) = f(3) = 5/4$ , los máximos de  $f$  en este intervalo son los extremos de dicho intervalo (0 y 3).

---

<sup>1</sup>  $f'(0-0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} f'(c_h)$  (con  $c_h \in (h, 0)$ ) =  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x)$ , por el teorema del valor medio.



Finalmente, en  $[3, \infty)$  se cumple

$$f(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x-3} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{x-2}, \quad x \geq 0,$$

y

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(x-2)^2} < 0, \quad \forall x > 0,$$

siendo  $f'(3+0) = -17/16$ . Por tanto,  $f$  es decreciente en  $[0, \infty)$ , con un máximo en 3 ( $f(3) = 5/4$ ) y sin mínimo (el ínfimo de  $\text{im } f$  en este intervalo es igual a  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ).

En particular, hemos demostrado que

$$\frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-3|} \leq \frac{5}{4}, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

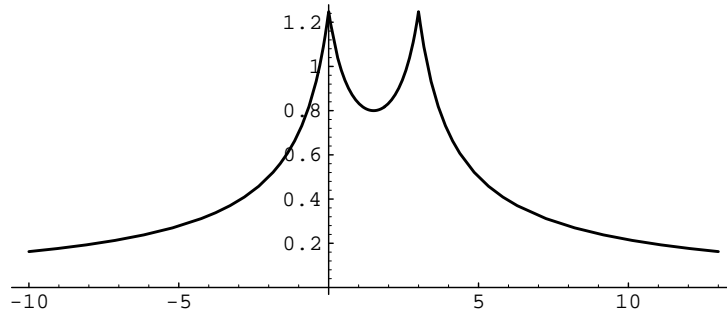


Figura 4.12: gráfica de la función  $f(x) = 1/(1+|x|) + 1/(1+|x-3|)$

*Ejercicio.* Probar que la gráfica de  $f$  es simétrica respecto de la recta vertical  $x = 3/2$ .

*Solución.* Sólo hay que comprobar que para todo  $t \in \mathbf{R}$  se cumple  $f\left(\frac{3}{2} + t\right) = f\left(\frac{3}{2} - t\right)$ .  $\square$

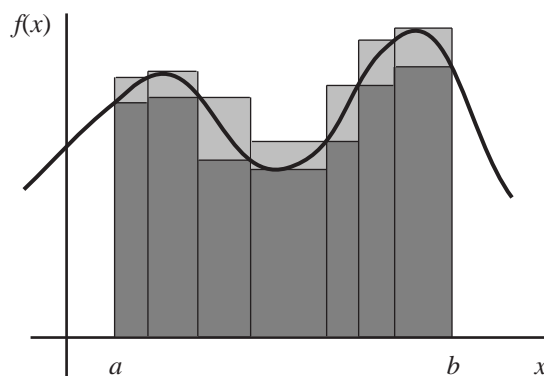
## Capítulo 5

# Integración

### 5.1. Preliminares

Históricamente, el concepto de integral de una función surgió en relación con dos problemas aparentemente distintos pero en realidad íntimamente relacionados. Por un lado, la *integral definida* de una función  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  en un intervalo  $[a, b]$  (en el cuál  $f$  está definida y es no negativa) se define como el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje de abscisas en el intervalo  $[a, b]$ . Por otro lado, la *integral indefinida* (ó *primitiva*) de  $f$  es cualquier función derivable cuya derivada es  $f$ . El teorema fundamental del cálculo relaciona ambos conceptos, estableciendo (bajo ciertas condiciones técnicas que veremos más adelante) que la función cuyo valor en  $x$  es la integral definida de  $f$  en  $[a, x]$  es una primitiva de  $f$ , y que la integral definida de  $f$  en  $[a, b]$  se puede calcular como la diferencia entre los valores en  $b$  y en  $a$  de cualquier primitiva de  $f$ .

Empezaremos definiendo analíticamente la integral definida, guiados por la idea intuitiva de que dicha integral mide el área bajo la gráfica de la función. Los pasos que hay que dar para ello son, en forma resumida, los siguientes. Primero dividimos el intervalo  $[a, b]$  en un cierto número de subintervalos. En cada uno de ellos, aproximamos por defecto el área bajo la gráfica de la función por el área de un rectángulo de la misma anchura que el subintervalo y altura igual al ínfimo de los valores de la función en dicho subintervalo. Sumando las áreas de todos estos rectángulos obtendremos una aproximación por defecto al área bajo la gráfica de la función en  $[a, b]$ . Análogamente, aproximaremos por exceso el área bajo la gráfica de la función por el área de un rectángulo con base el subintervalo y altura dada por el supremo de los valores de  $f$  en dicho subintervalo. De nuevo, la suma de estas áreas proporciona una aproximación al área bajo la gráfica de la función en el intervalo  $[a, b]$ , aunque ahora se trata de una aproximación por exceso (cf. fig. 5.1).

Figura 5.1: definición de  $\int_a^b f$ 

Si, al hacer la partición del intervalo  $[a, b]$  cada vez más fina (es decir, con más puntos, que por tanto estarán cada vez menos espaciados) la aproximación por exceso y la aproximación por defecto tienden al mismo valor, dicho límite común se definirá como la integral de  $f$  en  $[a, b]$ .

**Definición 5.1.** Una **partición**  $P$  del intervalo  $[a, b]$  es cualquier subconjunto *finito*  $P \subset [a, b]$  que contiene a los extremos  $a$  y  $b$  del intervalo. Una partición  $P'$  es **más fina** que la partición  $P$  si  $P \subset P'$ .

Si  $P$  es una partición de  $[a, b]$  entonces  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ , donde siempre supondremos (sin pérdida de generalidad) que los elementos de  $P$  han sido numerados de menor a mayor:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Obsérvese que el menor elemento de la partición ( $a$ ) lleva el subíndice 0, de forma que el subíndice correspondiente al último elemento ( $b$ ) es igual al número de subintervalos en que la partición divide al intervalo  $[a, b]$ . Nótese también que no exigimos que las longitudes  $x_i - x_{i-1}$  de los subintervalos de la partición sean todas iguales.

Definamos a continuación en forma precisa las dos aproximaciones (por defecto y por exceso) al área bajo la gráfica de  $f$  en  $[a, b]$  que mencionábamos al principio de esta sección:

**Definición 5.2.** Sea  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  una función acotada en  $[a, b]$ , y sea  $[a, b] \subset \text{dom } f$ . Si  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  es una partición de  $[a, b]$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$  definimos

$$m_i = \inf \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad M_i = \sup \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

La **suma inferior** de  $f$  asociada a la partición  $P$  es el número  $L(f, P)$  definido por

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}).$$

Análogamente, la **suma superior** de  $f$  asociada a  $P$  es el número  $U(f, P)$  definido por

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}).$$

- Nótese que  $m_i$  y  $M_i$  están definidos para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ , al ser  $f$  acotada en  $[a, b]$ . Además, si  $f$  es continua en  $[a, b]$  entonces

$$m_i = \min \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad M_i = \max \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$

aunque esto no tiene por qué ser cierto si  $f$  es discontinua en algún punto de  $[a, b]$ .

- Es fácil ver que

$$L(f, P) = -U(-f, P), \quad U(f, P) = -L(-f, P).$$

- Como  $m_i \leq M_i$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ , es evidente que

$$L(f, P) \leq U(f, P), \quad \forall P \text{ partición de } [a, b].$$

- Si nuestras ideas intuitivas son correctas, también debería ser cierto que cualquier suma inferior  $L(f, P_1)$  es menor ó igual que *cualquier* suma superior  $U(f, P_2)$ , cualesquiera que sean las particiones  $P_1$  y  $P_2$  de  $[a, b]$  que consideremos. Para probar esto empezaremos con el siguiente lema (que también es intuitivamente evidente):

**Proposición 5.3.** *Si  $P$  y  $Q$  son dos particiones de  $[a, b]$  y  $Q$  es más fina que  $P$  entonces se verifica*

$$L(f, P) \leq L(f, Q) \leq U(f, Q) \leq U(f, P).$$

*Demostración.*

i) Supongamos, para empezar, que  $Q = P \cup \{t\}$ , con  $t \notin P$  (en otras palabras,  $Q$  contiene exactamente un punto más que  $P$ ). Sea, por ejemplo,  $t \in (x_{k-1}, x_k)$ , y llamemos

$$m' = \inf \{f(x) : x \in [x_{k-1}, t]\}, \quad m'' = \inf \{f(x) : x \in [t, x_k]\}.$$

Entonces se tiene

$$L(f, Q) - L(f, P) = m'(t - x_{k-1}) + m''(x_k - t) - m_k(x_k - x_{k-1}).$$

Como  $x_{k-1} < t < x_k$  se verifica

$$\begin{aligned} m_k &= \inf \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} \leq \inf \{f(x) : x \in [x_{k-1}, t]\} = m', \\ m_k &= \inf \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} \leq \inf \{f(x) : x \in [t, x_k]\} = m'', \end{aligned}$$

y por tanto

$$L(f, Q) - L(f, P) \geq m_k(t - x_{k-1}) + m_k(x_k - t) - m_k(x_k - x_{k-1}) = 0.$$

El resultado análogo para sumas superiores se demuestra aplicando el anterior a  $-f$ :

$$U(f, Q) = -L(-f, Q) \leq -L(-f, P) = U(f, P).$$

ii) Sea ahora  $Q \supset P$  una partición cualquiera más fina que  $P$ . Si  $P = P_0 \subset P_1 \subset \dots \subset P_{n-1} \subset P_n = Q$  es una sucesión de particiones de  $[a, b]$  que difieren exactamente en un punto entonces se cumple, por el apartado anterior, que

$$L(f, P) = L(f, P_0) \leq L(f, P_1) \leq \dots \leq L(f, P_n) = L(f, Q),$$

y análogamente para las sumas superiores.

*Q.E.D.*

**Proposición 5.4.** *Si  $P$  y  $Q$  son dos particiones de  $[a, b]$ , entonces se cumple*

$$L(f, P) \leq U(f, Q).$$

*Demostración.* Si  $P$  y  $Q$  son dos particiones arbitrarias de  $[a, b]$ , la partición  $P \cup Q$  es más fina a la vez que  $P$  y que  $Q$ . Por tanto, aplicando dos veces el lema anterior se obtiene:

$$L(f, P) \leq L(f, P \cup Q) \leq U(f, P \cup Q) \leq U(f, Q).$$

*Q.E.D.*

Sea de nuevo  $f$  una función acotada en  $[a, b]$ . En virtud de la proposición anterior, cualquier suma superior de  $f$  en  $[a, b]$  es una cota superior del conjunto de todas las sumas inferiores de  $f$  en  $[a, b]$ , y por tanto se cumple:

$$\sup \{L(f, P) : P \in \mathcal{P}[a, b]\} \leq U(f, Q), \quad \forall Q \in \mathcal{P}[a, b],$$

donde hemos denotado por  $\mathcal{P}[a, b]$  al conjunto de todas las particiones del intervalo  $[a, b]$ . Pero esta última desigualdad implica que  $\sup \{L(f, P) : P \in \mathcal{P}[a, b]\}$  es una cota inferior del conjunto de todas las sumas superiores de  $f$  en  $[a, b]$ , donde se deduce que

$$\sup \{L(f, P) : P \in \mathcal{P}[a, b]\} \leq \inf \{U(f, P) : P \in \mathcal{P}[a, b]\}.$$

Por definición, llamaremos **integral inferior** de  $f$  en  $[a, b]$  al número

$$\int_a^b f = \sup \{L(f, P) : P \in \mathcal{P}[a, b]\},$$

y análogamente definiremos la **integral superior** de  $f$  en  $[a, b]$  por

$$\overline{\int_a^b} f = \inf \{U(f, P) : P \in \mathcal{P}[a, b]\}.$$

Por lo visto anteriormente, para toda función  $f$  acotada en  $[a, b]$  se cumple

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f.$$

Además, si  $s \in \mathbf{R}$  es un número tal que

$$L(f, P) \leq s \leq U(f, P), \quad \forall P \in \mathcal{P}[a, b],$$

entonces se ha de cumplir

$$\begin{aligned} \underline{\int_a^b} f &= \sup \{L(f, P) : P \in \mathcal{P}[a, b]\} \leq s \\ &\leq \inf \{U(f, P) : P \in \mathcal{P}[a, b]\} = \overline{\int_a^b} f, \end{aligned}$$

es decir

$$\underline{\int_a^b} f \leq s \leq \overline{\int_a^b} f. \quad (5.1)$$

Intuitivamente, la integral inferior de  $f$  en  $[a, b]$  es el límite de las aproximaciones por defecto al área bajo la gráfica de  $f$  en  $[a, b]$ , y análogamente la integral superior es el límite de las aproximaciones por exceso a dicha área. Por tanto, el área bajo la gráfica de  $f$  en  $[a, b]$  habría de ser igual a ambos límites, para lo cual es necesario que el valor de la integral inferior coincida con el de la integral superior. Es fácil ver que esto no siempre ocurre:

**Ejemplo 5.5.** Sea  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  la función característica de  $\mathbf{Q}$  (es decir,  $f(x) = 1$  si  $x \in \mathbf{Q}$  y  $f(x) = 0$  si  $x \notin \mathbf{Q}$ ), y sea  $P = \{x_0, \dots, x_n\}$  una partición cualquiera de un intervalo arbitrario  $[a, b]$ . Obviamente, en este caso  $m_i = 0$  y  $M_i = 1$  para todo  $i = 1, \dots, n$  (ya que cualquier intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  con  $x_{i-1} < x_i$  contiene tanto racionales como irracionales), por lo que

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^n 0 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 0, \quad U(f, P) = \sum_{i=1}^n 1 \cdot (x_i - x_{i-1}) = x_n - x_0 = b - a,$$

y por tanto

$$\underline{\int_a^b} f = 0 < \overline{\int_a^b} f = b - a.$$

En el ejemplo anterior, no está claro cuál es el valor del área bajo la gráfica de  $f$  en  $[a, b]$  (y por tanto el de la integral de  $f$  en  $[a, b]$ ), ya que las aproximaciones por defecto a dicha área tienden a un límite *distinto* que las aproximaciones por exceso. En situaciones como esta, renunciaremos a definir el valor de la integral de  $f$  en  $[a, b]$ . Las consideraciones anteriores motivan la siguiente definición:

**Definición 5.6.** Una función  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  definida y acotada en un intervalo  $[a, b]$  es **integrable** en  $[a, b]$  si

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Al valor común de ambas integrales lo denotaremos por  $\int_a^b f$ , y lo denominaremos **integral de  $f$  en  $[a, b]$** .

- Otra notación equivalente para  $\int_a^b f$  que es muy útil en la práctica es  $\int_a^b f(x) dx$ . Obsérvese que en esta notación  $x$  es una variable muda, es decir

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(s) ds = \dots \equiv \int_a^b f.$$

- Los prerequisites para que  $f$  sea integrable en  $[a, b]$  son que  $\text{dom } f \supset [a, b]$ , y que  $f$  esté *acotada* en dicho intervalo.
- Nótese que de momento no está definido el símbolo  $\int_a^b f$  si  $a \geq b$ ; veremos más adelante cómo generalizar la definición de integral en este caso.

Una consecuencia inmediata de (5.1) y de la definición de función integrable es la siguiente

**Proposición 5.7.** Si  $f$  es integrable en  $[a, b]$  y  $s \in \mathbf{R}$  satisface

$$L(f, P) \leq s \leq U(f, P), \quad \forall P \in \mathcal{P}[a, b],$$

entonces  $\int_a^b f = s$ .

*Demostración.* En efecto (véase la ec. (5.1))

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f \leq s \leq \overline{\int_a^b} f = \int_a^b f.$$

*Q.E.D.*

**Ejemplo 5.8.** Comprobar que una función es integrable a partir de la definición puede ser muy complicado, incluso para funciones muy simples. En efecto, el cálculo de la integral inferior ó superior requiere en principio conocer el valor de  $L(f, P)$  ó  $U(f, P)$  para cualquier partición  $P$  del intervalo  $[a, b]$ , lo cuál sólo es posible para funciones muy sencillas.

Por ejemplo, si  $f = c$  es constante y  $P = \{x_0, \dots, x_n\}$  entonces  $m_i = M_i = c$ , por lo que

$$L(f, P) = U(f, P) = \sum_{i=1}^n c(x_i - x_{i-1}) = c \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = c(b - a).$$

Luego en este caso  $f$  es integrable, y se cumple

$$\int_a^b c \, dx = c(b - a).$$

(Geoméricamente (si  $c > 0$ ), esta es la fórmula para el área de un rectángulo de base  $b - a$  y altura  $c$ .)

Sin embargo, si  $f = I$  entonces  $m_i = x_{i-1}$ ,  $M_i = x_i$  y por tanto

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^n x_{i-1}(x_i - x_{i-1}), \quad U(f, P) = \sum_{i=1}^n x_i(x_i - x_{i-1}),$$

que sólo es fácil calcular exactamente para ciertos tipos de particiones de  $[a, b]$ . Por ejemplo, si todos los subintervalos de la partición tienen la misma longitud  $(b - a)/n$  entonces

$$x_i = a + \frac{i}{n}(b - a), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Por tanto en este caso

$$\begin{aligned} L(f, P) &= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n x_{i-1} = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x_i \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left[ a + \frac{i}{n}(b-a) \right] = \frac{b-a}{n} \left[ na + \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n-1} i \right] \\ &= \frac{b-a}{n} \left[ na + \frac{b-a}{n} \cdot \frac{1}{2}n(n-1) \right] = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) - \frac{(b-a)^2}{2n}, \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned} U(f, P) &= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n x_i = L(f, P) + \frac{b-a}{n}(x_n - x_0) \\ &= L(f, P) + \frac{(b-a)^2}{n} = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) + \frac{(b-a)^2}{2n}. \end{aligned}$$



Sin embargo, este cálculo *no* demuestra por sí sólo que

$$\int_a^b f = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) = \overline{\int_a^b f},$$

ya que *no* hemos calculado  $L(f, P)$  y  $U(f, P)$  más que para un cierto tipo de particiones  $P$  de  $[a, b]$ <sup>1</sup>.

Veamos a continuación un criterio que simplifica notablemente el comprobar si una función es integrable sobre un intervalo:

**Proposición 5.9.** *Sea  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  una función definida y acotada en un intervalo  $[a, b]$ . Entonces  $f$  es integrable en  $[a, b]$  si y sólo si para todo  $\epsilon > 0$  existe una partición  $P$  de  $[a, b]$  tal que*

$$U(f, P) - L(f, P) < \epsilon.$$

*Demostración.*

$\implies$ ) Supongamos que  $f$  es integrable en  $[a, b]$ , y sea  $\epsilon > 0$  dado. Por definición de supremo, existe una partición  $P_1$  de  $[a, b]$  tal que

$$\int_a^b f - \frac{\epsilon}{2} < L(f, P_1) \leq \int_a^b f.$$

Análogamente, por definición de ínfimo existe una partición  $P_2$  de  $[a, b]$  tal que

$$\int_a^b f \leq U(f, P_2) < \int_a^b f + \frac{\epsilon}{2}.$$

Por ser  $f$  integrable,

$$\int_a^b f = \int_a^b f = \overline{\int_a^b f}.$$

Por tanto, si  $P = P_1 \cup P_2$  entonces se tiene (por la Proposición 5.3)

$$\begin{aligned} U(f, P) - L(f, P) &\leq U(f, P_2) - L(f, P_1) \\ &= \left[ U(f, P_2) - \int_a^b f \right] - \left[ L(f, P_1) - \int_a^b f \right] < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Esto se podría probar de la siguiente forma: si llamamos  $P_n$  a la partición del intervalo  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos iguales, entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(b^2 - a^2) = \sup \{L(f, P_n) : n \in \mathbf{N}\} &\leq \int_a^b x \, dx \\ &\leq \overline{\int_a^b x \, dx} \leq \inf \{U(f, P_n) : n \in \mathbf{N}\} = \frac{1}{2}(b^2 - a^2). \end{aligned}$$

⟷) Supongamos ahora que

$$\epsilon = \int_a^{\overline{b}} f - \int_a^{\underline{b}} f > 0.$$

Entonces cualquiera que sea la partición  $P$  de  $[a, b]$  que escojamos se cumplirá

$$L(f, P) \leq \int_a^{\underline{b}} f = \int_a^{\overline{b}} f - \epsilon \leq U(f, P) - \epsilon.$$

*Q.E.D.*

**Ejemplo 5.10.** La función identidad es integrable en cualquier intervalo  $[a, b]$ , y se cumple

$$\int_a^b x \, dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

En efecto (véase el Ejemplo 5.8) si  $P_n$  es una partición de  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos iguales entonces

$$U(f, P_n) - L(f, P_n) = \frac{1}{n}(b - a)^2,$$

que es menor que cualquier  $\epsilon > 0$  para  $n$  suficientemente grande. Esto demuestra que  $I$  es integrable en  $[a, b]$ . De

$$L(f, P_n) < \frac{1}{2}(b^2 - a^2) < U(f, P_n), \quad L(f, P_n) \leq \int_a^b f \leq U(f, P_n)$$

se sigue que

$$\left| \frac{1}{2}(b^2 - a^2) - \int_a^b f \right| \leq U(f, P_n) - L(f, P_n) = \frac{1}{n}(b - a)^2, \quad \forall n \in \mathbf{N},$$

lo cual prueba nuestra afirmación.

*Ejercicio.* Probar, de la misma forma, que  $\int_0^b x^2 \, dx = b^3/3$ .

## 5.2. Propiedades de la integral

Veremos en esta sección las propiedades elementales del concepto de integral. Comenzaremos estableciendo las propiedades de *linealidad* de la integral:

**Teorema 5.11.** Si  $f$  y  $g$  son integrables en  $[a, b]$  y  $c \in \mathbf{R}$ , entonces las funciones  $f + g$  y  $cf$  son integrables en  $[a, b]$ , y además se cumple:

$$1) \int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

$$\text{II) } \int_a^b (cf) = c \int_a^b f.$$

*Demostración.* En primer lugar,  $f + g$  y  $cf$  están definidas y son acotadas en  $[a, b]$  si  $f$  y  $g$  lo son. Si  $Q = \{x_0, \dots, x_n\}$  es una partición de  $[a, b]$  e  $i = 1, 2, \dots, n$ , llamemos

$$\begin{aligned} m_i &= \inf \{f(x) + g(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \\ m_i' &= \inf \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \\ m_i'' &= \inf \{g(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} M_i &= \sup \{f(x) + g(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \\ M_i' &= \sup \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \\ M_i'' &= \sup \{g(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}. \end{aligned}$$

Se tiene entonces

$$m_i' + m_i'' \leq m_i \leq M_i \leq M_i' + M_i'', \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

y por tanto

$$L(f, Q) + L(g, Q) \leq L(f + g, Q) \leq U(f + g, Q) \leq U(f, Q) + U(g, Q),$$

para toda partición  $Q$  de  $[a, b]$ . Dado  $\epsilon > 0$ , existen dos particiones  $P_1$  y  $P_2$  de  $[a, b]$  tales que

$$U(f, P_1) - L(f, P_1) < \frac{\epsilon}{2}, \quad U(g, P_2) - L(g, P_2) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Si  $P = P_1 \cup P_2$  se cumple entonces

$$\begin{aligned} U(f + g, P) - L(f + g, P) &\leq U(f, P) + U(g, P) - L(f, P) - L(g, P) \\ &\leq U(f, P_1) + U(g, P_2) - L(f, P_1) - L(g, P_2) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Por la Proposición 5.9,  $f + g$  es integrable en  $[a, b]$ . Además, si  $\epsilon > 0$  y  $P$  es como antes, entonces

$$\begin{aligned} L(f, P) + L(g, P) &\leq L(f + g, P) \leq \int_a^b (f + g) \\ &\leq U(f + g, P) \leq U(f, P) + U(g, P) \end{aligned}$$

y

$$L(f, P) + L(g, P) \leq \int_a^b f + \int_a^b g \leq U(f, P) + U(g, P).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b (f+g) - \int_a^b f - \int_a^b g \right| \\ \leq U(f, P) + U(g, P) - L(f, P) - L(g, P) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Esto demuestra que

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

La demostración de la segunda afirmación es análoga y se deja como ejercicio para el lector. Q.E.D.

Veamos a continuación la *propiedad de subdivisión* de la integral:

**Proposición 5.12.** *Sea  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  una función, y sea  $a < c < b$ . Entonces  $f$  es integrable en  $[a, b]$  si y sólo si  $f$  es integrable en  $[a, c]$  y en  $[c, b]$ , y en tal caso se cumple*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \quad (5.2)$$

*Demostración.*

$\implies$ ) Si  $f$  integrable en  $[a, b]$ , entonces  $f$  está definida y acotada en  $[a, b]$ , lo cual implica que otro tanto ocurre en  $[a, c]$  y  $[c, b]$ . Dado  $\epsilon > 0$ , es posible encontrar una partición  $Q$  de  $[a, b]$  tal que  $U(f, Q) - L(f, Q) < \epsilon$ . Si llamamos  $P = Q \cup \{c\}$  esto implica que

$$U(f, P) - L(f, P) < \epsilon.$$

Los conjuntos  $P_1 = P \cap [a, c]$  y  $P_2 = P \cap [c, b]$  son claramente particiones de  $[a, c]$  y  $[c, b]$ , respectivamente. Además se verifica

$$\begin{aligned} U(f, P) - L(f, P) &= [U(f, P_1) - L(f, P_1)] + [U(f, P_2) - L(f, P_2)] \\ &< \epsilon \implies U(f, P_i) - L(f, P_i) < \epsilon, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

ya que ambos sumandos entre corchetes son no negativos. Esto prueba que  $f$  es integrable en  $[a, c]$  y en  $[c, b]$ . Además, como

$$\begin{aligned} L(f, P_1) &\leq \int_a^c f \leq U(f, P_1), \quad L(f, P_2) \leq \int_c^b f \leq U(f, P_2) \\ \implies L(f, P) &= L(f, P_1) + L(f, P_2) \leq \int_a^c f + \int_c^b f \\ &\leq U(f, P_1) + U(f, P_2) = U(f, P) \end{aligned}$$

y  $L(f, P) \leq \int_a^b f \leq U(f, P)$  entonces se tiene

$$\left| \int_a^c f + \int_c^b f - \int_a^b f \right| < \epsilon,$$

cualquiera que sea  $\epsilon > 0$ , lo cual demuestra (5.2).

$\Leftarrow$ ) Si  $f$  está definida y es acotada tanto en  $[a, c]$  como en  $[c, b]$  entonces lo mismo se cumple en  $[a, b] = [a, c] \cup [c, b]$ . Si  $\epsilon > 0$ , existen sendas particiones  $P_1$  y  $P_2$  de  $[a, c]$  y  $[c, b]$ , respectivamente, tales que

$$U(f, P_1) - L(f, P_1) < \frac{\epsilon}{2}, \quad U(f, P_2) - L(f, P_2) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Entonces  $P = P_1 \cup P_2$  es una partición de  $[a, b]$ , y se tiene

$$U(f, P) - L(f, P) = [U(f, P_1) - L(f, P_1)] + [U(f, P_2) - L(f, P_2)] < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Por tanto,  $f$  es integrable en  $[a, b]$ . La relación (5.2) se sigue entonces del apartado anterior. Q.E.D.

Hemos probado la propiedad de subdivisión para  $a < c < b$ . Si definimos

$$\int_a^a f = 0$$

y

$$\int_a^b f = - \int_b^a f \quad \text{si } a > b,$$

entonces no es difícil comprobar que la propiedad de subdivisión es cierta para tres números *arbitrarios*  $a, b, c \in \mathbf{R}$ . Por ejemplo, si  $a < b < c$  entonces

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f \implies \int_a^b f = \int_a^c f - \int_b^c f = \int_a^c f + \int_c^b f,$$

como antes.

Otra propiedad importante de la integral es la siguiente *propiedad de mayoración*:

**Proposición 5.13.** *Si  $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  son integrables en  $[a, b]$  y  $f(x) \leq g(x)$  para todo  $x \in [a, b]$  entonces se verifica*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

*En particular, si  $m \leq f(x) \leq M$  para todo  $x \in [a, b]$  entonces se cumple*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a). \quad (5.3)$$

*Demostración.* Si  $f(x) \leq g(x)$  para todo  $x \in [a, b]$  y  $P = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}[a, b]$  entonces

$$\inf \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \leq \inf \{g(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

lo que implica (al ser  $g$  integrable en  $[a, b]$ ) que

$$L(f, P) \leq L(g, P) \leq \int_a^b g, \quad \forall P \in \mathcal{P}[a, b].$$

Al ser  $f$  integrable en  $[a, b]$ , de esto último se sigue que

$$\int_a^b f = \int_a^b f = \sup \{L(f, P) : P \in \mathcal{P}[a, b]\} \leq \int_a^b g.$$

La segunda afirmación es consecuencia de la primera aplicada a  $f$  y a las funciones constantes  $m$  y  $M$ . Q.E.D.

- Si  $a = b$ , entonces (5.3) se cumple trivialmente. Si  $a > b$ ,  $f$  es integrable en  $[b, a]$  y  $m \leq f(x) \leq M$  para todo  $x \in [b, a]$  entonces se cumple

$$m(a - b) \leq \int_b^a f \leq M(a - b) \implies M(b - a) \leq \int_a^b f \leq m(b - a).$$

- Sea ahora  $a < b$ ,  $f$  integrable en  $[a, b]$  y  $|f(x)| \leq M$  para todo  $x \in [a, b]$ . Entonces  $-M \leq f(x) \leq M$  para todo  $x \in [a, b]$  implica

$$-M(b - a) \leq \int_a^b f \leq M(b - a)$$

y por tanto

$$\left| \int_a^b f \right| \leq M |b - a|. \tag{5.4}$$

Si  $a = b$ , esta desigualdad se cumple trivialmente. Y si  $a > b$  entonces

$$\left| \int_b^a f \right| \leq M |a - b| \implies \left| \int_a^b f \right| \leq M |b - a|.$$

Por tanto (5.4) se cumple para todo  $a, b \in \mathbf{R}$ .

*Ejercicio.* Sea  $a \leq c \leq b$  y sea  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  una función integrable en  $[a, b]$ .

- I) Probar que si  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  está definida por  $g(c) = 1$  y  $g(x) = 0$  para todo  $x \neq c$  entonces  $g$  es integrable en  $[a, b]$  y  $\int_a^b g = 0$ .
- II) Demostrar que si  $h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  cumple  $f = h$  en  $[a, b] - \{c\}$  y definimos  $h(c)$  de forma arbitraria entonces  $h$  es integrable en  $[a, b]$ , siendo  $\int_a^b h = \int_a^b f$ .
- III) Probar que si  $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  está definida en  $[a, b]$  y  $F = f$  en  $[a, b] - S$ , siendo  $S$  un subconjunto *finito* de  $[a, b]$ , entonces  $F$  es integrable en  $[a, b]$  y se verifica  $\int_a^b F = \int_a^b f$ .

Por tanto, *modificando el valor de una función*  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  *en un número finito de puntos de un intervalo*  $[a, b]$  *no se altera ni la integrabilidad de*  $f$  *ni el valor de*  $\int_a^b f$ .

Debido al último resultado del problema anterior podemos generalizar la definición de función integrable a una función  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  acotada en  $[a, b]$  y definida en  $[a, b] - S$ , siendo  $S$  un subconjunto finito de  $[a, b]$ . En efecto, diremos en este caso que  $f$  es integrable en  $[a, b]$  si una extensión cualquiera  $\tilde{f}$  de  $f$  a  $[a, b]$  es integrable en  $[a, b]$ , y definiremos en tal caso  $\int_a^b f = \int_a^b \tilde{f}$ . Por el último apartado del ejercicio anterior, ni la integrabilidad de  $f$  ni el valor de  $\int_a^b f$  dependen de la extensión  $\tilde{f}$  escogida. La generalización de  $\int_a^b f$  a funciones no acotadas en  $[a, b]$  es mucho más delicada, y será abordada más adelante.

### 5.3. Continuidad e integrabilidad

En esta sección demostraremos que si  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  es una función continua en  $[a, b]$  entonces  $f$  es integrable en  $[a, b]$ . Para probar este importante resultado necesitaremos primero introducir el concepto de *continuidad uniforme* que, aunque en estas notas será abordado casi de pasada tiene un gran interés en sí mismo:

**Definición 5.14.** Una función  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  es **uniformemente continua** en un intervalo  $J \subset \mathbf{R}$  si para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$x, y \in J, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

- Por ejemplo, la función identidad es obviamente uniformemente continua en cualquier intervalo.
- Si  $f$  es uniformemente continua en un intervalo  $J$  claramente  $f$  es continua en  $J$ , aunque el recíproco no tiene por qué ser cierto. Por ejemplo, si  $f(x) = x^2$  y  $J = [0, \infty)$  entonces  $f$  no es uniformemente continua en  $J$ . En efecto, cualquiera que sea  $\delta > 0$  si  $0 < x < y = x + \frac{\delta}{2}$  se tiene

$$|f(x) - f(y)| = y^2 - x^2 = (y + x)(y - x) = \frac{\delta}{2} \left( 2x + \frac{\delta}{2} \right) > x\delta > 1$$

si  $x > \frac{1}{\delta}$ . Otro ejemplo de función continua en un intervalo que no es uniformemente continua en dicho intervalo es la función definida por  $f(x) = 1/x$  para  $x \neq 0$ , en el intervalo  $(0, 1)$ .

Sin embargo, hay un caso muy importante en que la continuidad en un intervalo implica la continuidad uniforme. Para probar este resultado es conveniente demostrar primero un lema previo. Dado  $\epsilon > 0$ , diremos que  $f$  es

$\epsilon$ -buena en un intervalo  $J$  si existe  $\delta > 0$  tal que

$$x, y \in J, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Entonces se verifica:

**Lema 5.15.** *Si  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  es  $\epsilon$ -buena en  $[a, c]$  y  $[c, b]$  y es continua en  $c$ , entonces  $f$  es  $\epsilon$ -buena en  $[a, b]$ .*

En efecto, por hipótesis existen dos números positivos  $\delta_1$  y  $\delta_2$  tales que

$$x, y \in [a, c], |x - y| < \delta_1 \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon \quad (5.5)$$

y

$$x, y \in [c, b], |x - y| < \delta_2 \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon. \quad (5.6)$$

Además, al ser  $f$  continua en  $c$  existe  $\delta_3 > 0$  tal que

$$x \in (c - \delta_3, c + \delta_3) \implies |f(x) - f(c)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

y por tanto

$$\begin{aligned} x, y \in (c - \delta_3, c + \delta_3) &\implies |f(x) - f(y)| \\ &\leq |f(x) - f(c)| + |f(y) - f(c)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Sea  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ , y supongamos que  $x < y$  son dos puntos de  $[a, b]$  tales que  $|x - y| = y - x < \delta$ . Si  $x, y \in [a, c]$  ó  $x, y \in [c, b]$  entonces  $|f(x) - f(y)| < \epsilon$  por (5.5) ó (5.6), respectivamente. Y si  $x \leq c \leq y$  entonces  $y - x < \delta \leq \delta_3$  implica que tanto  $x$  como  $y$  pertenecen a  $(c - \delta_3, c + \delta_3)$ ,<sup>2</sup> y  $|f(x) - f(y)| < \epsilon$  por (5.7).

**Teorema 5.16.** *Si  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  es continua en  $[a, b]$  entonces  $f$  es uniformemente continua en  $[a, b]$ .*

*Demostración.* Dado  $\epsilon > 0$ , definimos el conjunto  $A \subset [a, b]$  mediante

$$A = \{x \in [a, b] : f \text{ es } \epsilon\text{-buena en } [a, x]\}.$$

Entonces  $A$  es no vacío (ya que  $a \in A$ ), y  $A$  está acotado superiormente (por  $b$ ), por lo que existirá  $z = \sup A$ . Claramente,  $z > a$ , ya que al ser  $f$  continua por la derecha en  $a$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$s \in [a, a + \delta) \implies |f(s) - f(a)| < \frac{\epsilon}{2},$$

---

<sup>2</sup>En efecto,

$$y - x = \underbrace{(y - c)}_{\geq 0} + \underbrace{(c - x)}_{\geq 0} < \delta \leq \delta_3 \implies 0 \leq y - c < \delta_3, \quad 0 \leq c - x < \delta_3.$$



y por tanto

$$\begin{aligned} x, y \in \left[ a, a + \frac{\delta}{2} \right] &\implies |f(x) - f(y)| \\ &\leq |f(x) - f(a)| + |f(y) - f(a)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned}$$

por lo que  $a + \frac{\delta}{2} \in A$ .

Veamos a continuación que  $z = b$ . En efecto, si fuera  $a < z < b$  entonces  $f$  sería continua en  $z$ , y por tanto existiría  $\delta > 0$  tal que  $f$  es  $\epsilon$ -buena en  $(z - \delta, z + \delta) \subset [a, b]$ . Por otra parte, por definición de supremo existe  $t \in (z - \delta, z] \cap A$ . Al ser  $t \in A$ ,  $f$  es  $\epsilon$ -buena en  $[a, t]$ . Como  $f$  es continua en  $t$  y es  $\epsilon$ -buena en  $[t, z + \frac{\delta}{2}] \subset (z - \delta, z + \delta)$ , entonces  $f$  es  $\epsilon$ -buena en  $[a, z + \frac{\delta}{2}]$ . Pero esto significa que  $z + \frac{\delta}{2} \in A$ , lo cual contradice la definición de  $z$  como el supremo de  $A$ .

Resta sólo por ver que  $b \in A$ , es decir que  $f$  es  $\epsilon$ -buena en  $[a, b]$ . Al ser  $f$  continua en  $b$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $f$  es  $\epsilon$ -buena en  $(b - \delta, b]$ . Por ser  $b = \sup A$ , existe  $t \in (b - \delta, b) \cap A$ . Si  $t = b$ , ya hemos terminado. Si  $t \in (b - \delta, b)$ , de lo anterior se deduce igual que antes que  $f$  es  $\epsilon$ -buena en  $[a, b]$ . Como esto es válido para todo  $\epsilon > 0$ ,  $f$  es uniformemente continua en  $[a, b]$ . *Q.E.D.*

Estamos ya en condiciones de probar el principal resultado de esta sección:

**Teorema 5.17.** *Si  $f$  es continua en  $[a, b]$  entonces  $f$  es integrable en  $[a, b]$ .*

*Demostración.* Sea  $\epsilon > 0$ . Como  $f$  es uniformemente continua en  $[a, b]$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$x, y \in [a, b], |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b - a}. \quad (5.8)$$

Sea  $P = \{x_0, \dots, x_n\}$  una partición de  $[a, b]$  tal que  $x_i - x_{i-1} < \delta$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Como  $f$  es continua en cada intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $f$  alcanzará sus valores mínimo y máximo en  $[x_{i-1}, x_i]$  en dos puntos  $y_i, z_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , es decir

$$m_i = f(y_i) \leq f(x) \leq M_i = f(z_i), \quad \forall x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, \dots, n.$$

Como  $|y_i - z_i| \leq x_i - x_{i-1} < \delta$ , aplicando (5.8) se obtiene

$$|f(y_i) - f(z_i)| = M_i - m_i < \frac{\epsilon}{b - a}, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Entonces

$$\begin{aligned} U(f, P) - L(f, P) &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^n \frac{\epsilon}{b - a} (x_i - x_{i-1}) \\ &= \frac{\epsilon}{b - a} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \frac{\epsilon}{b - a} \cdot (b - a) = \epsilon. \end{aligned}$$

Por la Proposición 5.9,  $f$  es integrable en  $[a, b]$ .

*Q.E.D.*

Diremos que  $f$  es una función **continua a trozos** en el intervalo  $[a, b]$  si existe una partición  $P = \{c_0, \dots, c_n\}$  de  $[a, b]$  tal que para  $i = 1, 2, \dots, n$   $f$  es continua en el intervalo  $(c_{i-1}, c_i)$ , y existen  $\lim_{x \rightarrow c_{i-1}^+} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow c_i^-} f(x)$ . Por el teorema anterior y el ejercicio 5.2,  $f$  es integrable en cada subintervalo  $[c_{i-1}, c_i]$  para  $i = 1, \dots, n$ , y por la propiedad de subdivisión  $f$  es integrable en  $[a, b]$ , siendo

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^n \int_{c_{i-1}}^{c_i} f.$$

Las funciones continuas a trozos no son las funciones integrables más generales. En efecto, Lebesgue demostró que una función acotada  $f$  es integrable en  $[a, b]$  si y sólo si el conjunto de discontinuidades de  $f$  en  $[a, b]$  es un conjunto de *medida cero* (es decir, puede ser recubierto por una familia numerable de intervalos la suma de cuyas longitudes sea menor que cualquier  $\epsilon > 0$ ). Por ejemplo, una función acotada en  $[a, b]$  cuyo conjunto de discontinuidades en dicho intervalo sea numerable es integrable en  $[a, b]$ .

## 5.4. El teorema fundamental del Cálculo

En esta sección estudiaremos el comportamiento de la integral de una función como función de su límite superior. La idea fundamental es que si  $f$  es integrable en  $[a, b]$  y  $F(x) = \int_a^x f$  entonces  $F$  es una función más regular que  $f$ . Por ejemplo, si  $f$  es integrable  $F$  es continua, y si  $f$  es continua entonces  $F$  es derivable. Empezaremos estableciendo la continuidad de  $\int_a^x f$  para cualquier función integrable  $f$ :

**Proposición 5.18.** *Si  $f$  es integrable en  $[a, b]$  y  $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  se define por  $F(x) = \int_a^x f$ , para todo  $x \in [a, b]$ , entonces  $F$  es continua en  $[a, b]$ .*

*Demostración.* Nótese, para empezar, que si  $f$  es integrable en  $[a, b]$  entonces  $f$  es integrable en  $[a, x]$  para todo  $x \in [a, b]$ ; por tanto,  $F$  está definida en  $[a, b]$ . Probemos, por ejemplo, que  $F$  es continua en  $c \in (a, b)$  (la continuidad de  $F$  por la derecha en  $a$  y por la izquierda en  $b$  se demuestra de forma totalmente análoga). En efecto, cualquiera que sea  $x \in [a, b]$  se tiene

$$F(x) - F(c) = \int_a^x f - \int_a^c f = \int_c^x f.$$

Como  $f$  es integrable en  $[a, b]$ , ha de estar acotada en dicho intervalo; existe por tanto  $M > 0$  tal que  $|f(x)| \leq M$  para todo  $x \in [a, b]$ , de donde se deduce que

$$|F(x) - F(c)| = \left| \int_c^x f \right| \leq M |x - c| \xrightarrow{x \rightarrow c} 0.$$

*Q.E.D.*

Veamos, a continuación, que si  $f$  es continua en  $[a, b]$  entonces  $\int_a^x f$  es derivable en  $[a, b]$ , y su derivada es igual a  $f$ :

**Teorema fundamental del Cálculo.** *Si  $f$  es integrable en  $[a, b]$  y continua en  $c \in [a, b]$ , y para todo  $x \in [a, b]$  definimos  $F(x) = \int_a^x f$ , entonces  $F$  es derivable en  $c$  y  $F'(c) = f(c)$ .*

*Nota.* Si  $c = a$ , la continuidad de  $f$  en  $c$  significa que  $f$  es continua por la derecha en  $c = a$ , y la igualdad  $F'(c) = f(c)$  debe entenderse como  $F'(a+0) = f(a)$ . Análogamente si  $c = b$ . A partir de ahora, utilizaremos sin mencionarlo este convenio.

*Demostración.* Probaremos, de nuevo, que si  $f$  es continua en  $c \in (a, b)$  entonces  $F$  es derivable en  $c$  y  $F'(c) = f(c)$ , dejando para el lector el caso análogo en que  $c$  es uno de los extremos del intervalo  $[a, b]$ . Si  $h \neq 0$  es tal que  $c + h \in [a, b]$  se tiene

$$\begin{aligned} |F(c+h) - F(c) - hf(c)| &= \left| \int_a^{c+h} f - \int_a^c f - hf(c) \right| \\ &= \left| \int_c^{c+h} (f - f(c)) \right| \leq M_h |h|, \end{aligned}$$

siendo

$$M_h = \begin{cases} \sup \{|f(x) - f(c)| : x \in [c, c+h]\}, & h > 0 \\ \sup \{|f(x) - f(c)| : x \in [c+h, c]\}, & h < 0. \end{cases}$$

(El supremo existe, ya que al ser  $f$  integrable en  $[a, b]$  es acotada en  $[a, b]$  y por tanto en  $[c, c+h]$  ó  $[c+h, c]$ , y lo mismo ocurre obviamente con  $f - f(c)$ .) Como  $f$  es continua en  $c$  por hipótesis,  $\lim_{h \rightarrow 0} M_h = 0$ . Por tanto

$$\left| \frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c) \right| \leq M_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

ó equivalentemente

$$F'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c).$$

*Q.E.D.*

**Corolario 5.19.** *Si  $f$  es continua en  $[a, b]$  y  $g' = f$  en  $[a, b]$  entonces  $\int_a^b f = g(b) - g(a)$ .*

*Demostración.* En efecto, como  $f$  es continua en  $[a, b]$  entonces la función definida para todo  $x \in [a, b]$  por  $F(x) = \int_a^x f$  cumple (teorema fundamental del Cálculo)  $F' = f = g'$  en  $[a, b]$ . Existe por tanto una constante  $c$  tal que

$F = g + c$  en  $[a, b]$ . De  $F(a) = 0 = g(a) + c$  se obtiene que  $c = -g(a)$ , de donde se sigue que

$$\int_a^b f = F(b) = g(b) + c = g(b) - g(a).$$

*Q.E.D.*

El corolario anterior es en realidad válido bajo la hipótesis más débil de que  $f$  sea integrable en  $[a, b]$ :

**Teorema** (regla de Barrow). *Si  $f$  es integrable en  $[a, b]$ ,  $g$  es continua en  $[a, b]$  y  $g' = f$  en  $(a, b)$ , entonces*

$$\int_a^b f = g(b) - g(a). \quad (5.9)$$

*Demostración.* Sea  $P = \{x_0, \dots, x_n\}$  una partición cualquiera de  $[a, b]$ . Como  $g$  es continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ ,  $g$  es continua en  $[x_{i-1}, x_i]$  y derivable en  $(x_{i-1}, x_i)$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ . Por el teorema del valor medio, existe  $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$  tal que

$$g(x_i) - g(x_{i-1}) = g'(c_i)(x_i - x_{i-1}) = f(c_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Como

$$m_i = \inf \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \leq f(c_i) \leq \sup \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = M_i,$$

se tiene

$$m_i(x_i - x_{i-1}) \leq g(x_i) - g(x_{i-1}) \leq M_i(x_i - x_{i-1}), \quad i = 1, \dots, n$$

de donde se sigue (sumando en  $i$  desde 1 hasta  $n$ )

$$L(f, P) \leq g(b) - g(a) \leq U(f, P).$$

Al ser esto cierto para cualquier partición  $P$  de  $[a, b]$ , y ser  $f$  integrable en  $[a, b]$ , (5.9) se sigue de la Proposición 5.7. *Q.E.D.*

El teorema fundamental del Cálculo admite múltiples generalizaciones elementales que es preciso conocer. En primer lugar, *si  $f$  es integrable en  $[a, b]$  y continua en  $x_0 \in [a, b]$ , y  $c \in [a, b]$ , la función  $F(x) = \int_c^x f$  es derivable en  $x_0$  con derivada  $F'(x_0) = f(x_0)$ .* En efecto,

$$F(x) = \int_a^x f - \int_a^c f,$$

siendo el segundo término una constante.

La fórmula para la derivada de la integral respecto del límite inferior se deduce fácilmente de lo anterior. En efecto, si  $f$  es integrable en  $[a, b]$  y continua en  $x_0 \in [a, b]$ , sea  $G(x) = \int_x^c f$ . Entonces  $G(x) = -\int_c^x f = -F(x)$ , y por tanto

$$G'(x_0) = -F'(x_0) = -f(x_0).$$

De lo anterior se deduce el siguiente resultado general: si  $f$  es integrable en un intervalo  $[\alpha, \beta]$ ,  $a, b : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  son derivables en  $x_0 \in [c, d]$ ,  $a(x), b(x) \in [\alpha, \beta]$  para todo  $x \in [c, d]$ , y  $f$  es continua en  $a(x_0)$  y en  $b(x_0)$ , entonces  $G(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f$  es derivable en  $x_0$ , y se cumple

$$G'(x_0) = f(b(x_0))b'(x_0) - f(a(x_0))a'(x_0).$$

En efecto, basta darse cuenta de que si  $\gamma \in [\alpha, \beta]$  entonces

$$\int_{a(x)}^{b(x)} f = \int_{a(x)}^{\gamma} f + \int_{\gamma}^{b(x)} f,$$

y aplicar la regla de la cadena (que se cumple también para derivadas laterales) a cada una de estas dos integrales.

## 5.5. Cálculo de primitivas

Llamaremos **primitiva** (ó **integral indefinida**) de una función  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  definida en un intervalo  $J$  a cualquier función  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  tal que  $g' = f$  en  $J$  (donde estamos utilizando el convenio de escribir  $g'(x)$  por  $g'(x+0)$  ó  $g'(x-0)$  si  $x$  es uno de los extremos de  $J$ ). Nótese que si  $g$  es una primitiva de  $f$  en un intervalo  $J$  entonces cualquier otra primitiva de  $f$  es de la forma  $g+c$  para alguna constante  $c$ . En efecto, si  $\tilde{g}$  es otra primitiva de  $f$  entonces  $(\tilde{g}-g)' = f-f=0$  en  $J$ , de donde se deduce (por ser  $J$  un intervalo) que  $\tilde{g}-g$  es constante en  $J$ . La importancia de conocer una primitiva de  $f$  se deriva de la regla de Barrow. En efecto, si conocemos una primitiva (continua)  $g$  de una función  $f$  integrable en  $[a, b]$  entonces  $\int_a^b f$  se calcula sencillamente evaluando  $g(b) - g(a)$ , que a partir de ahora denotaremos a veces por

$$g(x)|_{x=a}^{x=b} \quad \text{ó} \quad g(x)|_a^b.$$

Por ejemplo, si  $p \in \mathbf{R}$  entonces la igualdad

$$(x^{p+1})' = (p+1)x^p$$

es válida para todo  $x > 0$ , siendo el miembro derecho una función continua en  $(0, \infty)$ . Por tanto, si  $p \neq -1$  y  $0 < a < b$  dividiendo por  $p+1$  se obtiene

$$\int_a^b x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} \Big|_{x=a}^{x=b} = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}.$$

Esta fórmula se puede extender a valores arbitrarios de  $a$  y  $b$  para ciertos valores de  $p$ , por ejemplo para  $p \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ .

Si  $f$  es una función integrable en  $[a, b]$ ,  $f$  no tiene por qué tener ninguna primitiva. Por ejemplo, si  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  es la función definida por  $f(x) = 0$  si  $x \neq 0$  y  $f(0) = 1$  entonces  $f$  es integrable en  $[-1, 1]$ , pero puede probarse (ejercicio<sup>3</sup>) que  $f$  no tiene primitiva en  $[-1, 1]$ . Por otra parte, si  $f$  es continua en  $[a, b]$  el teorema fundamental del Cálculo asegura que una primitiva de  $f$  en  $[a, b]$  es la función  $x \mapsto \int_a^x f$ , y por tanto cualquier primitiva de  $f$  es de la forma  $(\int_a^x f) + c$  para alguna constante  $c$ . Debido a esto, utilizaremos a partir de ahora la notación

$$\int f \quad \text{ó} \quad \int f(x)dx$$

para denotar una primitiva cualquiera de  $f$  en un cierto intervalo. Es importante darse cuenta de que la notación  $\int f$  denota una primitiva *cualquiera* de  $f$ . En otras palabras, la notación

$$\int f = g$$

no es más que una abreviatura conveniente de la igualdad

$$g' = f.$$

Por tanto, podemos escribir

$$\int x^3 = \frac{x^4}{4}$$

y también

$$\int x^3 = \frac{x^4}{4} + 1,$$

sin que esto implique que  $\frac{x^4}{4} = \frac{x^4}{4} + 1$ . (En general,  $\int f = g_1$  e  $\int f = g_2$  en un intervalo  $J$  implica que  $g_2 = g_1 + c$  en  $J$  para alguna constante  $c$ .) Veremos en esta sección algunos métodos sencillos pero muy importantes para calcular primitivas de funciones elementales en términos de funciones elementales, cuando esto sea posible. (La primitiva de una función elemental no tiene por qué ser una función elemental. Por ejemplo, puede probarse que la primitiva de  $e^{x^2}$  no es una función elemental.) Antes de deducir estos métodos, conviene recordar que si  $g$  es una función elemental cuya derivada  $g' = f$  es conocida,

---

<sup>3</sup>Si  $g' = f$  en  $[-1, 1]$ , como  $f$  es integrable en  $[-1, x]$  para todo  $x \in [-1, 1]$  e  $\int_{-1}^x f = 0$  se tendría  $\int_{-1}^x f = g(x) - g(-1) = 0 \Rightarrow g$  constante en  $[-1, 1] \Rightarrow f = g' = 0$  en  $[-1, 1]$ .

entonces ya sabemos que  $\int f = g$ . Por ejemplo,

$$\begin{aligned}\int x^p dx &= \frac{x^{p+1}}{p+1}, \quad p \neq -1 \\ \int \frac{dx}{x} &= \log |x| \\ \int e^x dx &= e^x \\ \int \operatorname{sen} x dx &= -\cos x \\ \int \cos x dx &= \operatorname{sen} x \\ \int \sec^2 x dx &= \tan x \\ \int \operatorname{cosec}^2 x dx &= -\cot x \\ \int \frac{dx}{1+x^2} &= \arctan x \\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \operatorname{arc} \operatorname{sen} x\end{aligned}$$

Análogamente, de la igualdad entre derivadas

$$(\lambda F + \mu G)' = \lambda F' + \mu G', \quad \lambda, \mu \in \mathbf{R} \text{ constantes}$$

se sigue la igualdad entre primitivas

$$\int (\lambda f + \mu g) = \lambda \int f + \mu \int g.$$

*Ejercicio.* ¿Cómo debe interpretarse esta última fórmula?

*Solución.* Si  $f$  y  $g$  admiten una primitiva en un intervalo  $J$ , entonces otro tanto ocurre con  $\lambda f + \mu g$  para todo  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ , y se cumple la igualdad anterior. Nótese que la existencia de primitiva (por ejemplo) de  $f + g$  no implica la existencia de primitiva de  $f$  y de  $g$  por separado.  $\square$

### 5.5.1. Integración por partes

La fórmula de integración por partes es la versión en términos de primitivas de la regla de Leibniz:

**Teorema** (fórmula de integración por partes). *Si  $f'$  y  $g'$  son continuas en un intervalo  $[a, b]$  entonces*

$$\int (fg') = fg - \int (f'g) \quad \text{en } [a, b].$$

En particular,

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx.$$

*Demostración.* En efecto, al ser  $f$  y  $g$  derivables la regla de Leibniz afirma que

$$(fg)' = f'g + fg' \quad \text{en } [a, b].$$

Esto es equivalente a la igualdad

$$fg = \int (f'g + fg') = \int (f'g) + \int (fg') \quad \text{en } [a, b],$$

donde la segunda igualdad se debe a que, al ser  $f'$  y  $g'$  (y por tanto  $f$  y  $g$ ) continuas en  $[a, b]$ ,  $f'g$  y  $fg'$  son continuas en  $[a, b]$ , y por tanto admiten una primitiva en dicho intervalo. De esta última igualdad se sigue obviamente la fórmula de integración por partes, mientras que la última afirmación del teorema se deduce aplicando la regla de Barrow (Corolario 5.19), ya que  $f'g$  y  $fg'$  son continuas en  $[a, b]$ . *Q.E.D.*

**Ejemplo 5.20.** La regla de integración por partes nos permite calcular las primitivas de algunas funciones elementales importantes. Por ejemplo,

$$\int \log x dx = \int (x)' \log x dx = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x(\log x - 1).$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} \int \arctan x dx &= \int (x)' \arctan x dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2). \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.21.** La primitiva de un polinomio es otro polinomio, que se calcula fácilmente utilizando la fórmula para la primitiva de  $x^n$  con  $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ . Si  $P$  es un polinomio y  $f$  es una función (por ejemplo) infinitamente diferenciable con una primitiva  $g$  conocida, la regla de Leibniz proporciona

$$\int P(x)f(x) dx = \int P(x)g'(x) dx = P(x)g(x) - \int P'(x)g(x) dx,$$

donde aparece la integral de  $g$  por un polinomio de grado inferior en una unidad al de  $P$ . Si  $\int g$  es también conocida, se puede aplicar la regla de Leibniz para simplificar la última integral, y así sucesivamente. En particular, si  $f(x) = e^x$  ó  $f(x) = \sin x$  ó  $f(x) = \cos x$ , todas cuyas primitivas sucesivas son conocidas, es claro que este método permite calcular  $\int P(x)f(x) dx$  para cualquier polinomio  $P$ . Por ejemplo,

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2 \int e^x dx = (x^2 - 2x + 2)e^x.$$



Un poco más complicada es la evaluación de la siguiente integral:

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx$$

lo que implica

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x)$$

y

$$\int e^x \sin x \, dx = \int e^x \cos x \, dx - e^x \cos x = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x).$$

### 5.5.2. Cambio de variable

El siguiente método de integración (integración por sustitución ó cambio de variable) es la versión integral de la regla de la cadena:

**Teorema 5.22.** *Sea  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  una función con derivada continua en  $[a, b]$ , y sea  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  continua en  $g([a, b])$ . Si  $F$  es una primitiva de  $f$  en  $g([a, b])$  entonces se cumple*

$$\int f(g(x))g'(x) \, dx = F(g(x)). \quad (5.10)$$

En particular,

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) \, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \, du. \quad (5.11)$$

*Demostración.* En primer lugar, al ser  $g$  continua en  $[a, b]$   $g([a, b])$  es un intervalo. La continuidad de  $f$  en  $g([a, b])$  garantiza a su vez la existencia de una primitiva de  $f$  en dicho intervalo (por ejemplo, puede tomarse  $F(x) = \int_c^x f$ , siendo  $c$  un punto cualquiera de  $g([a, b])$ ). Aplicando la regla de la cadena a la función  $F \circ g$  se obtiene

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

Por tanto  $F \circ g$  es una primitiva de la función  $(f \circ g)g'$ , que es exactamente lo que afirma (5.10). Por otra parte, al ser  $(f \circ g)g'$  continua en  $[a, b]$  por las hipótesis acerca de  $f$  y  $g$ , la regla de Barrow afirma que  $\int_a^b (f \circ g)g' = \int_a^b f(g(x))g'(x) \, dx$  es igual a  $G(b) - G(a)$ , siendo  $G$  cualquier primitiva de dicha función. Tomando (por la parte anterior)  $G = F \circ g$  con  $F(x) = \int_c^x f$  se obtiene (5.11). Q.E.D.

La fórmula (5.10), que expresa el comportamiento de  $\int f(u)du$  bajo el cambio de variable  $u = g(x)$ , se escribe normalmente de la siguiente forma, menos precisa pero más sugestiva y fácil de recordar:

$$\int f(g(x))g'(x) \, dx = \left[ \int f(u) \, du \right]_{u=g(x)}. \quad (5.12)$$

Este método de hallar primitivas efectuando un cambio de variable adecuado es muy poderoso y flexible, pero tiene el inconveniente de depender esencialmente de la habilidad en escoger el cambio de variable indicado en cada caso, lo cual escapa a la sistematización.

**Ejemplo 5.23.** Calculemos una primitiva de  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ , función elemental sencilla que no aparece en nuestra tabla de integrales elementales. Utilizando la notación del Teorema anterior, vamos a realizar el cambio de variable  $u = \operatorname{sen} x$  en la integral  $\int \sqrt{1-u^2} du$ . Nótese que  $g(x) = \operatorname{sen} x$  tiene derivada continua en todo  $\mathbf{R}$ ,  $f(u) = \sqrt{1-u^2}$  está definida y es continua para  $u \in [-1, 1]$ , y  $\operatorname{sen} x \in [-1, 1]$  para todo  $x \in \mathbf{R}$ . Por tanto, como intervalo  $[a, b]$  (siguiendo de nuevo exactamente la misma notación que en el enunciado del Teorema 5.22) podemos tomar en principio cualquier intervalo. Lo más conveniente es tomar  $[a, b] = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , porque  $\operatorname{sen}([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [-1, 1] = \operatorname{dom} f$  y en dicho intervalo  $\operatorname{sen}$  es invertible y  $\operatorname{sen}^{-1} = \operatorname{arc} \operatorname{sen}$ . Utilizando la ec. (5.12) obtenemos:

$$\left[ \int \sqrt{1-u^2} du \right]_{u=\operatorname{sen} x} = \int \underbrace{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}}_{f(g(x))} \cdot \underbrace{\cos x}_{g'(x)} dx = \int \cos^2 x dx,$$

porque  $\cos x \geq 0$  en el intervalo  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Esta última integral se calcula fácilmente utilizando la identidad trigonométrica  $\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2$ :

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left( x + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x \right) = \frac{1}{2} (x + \operatorname{sen} x \cos x).$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \left[ \int \sqrt{1-u^2} du \right]_{u=\operatorname{sen} x} &= \frac{1}{2} \left( x + \operatorname{sen} x \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x} \right) \\ &\iff \int \sqrt{1-u^2} du = \frac{1}{2} \left( \operatorname{arc} \operatorname{sen} u + u \sqrt{1-u^2} \right) \end{aligned}$$

(ya que  $u = \operatorname{sen} x$  si y sólo si  $x = \operatorname{arc} \operatorname{sen} u$  si  $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ). En particular, el área del círculo de radio unidad está dada por

$$4 \int_0^1 \sqrt{1-u^2} du = 2 \left( \operatorname{arc} \operatorname{sen} u + u \sqrt{1-u^2} \right) \Big|_0^1 = 2 \left( \frac{\pi}{2} + 0 - 0 - 0 \right) = \pi.$$

(Para un círculo de radio  $R > 0$ , basta hacer el cambio de variable  $x = Ru$  en la integral  $4 \int_0^R \sqrt{R^2-x^2} dx$ , obteniéndose

$$4 \int_0^R \sqrt{R^2-x^2} dx = 4 \int_0^1 R \sqrt{1-u^2} \cdot R du = \pi R^2.)$$

### 5.5.3. Integración de funciones racionales

La integral de un polinomio arbitrario de grado  $n$  es un polinomio de grado  $n+1$ , calculable fácilmente a partir de la integral  $\int x^k dx = x^{k+1}/(k+1)$  (si  $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ ) y las propiedades de linealidad de la integral:

$$\int \sum_{k=0}^n a_k x^k dx = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}.$$

Si  $f$  es una función racional, su integral no tiene por qué ser otra función racional; por ejemplo,  $\int dx/x = \log|x|$  ó  $\int dx/(x^2+1) = \arctan x$ . Sin embargo, puede probarse que  $\int f$  es siempre una función elemental, calculable explícitamente por un algoritmo que resumiremos a continuación.

En primer lugar (dividiendo si es preciso el numerador de  $f$  por su denominador) siempre podemos escribir

$$f(x) = S(x) + \frac{P(x)}{Q(x)},$$

siendo  $S$ ,  $P$  y  $Q$  polinomios con  $\text{gr } P < \text{gr } Q$  (nótese que  $S = 0$  si el grado del numerador de  $f$  es menor que el de su denominador). Basta por tanto considerar la integral de la función racional  $P/Q$  con  $\text{gr } P < \text{gr } Q$ .

Se demuestra en los cursos de Álgebra Lineal y Variable Compleja que el polinomio  $Q$  se puede factorizar como sigue:

$$Q(x) = c(x-x_1)^{r_1} \cdots (x-x_k)^{r_k} [(x-a_1)^2 + b_1^2]^{q_1} \cdots [(x-a_m)^2 + b_m^2]^{q_m},$$

siendo  $r_i, q_j \geq 1$  y  $b_j > 0$  para todo  $i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, m$ . Los números  $x_i \in \mathbf{R}$  son las raíces reales de  $Q$ , de multiplicidad  $r_i$ , y los números complejos  $a_j \pm ib_j \in \mathbf{C}$  son las raíces complejas de dicho polinomio, de multiplicidad  $q_j$ . (Nótese que  $k$  ó  $m$  son iguales a cero si  $Q$  no tiene raíces reales ó complejas, respectivamente.) Nos apoyaremos a continuación en un resultado que se demuestra en los cursos de Variable Compleja (véase por ejemplo el libro *Análisis de Variable Compleja* (ed. Aguilar, 1971) de Lars V. Ahlfors): la función racional  $P/Q$  se puede descomponer en la suma de **fracciones simples**

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_{11}}{x-x_1} + \cdots + \frac{A_{1r_1}}{(x-x_1)^{r_1}} + \cdots \\ &+ \frac{A_{k1}}{x-x_k} + \cdots + \frac{A_{kr_k}}{(x-x_k)^{r_k}} \\ &+ \frac{B_{11}x + C_{11}}{(x-a_1)^2 + b_1^2} + \cdots + \frac{B_{1q_1}x + C_{1q_1}}{[(x-a_1)^2 + b_1^2]^{q_1}} + \cdots \\ &+ \frac{B_{m1}x + C_{m1}}{(x-a_m)^2 + b_m^2} + \cdots + \frac{B_{mq_m}x + C_{mq_m}}{[(x-a_m)^2 + b_m^2]^{q_m}}. \end{aligned}$$

Basta por tanto con saber calcular las siguientes integrales:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x-a)^n} &= \int (x-a)^{-n} dx = \frac{(x-a)^{1-n}}{1-n}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad n > 1, \\ \int \frac{dx}{x-a} &= \log|x-a|, \\ \int \frac{Cx+D}{[(x-a)^2+b^2]^n} dx, \quad b &\neq 0.\end{aligned}$$

Esta última integral se simplifica primero mediante el cambio de variable  $x-a=bu$ , que la transforma en una integral más simple del tipo

$$\int \frac{Au+B}{(u^2+1)^n} du = A \int \frac{u du}{(u^2+1)^n} + B \int \frac{du}{(u^2+1)^n}.$$

La primera integral se evalúa fácilmente mediante el cambio  $u^2+1=v$ , obteniéndose

$$\begin{aligned}\int \frac{u}{(u^2+1)^n} du &= \frac{1}{2} \int v^{-n} dv \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} \log|v| = \frac{1}{2} \log(u^2+1), & n=1 \\ \frac{v^{1-n}}{2(1-n)} = \frac{(u^2+1)^{1-n}}{2(1-n)}, & n>1. \end{cases}\end{aligned}$$

Por tanto, el problema de integrar una función racional arbitraria se reduce en última instancia al problema de calcular la integral

$$I_n(u) = \int \frac{du}{(u^2+1)^n}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Si  $n=1$ , ya hemos visto que  $I_1(u) = \arctan u$ . Si  $n \in \mathbf{N}$ , integrando por partes obtenemos

$$\begin{aligned}I_n(u) &= u \cdot \frac{1}{(u^2+1)^n} - \int u \cdot \frac{-2nu}{(u^2+1)^{n+1}} du = \frac{u}{(u^2+1)^n} + 2n \int \frac{u^2 du}{(u^2+1)^{n+1}} \\ &= \frac{u}{(u^2+1)^n} + 2n[I_n(u) - I_{n+1}(u)].\end{aligned}$$

En consecuencia

$$I_{n+1}(u) = \frac{2n-1}{2n} I_n(u) + \frac{1}{2n} \frac{u}{(u^2+1)^n}, \quad \forall n \in \mathbf{N},$$

fórmula que permite calcular recurrentemente  $I_n(u)$  para todo  $n \in \mathbf{N}$  a partir de  $I_1(u) = \arctan u$ . Por lo tanto, hemos demostrado que *la integral de una función racional es una función elemental expresable en términos de funciones racionales, logaritmos y arcotangentes*.

### 5.5.4. Integrales reducibles a integrales de funciones racionales

i) Las integrales del tipo

$$\int R(e^x) dx, \quad R \text{ función racional,}$$

se reducen a la integral de una función racional mediante el cambio de variable

$$u = e^x, \quad du = e^x dx \implies dx = \frac{du}{u}.$$

En efecto,

$$\int R(e^x) dx = \left[ \int \frac{R(u)}{u} du \right]_{u=e^x}.$$

*Ejemplo:*

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+e^x} &= \int \frac{du}{u(1+u)} = \int \left( \frac{1}{u} - \frac{1}{1+u} \right) = \log|u| - \log|1+u| \\ &= \log e^x - \log(1+e^x) = x - \log(1+e^x). \end{aligned}$$

ii) La integral

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x) dx,$$

donde  $R(s, t)$  es una función racional de dos variables  $s$  y  $t$ , se reduce también a la integral de una función racional mediante el cambio

$$u = \tan \frac{x}{2}, \quad du = \frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2}(1+u^2) dx \implies dx = \frac{2 du}{1+u^2}.$$

Como

$$\begin{aligned} \cos x &= 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{\sec^2 \frac{x}{2}} - 1 = \frac{2}{1+u^2} - 1 = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \\ \operatorname{sen} x &= 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \frac{\tan \frac{x}{2}}{\sec^2 \frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2}, \end{aligned}$$

se obtiene

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x) dx = \left[ \int \frac{2}{1+u^2} R \left( \frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2} \right) du \right]_{u=\tan(x/2)}.$$

*Ejemplo:*

$$\begin{aligned} \int \sec x dx &= \int \frac{1+u^2}{1-u^2} \frac{2du}{1+u^2} = \int \left( \frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} \right) du \\ &= \log|1+u| - \log|1-u| = \log \left| \frac{1+\tan \frac{x}{2}}{1-\tan \frac{x}{2}} \right| = \log \left| \tan \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|. \end{aligned}$$

Como

$$\frac{1 + \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{x}{2}} = \frac{(1 + \tan \frac{x}{2})^2}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}} + \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}} = \sec x + \tan x,$$

también podemos escribir

$$\int \sec x \, dx = \log |\sec x + \tan x|.$$

iii) Las integrales de la forma

$$\int R \left( x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}} \right) dx,$$

donde de nuevo  $R$  es una función racional de dos variables y

$$\Delta = ad - bc \neq 0,$$

también se reducen a la integral de una función racional mediante el cambio de variable

$$u = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}} \implies x = \frac{du^2 - b}{a - cu^2}.$$

En efecto,

$$du = \frac{\Delta}{2u} \frac{dx}{(cx+d)^2} = \frac{(a - cu^2)^2}{2\Delta u} dx$$

de donde

$$\int R \left( x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}} \right) dx = 2\Delta \left[ \int \frac{u}{(a - cu^2)^2} R \left( \frac{du^2 - b}{a - cu^2}, u \right) du \right]_{u=\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}}.$$

En particular, si  $R$  es una función racional de dos variables la integral

$$\int R(x, \sqrt{ax+b}) \, dx, \quad a \neq 0,$$

se convierte mediante el cambio

$$u = \sqrt{ax+b}$$

en la integral de una función racional:

$$\int R(x, \sqrt{ax+b}) \, dx = \frac{2}{a} \left[ \int R \left( \frac{u^2 - b}{a}, u \right) u \, du \right]_{u=\sqrt{ax+b}}.$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx &= -4 \int \frac{u^2}{(1+u^2)^2} du = -4 \arctan u + 4 \int \frac{du}{(1+u^2)^2} \\ &= -4 \arctan u + 4 \left( \frac{1}{2} \arctan u + \frac{1}{2} \frac{u}{1+u^2} \right) \\ &= -2 \arctan u + \frac{2u}{1+u^2} = -2 \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + (1+x) \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \\ &= \sqrt{1-x^2} - 2 \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado que  $\sqrt{(1-x)/(1+x)}$  está definido si y sólo si  $x \in (-1, 1]$ . Nótese que en este ejemplo

$$u^2 = \frac{1-x}{1+x} = -1 + \frac{2}{1+x} \implies 1+x = \frac{2}{1+u^2} \implies dx = -\frac{4u du}{(1+u^2)^2}.$$

iv) Las integrales del tipo

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx, \quad a \neq 0, \Delta = b^2 - 4ac \neq 0,$$

donde  $R$  es una función racional de dos variables, *no* se transforman en integrales de funciones racionales mediante el cambio  $u = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ . Para racionalizar esta integral, se efectúa en primer lugar un cambio de variable lineal

$$ax + \frac{b}{2} = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2} u$$

que la transforma en uno de los tres tipos más sencillos siguientes:

- a)  $\int \tilde{R}(u, \sqrt{1-u^2}) du \quad (a < 0, \Delta > 0)$
- b)  $\int \tilde{R}(u, \sqrt{u^2-1}) du \quad (a > 0, \Delta > 0)$
- c)  $\int \tilde{R}(u, \sqrt{1+u^2}) du \quad (a > 0, \Delta < 0),$

donde  $\tilde{R}$  es de nuevo una función racional de dos variables. Si la integral es del tipo a), el cambio de variable

$$u = \sin t, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

(ó  $u = \cos t$ ) la reduce a una del tipo ii):

$$\int \tilde{R}(u, \sqrt{1-u^2}) du = \left[ \int \tilde{R}(\sin t, \cos t) \cos t dt \right]_{t=\arcsen u}$$

(donde se ha tenido en cuenta que  $\cos t \geq 0$  si  $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ ). Análogamente, el cambio de variable

$$u = \sec t, \quad t \in [0, \pi] - \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$$

convierte una integral del tipo b) en una integral del tipo ii):

$$\int \tilde{R}(u, \sqrt{u^2 - 1}) du = \left[ \int \tilde{R}(\sec t, \pm \tan t) \sec t \tan t dt \right]_{t=\operatorname{arcsec} u},$$

donde el signo + (resp. -) corresponde a  $u \geq 1$  (resp.  $u \leq -1$ ).

*Ejemplo:*

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} &= \pm \int \frac{1}{\tan t} \cdot \sec t \tan t dt \\ &= \pm \int \sec t dt = \pm \log |\sec t + \tan t| = \pm \log \left| u \pm \sqrt{u^2 - 1} \right|, \end{aligned}$$

ó más precisamente

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \begin{cases} \log \left| u + \sqrt{u^2 - 1} \right|, & u \geq 1 \\ -\log \left| u - \sqrt{u^2 - 1} \right|, & u \leq -1. \end{cases}$$

Sin embargo,

$$\begin{aligned} -\log \left| u - \sqrt{u^2 - 1} \right| &= \log \frac{1}{\left| u - \sqrt{u^2 - 1} \right|} \\ &= \log \frac{\left| u + \sqrt{u^2 - 1} \right|}{\left| u^2 - (u^2 - 1) \right|} = \log \left| u + \sqrt{u^2 - 1} \right|, \end{aligned}$$

lo que nos permite escribir

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \log \left| u + \sqrt{u^2 - 1} \right|, \quad |u| \geq 1.$$

Finalmente, una integral del tipo c) se convierte de nuevo en una integral del tipo ii) mediante el cambio

$$u = \tan t, \quad t \in \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right).$$

En efecto,

$$\int \tilde{R}(u, \sqrt{1 + u^2}) du = \left[ \int \tilde{R}(\tan t, \sec t) \sec^2 t dt \right]_{t=\arctan u}.$$



*Ejemplo:*

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} &= \int \cos t \sec^2 t dt = \int \sec t dt \\ &= \log |\sec t + \tan t| = \log(u + \sqrt{1+u^2}), \end{aligned}$$

ya que  $u + \sqrt{1+u^2} > 0$  para todo  $u \in \mathbf{R}$ .

*Nota.* Las integrales de los tipos iv.b) y iv.c) se pueden también reducir a integrales de funciones racionales mediante los cambios  $u = \operatorname{ch} t$  y  $u = \operatorname{sh} t$ , respectivamente.

**Ejemplo 5.24.**

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+x^2} dx &= \int \sec^3 t dt \quad (x = \tan t) \\ &= \int \sec t (\tan t)' dt = \sec t \tan t - \int \tan t \cdot \sec t \tan t dt \\ &= \sec t \tan t - \int \sec t (\sec^2 t - 1) dt, \end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$\int \sec^3 t dt = \frac{1}{2} [\sec t \tan t + \log |\sec t + \tan t|]$$

y por tanto

$$\int \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \left[ x\sqrt{1+x^2} + \log(x + \sqrt{1+x^2}) \right].$$

**Ejemplo 5.25.**

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2-1} dx &= x\sqrt{x^2-1} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} dx \\ &= x\sqrt{x^2-1} - \log |x + \sqrt{x^2-1}| - \int \sqrt{x^2-1} dx \end{aligned}$$

de donde

$$\int \sqrt{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \left( x\sqrt{x^2-1} - \log |x + \sqrt{x^2-1}| \right).$$

## 5.6. Integrales impropias

### 5.6.1. Integrales impropias de primera especie

Definiremos, en primer lugar, la **integral impropia de primera especie**

$$\int_a^\infty f$$

a partir del concepto de integral de una función en un intervalo acotado  $[a, b]$ .

**Definición 5.26.** Sea  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  una función integrable en  $[a, b]$  para todo  $b > a$ . Diremos que la integral  $\int_a^\infty f$  es **convergente** si existe el límite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f.$$

Si  $\int_a^\infty f$  es convergente, definimos el valor de dicha integral por

$$\int_a^\infty f = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f.$$

Las propiedades de linealidad, subdivisión y mayoración se cumplen también para integrales impropias de primera especie, cuando dichas integrales son convergentes. En otras palabras, si  $\int_a^\infty f$  e  $\int_a^\infty g$  son convergentes y  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$  se tiene:

I)  $\int_a^\infty (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^\infty f + \mu \int_a^\infty g$

II) Si  $c > a$ ,  $\int_c^\infty f$  es convergente si y sólo si  $\int_a^\infty f$  lo es, y se cumple

$$\int_a^\infty f = \int_a^c f + \int_c^\infty f$$

III) Si  $f(x) \leq g(x)$  para todo  $x \geq a$  entonces

$$\int_a^\infty f \leq \int_a^\infty g$$

Se deja para el lector la demostración de estas afirmaciones, que se siguen fácilmente de las propiedades análogas de la integral ordinaria y de las propiedades de los límites.

**Ejemplo 5.27.** Estudiemos la convergencia de la integral impropia  $\int_1^\infty x^p dx$ , en función del exponente  $p \in \mathbf{R}$ . Se tiene:

$$\int_1^x t^p dt = \begin{cases} \frac{x^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1}, & p \neq -1; \\ \log x, & p = -1. \end{cases}$$

Si  $p = -1$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \log x$  no existe. Si  $p \neq -1$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{p+1}}{p+1}$  existe si y sólo si  $p + 1 < 0$ , y vale 0. Por tanto, la integral  $\int_1^\infty x^p dx$  es convergente si y sólo si  $p < -1$ , y su valor es

$$\int_1^\infty x^p dx = -\frac{1}{p+1}, \quad p < -1.$$

**Ejemplo 5.28.** La integral impropia  $\int_0^\infty \cos x \, dx$  es divergente (es decir, no es convergente). En efecto,

$$\int_0^x \cos t \, dt = \operatorname{sen} x$$

no tiene límite cuando  $x \rightarrow \infty$ . Lo mismo ocurre con la integral  $\int_0^\infty \operatorname{sen} x \, dx$ .

**Ejemplo 5.29.** La integral  $\int_0^\infty e^{-ax} \, dx$  es convergente si y sólo si  $a > 0$ , y su valor en tal caso es  $1/a$ . En efecto, si  $a = 0$  la integral  $\int_0^\infty dx$  claramente diverge. Si  $a \neq 0$ ,

$$\int_0^x e^{-at} \, dt = - \left. \frac{e^{-at}}{a} \right|_{t=0}^{t=x} = \frac{1}{a}(1 - e^{-ax}) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{1}{a}, \quad a > 0.$$

**Ejemplo 5.30.** Veamos que

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

En efecto,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}.$$

Un caso particularmente importante es aquél en que  $f$  es no negativa en  $[a, \infty)$ . En este caso  $F(x) = \int_a^x f$  es una función no decreciente en  $[a, \infty)$ , ya que

$$a \leq x < y \implies F(y) - F(x) = \int_a^y f - \int_a^x f = \int_x^y f \geq 0.$$

Consideremos el conjunto  $A = F([a, \infty))$ , es decir

$$A = \left\{ \int_a^x f : x \geq a \right\}.$$

Si este conjunto no es acotado superiormente entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f = \infty.$$

En efecto, si  $A$  no está acotado superiormente para todo  $M \in \mathbf{R}$  existe  $c \geq a$  tal que  $F(c) = \int_a^c f > M$ . Pero, al ser  $F$  no decreciente, se cumple entonces

$$x \geq c \implies F(x) = \int_a^x f > M. \quad (5.13)$$

Luego cualquiera que sea  $M \in \mathbf{R}$  existe  $c \geq a$  tal que se cumple (5.13), lo que por definición significa que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f = \infty$ . Diremos, en este caso, que  $\int_a^\infty f$  **diverge a**  $\infty$ , y escribiremos

$$\int_a^\infty f = \infty.$$

Por otra parte, veamos que si  $A$  está acotado superiormente entonces la integral  $\int_a^\infty f$  es convergente y su valor es igual a  $\sup A$ . En efecto, si  $A$  está acotado superiormente existirá  $z = \sup A$ . Por definición de supremo, para todo  $\epsilon > 0$  existe  $c \geq a$  tal que

$$z - \epsilon < F(c) = \int_a^c f \leq z.$$

Aplicando, de nuevo, que  $F$  es no decreciente se obtiene

$$x \geq c \implies z - \epsilon < F(c) \leq F(x) = \int_a^x f \leq z,$$

lo cual implica que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f = z,$$

como habíamos afirmado. Hemos probado por tanto el siguiente resultado:

**Proposición 5.31.** *Si  $f$  es integrable y no negativa en  $[a, \infty)$ , la integral impropia  $\int_a^\infty f$  es convergente si y sólo si  $F(x) = \int_a^x f$  está acotada superiormente en  $[a, \infty)$ . En tal caso  $\int_a^\infty f$  es igual al supremo de  $F$  en dicho conjunto, y en caso contrario (es decir, si  $F$  no está acotada superiormente en  $[a, \infty)$ ) se tiene  $\int_a^\infty f = \infty$ .*

El siguiente **criterio de comparación** es muy útil a la hora de estudiar la convergencia de integrales impropias de primera especie:

**Proposición 5.32.** *Sean  $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  dos funciones integrables en  $[a, b]$  para todo  $b > a$ , y supongamos que existe  $c \geq a$  tal que  $0 \leq f(x) \leq g(x)$  para todo  $x \geq c$ . Entonces se verifica:*

- I)  $\int_a^\infty g$  convergente  $\implies \int_a^\infty f$  convergente
- II)  $\int_a^\infty f$  divergente  $\implies \int_a^\infty g$  divergente

*Demostración.* Claramente ii) es consecuencia de i). En cuanto a i), nótese que si  $\int_a^\infty g$  es convergente entonces, al ser  $g$  no negativa en  $[c, \infty)$  se tendrá

$$\int_c^x g \leq \int_c^\infty g, \quad \forall x \geq c$$

(ya que  $\int_c^\infty g$  es el supremo de  $G(x) = \int_c^x g$  en  $[c, \infty)$  por la proposición anterior). Al ser

$$\int_c^x f \leq \int_c^x g \leq \int_c^\infty g$$

$\int_c^x f$  está acotada para  $x \geq c$ , lo cual implica (al ser  $f$  no negativa en  $[c, \infty)$ ) que  $\int_c^\infty f$ , y por tanto también  $\int_a^\infty f$ , es convergente. *Q.E.D.*

**Corolario 5.33.** Sean  $f, g, h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  funciones integrables en  $[a, b]$  para todo  $b > a$ . Si existe  $c \geq a$  tal que

$$x \geq c \implies g(x) \leq f(x) \leq h(x),$$

y las integrales  $\int_a^\infty g$  e  $\int_a^\infty h$  son convergentes, entonces la integral  $\int_a^\infty f$  es convergente.

*Demostración.* En efecto,  $f - g$  y  $h - g$  son integrables en  $[a, b]$  para todo  $b > a$  y satisfacen

$$x \geq c \implies 0 \leq f(x) - g(x) \leq h(x) - g(x).$$

Como  $\int_a^\infty (h - g) = \int_a^\infty h - \int_a^\infty g$  es convergente, por la proposición anterior  $\int_a^\infty (f - g)$  es convergente, y por tanto  $\int_a^\infty f = \int_a^\infty [(f - g) + g]$  es también convergente. Q.E.D.

**Teorema** (criterio de comparación por paso al límite). Sean  $f$  y  $g$  integrables en  $[a, b]$  para todo  $b > a$ , con  $g(x) > 0$  para todo  $x \geq c \geq a$ . Si existe  $l = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$  (donde se admite que  $l = \pm\infty$ ) se cumple:

- I) Si  $0 \neq l \in \mathbf{R}$ , las integrales  $\int_a^\infty f$  y  $\int_a^\infty g$  tienen el mismo carácter (es decir, ó ambas son convergentes ó ambas son divergentes).
- II) Si  $l = 0$  y  $\int_a^\infty g$  es convergente, entonces  $\int_a^\infty f$  es convergente.
- III) Si  $l = \pm\infty$  y  $\int_a^\infty g$  es divergente, entonces  $\int_a^\infty f$  es divergente.

*Demostración.* En primer lugar, como  $\int_a^\infty f$  y  $\int_a^\infty (-f)$  tienen el mismo carácter, podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $l \geq 0$  ó  $l = \infty$ . Supongamos que  $l > 0$ ; entonces existe  $M > c$  tal que

$$x \geq M \implies 0 < \frac{l}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3l}{2},$$

ó equivalentemente (al ser  $g(x) > 0$ )

$$x \geq M \implies 0 < \frac{l}{2} g(x) < f(x) < \frac{3l}{2} g(x),$$

lo cual claramente implica la parte i) por el criterio de comparación. Si  $l = 0$ , de nuevo existe  $M > c$  tal que (por ejemplo)

$$-1 < \frac{f(x)}{g(x)} < 1 \iff -g(x) < f(x) < g(x), \quad \forall x \geq M,$$

y la convergencia de  $\int_a^\infty f$  se sigue de la de  $\int_a^\infty g$  por el teorema de comparación. Finalmente, si  $l = \infty$  entonces existe  $M > c$  tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 1 \iff f(x) > g(x), \quad \forall x \geq M,$$

lo que, de nuevo por el teorema de comparación, implica la divergencia de  $\int_a^\infty f$  si  $\int_a^\infty g$  es divergente. Q.E.D.

**Ejemplo 5.34.** Sean  $P \neq 0$  y  $Q$  polinomios, con  $Q(x) \neq 0$  para  $x \geq a$ , y sean  $p = \text{gr } P$ ,  $q = \text{gr } Q$ . Entonces  $\int_a^\infty \frac{P(x)}{Q(x)} dx$  es convergente si y sólo si  $q \geq p + 2$ .

En primer lugar, la no anulación de  $Q$  en  $[a, \infty)$  implica que  $P/Q$  es continua, y por tanto integrable, en  $[a, b]$  para todo  $b > a$ . Además, se tiene

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_p x^p + \cdots + a_0}{b_q x^q + \cdots + b_0} = x^{p-q} \frac{a_p + \cdots + \frac{a_0}{x^p}}{b_q + \cdots + \frac{b_0}{x^q}} \equiv x^{p-q} h(x),$$

siendo  $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = a_p/b_q \neq 0$  (nótese que  $a_p$  y  $b_q$  no se anulan por hipótesis). Por el teorema anterior,  $\int_a^\infty (P/Q)$  tiene el mismo carácter que  $\int_c^\infty x^{p-q}$  (con  $c > \text{máx}(a, 0)$ ); nuestra afirmación se sigue fácilmente de que  $\int_c^\infty x^{p-q} dx$  converge si y sólo si  $p - q < -1$ , es decir (al ser  $p, q \in \mathbf{N}$ ) si y sólo si  $p - q \leq -2$ .

**Ejemplo 5.35.** Veamos que  $\int_0^\infty e^{-ax^2} dx$  converge para  $a > 0$  (la integral es claramente divergente para  $a \leq 0$ ). En efecto, si  $x > 1$  y  $a > 0$  entonces  $ax < ax^2$  y por tanto  $0 < e^{-ax^2} < e^{-ax}$  para  $x > 1$  (recuérdese que  $\exp$  es monótona creciente). Por el criterio de comparación,  $\int_0^\infty e^{-ax^2} dx$  es convergente.

Supongamos que  $f$  y  $|f|$  son integrables para  $b > a$  (puede probarse que la integrabilidad de  $f$  en un intervalo implica la de  $|f|$ ). Se dirá que la integral  $\int_a^\infty f$  es **absolutamente convergente** si  $\int_a^\infty |f|$  es convergente. Al ser

$$-|f| \leq f \leq |f|$$

se cumple

$$-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|, \quad \forall b > a,$$

y por tanto

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Del corolario anterior se sigue que si  $\int_a^\infty f$  es absolutamente convergente entonces  $\int_a^\infty f$  es convergente, y además se verifica

$$\left| \int_a^\infty f \right| \leq \int_a^\infty |f|$$

Sin embargo (véase el capítulo siguiente)  $\int_a^\infty f$  puede ser convergente sin ser absolutamente convergente.

De forma totalmente análoga se define la integral impropia de primera especie  $\int_{-\infty}^a f$ :

$$\int_{-\infty}^a f = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^a f,$$

si  $f$  es integrable en  $[c, a]$  para todo  $c < a$ . Este tipo de integral impropia tiene propiedades idénticas a las vistas para la integral  $\int_a^\infty f$ . En efecto, es fácil ver que

$$\int_x^a f = \int_{-a}^{-x} f(-t) dt,$$

y por tanto

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^a f = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_{-a}^u f(-t) dt.$$

Esto implica que

$$\int_{-\infty}^a f = \int_{-a}^{\infty} f(-t) dt,$$

donde el miembro izquierdo existe si y sólo si existe el miembro derecho.

### 5.6.2. Integrales impropias de segunda especie

Supongamos que  $f$  no es integrable en  $[a, b]$ , pero sí es integrable en  $[a, c]$  para todo  $c \in (a, b)$ . Por ejemplo, esto ocurrirá si  $f$  es continua en  $[a, b)$  pero no es acotada en las proximidades de  $b$ . Nuestro objetivo es intentar dar sentido a  $\int_a^b f$  (**integral impropia de segunda especie** en el extremo superior).

**Definición 5.36.** Si  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  es integrable en  $[a, c]$  para todo  $c \in (a, b)$  pero no es integrable en  $[a, b]$ , diremos que la integral impropia de segunda especie  $\int_a^b f$  es **convergente** si existe

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f,$$

y en tal caso definiremos  $\int_a^b f$  como el límite anterior.

Nótese que si  $f$  es integrable en  $[a, b]$  entonces se cumple

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f = \int_a^b f,$$

ya que hemos probado (Proposición 5.18) que  $F(x) = \int_a^x f$  es continua en  $[a, b]$ .

De forma análoga se define la integral impropia de segunda especie en el extremo inferior: si  $f$  es integrable en  $[c, b]$  para todo  $c \in (a, b)$  pero no es integrable en  $[a, b]$ , entonces

$$\int_a^b f = \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f.$$

Obviamente, una integral impropia de segunda especie en el extremo inferior se reduce a una en el extremo superior bajo la transformación  $u = -x$ . Podemos por tanto restringirnos, sin pérdida de generalidad, a estudiar integrales impropias de segunda especie en el extremo superior.

Todos los resultados vistos para integrales impropias de primera especie se cumplen, *mutatis mutandis*, para integrales impropias de segunda especie. De hecho, si  $f$  es continua la integral impropia de segunda especie  $\int_a^b f(t) dt$  se reduce a una de primera especie mediante el cambio

$$y = \frac{1}{b-t}.$$

En efecto,

$$\int_a^x f(t) dt = \int_{1/(b-a)}^{1/(b-x)} \frac{1}{y^2} f\left(b - \frac{1}{y}\right) dy$$

y por tanto

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_{1/(b-a)}^u \frac{1}{y^2} f\left(b - \frac{1}{y}\right) dy.$$

En otras palabras,

$$\int_a^b f = \int_{1/(b-a)}^{\infty} \frac{1}{y^2} f\left(b - \frac{1}{y}\right) dy,$$

donde la igualdad debe entenderse en el siguiente sentido: el miembro izquierdo es convergente si y sólo si lo es el miembro derecho, y en tal caso ambos miembros son iguales.

**Ejemplo 5.37.** Estudiemos la convergencia de la integral impropia de segunda especie  $\int_0^1 x^p dx$  en función de  $p \in \mathbf{R}$ . Si  $0 < \epsilon < 1$ ,

$$\int_{\epsilon}^1 x^p dx = \begin{cases} \frac{1}{p+1} - \frac{\epsilon^{p+1}}{p+1}, & p \neq -1 \\ -\log \epsilon, & p = -1. \end{cases}$$

Por tanto,  $\int_0^1 x^p dx$  converge si y sólo si  $p > -1$ , y en tal caso se tiene

$$\int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}.$$

(Nótese que para  $p \geq 0$  esta es una integral ordinaria, ya que en tal caso  $x^p$  es continua en cero.)

**Ejemplo 5.38.** Consideremos la integral  $\int_0^{1/2} |\log x|^p dx$ , donde  $p$  es un número real cualquiera. Si  $p \leq 0$  la integral es convergente (ya que en tal caso  $|\log x|^p$  tiene límite cuando  $x \rightarrow 0+$ , y por tanto es continua por la



derecha en 0 si su valor en 0 se define como dicho límite). Sea ahora  $p > 0$ . Si  $\alpha > 0$  se tiene

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha |\log x|^p = 0;$$

por el criterio de comparación por paso al límite,  $\int_0^{1/2} |\log x|^p dx$  converge si  $\int_0^{1/2} x^{-\alpha} dx$  es convergente. Tomando (por ejemplo)  $\alpha = 1/2$  se obtiene que la integral considerada es convergente también para  $p > 0$ .

*Ejercicio.* Discutir la convergencia de  $\int_0^{\pi/2} \log(\operatorname{sen} x) dx$  por dos procedimientos distintos: i) realizando el cambio de variable  $u = \operatorname{sen} x$ , y ii) escribiendo

$$\log(\operatorname{sen} x) = \log\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) + \log x.$$

### 5.6.3. Integrales impropias de tercera especie

Las integrales impropias de tercera especie combinan dos ó más integrales impropias de primera y/ó segunda especie. Por ejemplo, la integral  $\int_{-\infty}^{\infty} f$  es impropia en  $\pm\infty$  (es equivalente a la suma de dos integrales impropias de primera especie), ó la integral  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$  es impropia en 0 y en  $\infty$  (es la suma de una integral impropia de primera especie y otra de segunda especie).

Consideremos, por ejemplo, una integral impropia del tipo  $\int_{-\infty}^{\infty} f$ . Diremos que esta integral es convergente si para algún  $a \in \mathbf{R}$  convergen las dos integrales impropias  $\int_{-\infty}^a f$  y  $\int_a^{\infty} f$  por separado, y en tal caso su valor se define mediante

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^a f + \int_a^{\infty} f.$$

Se prueba fácilmente que la convergencia de las dos integrales del miembro derecho y la suma de sus valores (es decir, el valor de  $\int_{-\infty}^{\infty} f$ ) no dependen del valor de  $a$  escogido.

*Nota.* Obsérvese, sin embargo, que la existencia de  $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-x}^x f$  no implica, en general, la convergencia de  $\int_{-\infty}^{\infty} f$ .

**Ejemplo 5.39.**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$$

**Ejemplo 5.40.**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{1+x^2}$$

es divergente, aunque  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^t \frac{x dx}{1+x^2} = 0$ .

**Ejemplo 5.41.**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^3 + 1}$$

es divergente, aunque  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3 + 1}$  es convergente (su valor es  $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ ).

**Ejemplo 5.42.**

$$\int_0^{\infty} x^p dx$$

es divergente para todo  $p \in \mathbf{R}$ .

*Ejercicio.* ¿Para qué valores de  $a, b \in \mathbf{R}$  es convergente la integral

$$\int_0^{\infty} x^a |x - 1|^b dx ?$$

*Solución.* Para  $a > -1, b > -1$  y  $a + b < -1$ ; equivalentemente, si  $-1 < a < 0$  y  $-1 < b < -1 - a$ .  $\square$

**Ejemplo 5.43.** Consideremos la integral  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$ . Como el integrando no está acotado en  $x = 0$ , la integral anterior es impropia en cero. Por definición, dicha integral convergerá si y sólo si convergen por separado las dos integrales  $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x}$  y  $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ , y su valor en tal caso será igual a la suma de dichas integrales. Como la segunda integral no es convergente (véase el Ejemplo 5.38; tampoco la primera integral es convergente), la integral dada es divergente. Nótese que esta integral *no* se define como

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_{-1}^{-\epsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\epsilon}^1 \frac{dx}{x} \right),$$

que obviamente existe y vale cero (el límite anterior es el *valor principal de Cauchy* de la integral divergente dada).

## 5.7. Aplicaciones de la integral

### 5.7.1. Área limitada por la gráfica de una función

Si  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  es no negativa e integrable en  $[a, b]$  con  $a < b$ , la integral  $\int_a^b f$  es igual al área de la región limitada por la gráfica de  $f$ , las rectas verticales  $x = a$  y  $x = b$ , y el eje  $x$ . Si  $f$  es no positiva y  $a < b$ ,  $\int_a^b f = -\int_a^b (-f)$  es igual a *menos* el área limitada por la gráfica de  $f$  en  $[a, b]$  y el eje  $x$  (fig. 5.2).

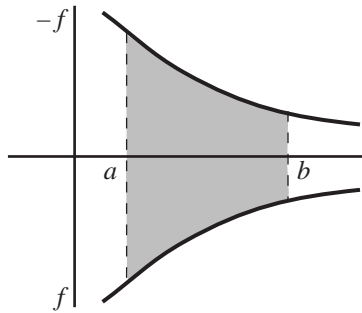


Figura 5.2: Interpretación de  $\int_a^b f$  si  $f \leq 0$

En general, si  $a < b$  la integral  $\int_a^b f$  es igual al *área algebraica* bajo la gráfica de  $f$  en  $[a, b]$  (pues las regiones en que  $f \leq 0$  contribuyen negativamente a la integral). Por ejemplo, en la fig. 5.3  $\int_a^b f = A_1 - A_2 + A_3$ .

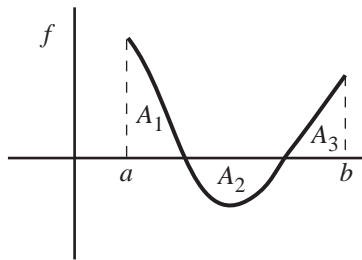


Figura 5.3: Interpretación de  $\int_a^b f$  como área algebraica

### 5.7.2. Longitud de un arco de curva

Consideremos la curva de ecuaciones paramétricas

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1,$$

donde las funciones  $x'(t)$  e  $y'(t)$  se suponen continuas en  $[t_0, t_1]$ .

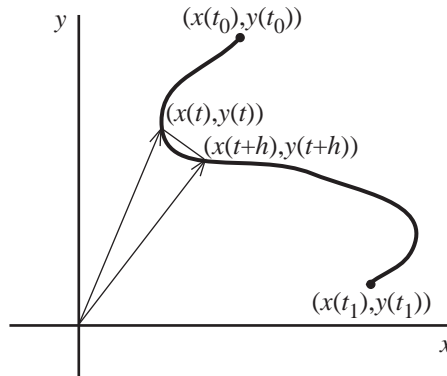


Figura 5.4: Longitud de un arco de curva

Sea  $s(t)$  la longitud del arco de la curva obtenido variando el parámetro entre los valores  $t_0$  y  $t$ . Aplicando el teorema del valor medio se obtiene (fig. 5.4)

$$s(t+h) - s(t) \simeq \operatorname{sig} h \cdot \sqrt{[x(t+h) - x(t)]^2 + [y(t+h) - y(t)]^2} \\ = h\sqrt{x'(c_1)^2 + y'(c_2)^2},$$

donde  $c_1, c_2 \in (t, t+h)$  si  $h > 0$  y  $c_1, c_2 \in (t+h, t)$  si  $h < 0$ . Esto sugiere que

$$s'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{x'(c_1)^2 + y'(c_2)^2} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2},$$

y por tanto (teniendo en cuenta que  $s(t_0) = 0$ )

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2} du.$$

En particular, la longitud de la curva vendrá dada por

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt. \quad (5.14)$$

**Ejemplo 5.44.** Consideremos la curva de ecuación  $y = f(x)$ , siendo  $f'$  continua en  $[x_0, x_1]$ . En este caso  $x(t) = t$  e  $y(t) = f(t)$ , y por tanto la longitud de esta curva es igual a

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Por ejemplo, calculemos la longitud de la curva de ecuación

$$y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{3/2}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Como  $f'(x) = x(x^2 + 2)^{1/2}$ , se tiene

$$1 + f'(x)^2 = 1 + x^2(x^2 + 2) = (x^2 + 1)^2.$$

Por tanto, la longitud de esta curva es

$$\int_0^1 (x^2 + 1) dx = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}.$$

**Ejemplo 5.45.** Consideremos la curva cuya ecuación en coordenadas polares es  $r = f(\theta)$ , siendo  $f'$  continua en  $[\theta_0, \theta_1]$ . Las ecuaciones paramétricas de la curva son

$$x = f(\theta) \cos \theta, \quad y = f(\theta) \operatorname{sen} \theta, \quad \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1.$$

Aplicando (5.14) se obtiene

$$l = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{f(t)^2 + f'(t)^2} dt.$$

Para una circunferencia de centro el origen y radio  $R > 0$  es  $f(\theta) = R$  para todo  $\theta \in [0, 2\pi]$ ; por tanto, la longitud de dicha circunferencia es igual a

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + 0^2} dt = 2\pi R.$$

### 5.7.3. Volumen y área de un sólido de revolución

Sea  $V$  el volumen del sólido de revolución obtenido girando alrededor del eje  $x$  la gráfica de la función  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  entre  $a$  y  $b$  (fig. 5.5).

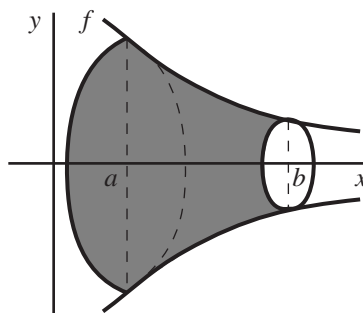


Figura 5.5: Sólido de revolución

Supondremos que  $f$  es no negativa y continua en  $[a, b]$ . Si  $P = \{x_0, \dots, x_n\}$  es una partición del intervalo  $[a, b]$ , sea como siempre

$$m_i = \inf \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad M_i = \sup \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Teniendo en cuenta que el volumen de un cilindro de radio  $r$  y altura  $h$  es  $\pi r^2 h$ , y considerando en cada subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  sendos cilindros de radios  $m_i$  y  $M_i$  y altura  $x_i - x_{i-1}$ , obtenemos

$$\sum_{i=1}^n \pi m_i^2 (x_i - x_{i-1}) \leq V \leq \sum_{i=1}^n \pi M_i^2 (x_i - x_{i-1})$$

o bien

$$L(\pi f^2, P) \leq V \leq U(\pi f^2, P).$$

Como  $f^2$  es continua en  $[a, b]$  (al serlo  $f$ ), es integrable en dicho intervalo; por tanto

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Para calcular el área  $S$  de la superficie lateral del sólido anterior se utiliza la fórmula

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

(donde  $f'$  se supone continua en  $[a, b]$ ). La justificación heurística de esta fórmula se basa en que la superficie lateral de un tronco de cono de radios  $r_1$  y  $r_2$  y arista  $s$  es igual a  $\pi s(r_1 + r_2)$ . Esto se deduce fácilmente a partir de la fórmula  $S = \pi r s$  para la superficie lateral  $S$  de un cono de arista  $s$ , que a su vez se basa en la fórmula para la superficie lateral de una pirámide recta ( $S = ps/2$ , siendo  $p$  el perímetro de la base de la pirámide y  $s$  la altura de los triángulos que forman las caras). Véase Spivak, pp. 396–398, para los detalles.

**Ejemplo 5.46.** Calculemos el volumen y la superficie lateral de una esfera de radio  $R > 0$ . Para ello, basta observar que la mitad de dicha esfera se puede obtener girando la circunferencia  $y = \sqrt{R^2 - x^2}$  ( $0 \leq x \leq R$ ) alrededor del eje  $x$ . Aplicando las fórmulas anteriores obtenemos:

$$V = 2 \cdot \pi \int_0^R (R^2 - x^2) dx = 2\pi \left( R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

y

$$A = 2 \cdot 2\pi \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = 4\pi R^2.$$

## Capítulo 6

# El teorema de Taylor

El cálculo del valor de un polinomio en un punto cualquiera es una operación algebraica elemental, ya que se reduce a un número finito de sumas y productos. No ocurre lo mismo, en general, con una función no polinómica, ni siquiera para funciones elementales sencillas; por ejemplo, ¿cómo se calcula  $\sin 1$ , ó  $e^{\sqrt{2}}$ ? Resulta por ello de gran importancia práctica el poder aproximar una función cualquiera (suficientemente regular) en las proximidades de un punto por un polinomio adecuado. En este capítulo estudiaremos esta cuestión, prestando especial atención a obtener estimaciones del error cometido al reemplazar una función por su aproximación polinómica.

Un polinomio  $P$  de grado  $\leq n$  está unívocamente determinado por el valor de sus derivadas  $P^{(k)}(a)$  de orden  $k \leq n$  en un punto cualquiera  $a$ . En efecto, si

$$P^{(k)}(a) = c_k, \quad 0 \leq k \leq n$$

(donde hemos utilizado la notación  $P^{(0)} \equiv P$ ), entonces es fácil probar que

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{k!} (x-a)^k.$$

En particular, si  $P$  y  $Q$  son dos polinomios de grado  $\leq n$ , y  $P^{(k)}(a) = Q^{(k)}(a)$  para  $k = 0, 1, \dots, n$ , entonces  $P = Q$ .

Sea  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  una función  $n$  veces derivable en un punto  $a \in \mathbf{R}$ ; en particular, obsérvese que las derivadas de orden  $\leq n-1$  de  $f$  están definidas en un intervalo abierto centrado en  $a$ . Llamaremos **polinomio de Taylor de orden  $n$  de  $f$  en  $a$**  al polinomio  $P_{n,a,f}$  de grado  $\leq n$  cuyas derivadas de orden  $\leq n$  en el punto  $a$  coinciden con las de  $f$ . Por la observación del apartado anterior,

$$P_{n,a,f}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

Frecuentemente escribiremos  $P_{n,a}$ , o incluso  $P_n$ , cuando la función  $f$  y el punto  $a$  queden claros por el contexto. Para muchas funciones elementales sencillas, el cálculo de  $P_{n,a,f}$  no ofrece ninguna dificultad. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} P_{2m,0,\cos}(x) &= \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = P_{2m+1,0,\cos}(x) \\ P_{2m+1,0,\sin}(x) &= \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = P_{2m+2,0,\sin}(x) \\ P_{n,0,\exp}(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \\ P_{n,1,\log}(x) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{(x-1)^k}{k}. \end{aligned}$$

Sin embargo, para otras funciones elementales también muy sencillas el cálculo de  $P_{n,a,f}$  a partir de su definición puede ser más complicado; por ejemplo, considérese la función  $f(x) = \arctan x$  en  $a = 0$ .

Una primera propiedad interesante del polinomio de Taylor de orden  $n$  de una función en un punto es la siguiente:

**Proposición 6.1.** *Si  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  es  $n$  veces derivable en  $a \in \mathbf{R}$ , entonces*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P_{n,a,f}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

(En otras palabras, el error cometido reemplazando  $f(x)$  por  $P_{n,a,f}(x)$  tiende a cero cuando  $x \rightarrow a$  más rápido que  $(x-a)^n$ .)

*Demostración.* Si

$$Q(x) = P_{n-1,a,f}(x) = P_{n,a,f}(x) - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k,$$

hay que probar que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - Q(x)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Aplicando la regla de L'Hospital  $n-1$  veces (téngase en cuenta que  $f^{(k)}(a) = Q^{(k)}(a)$  para  $k \leq n-1$ , por definición de  $P_{n,a,f}$ ) se obtiene

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - Q(x)}{(x-a)^n} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - Q'(x)}{n(x-a)^{n-1}} = \dots = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n-1)}(x) - Q^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{n!(x-a)} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \end{aligned}$$

por definición de  $f^{(n)}(a)$ .

*Q.E.D.*



Diremos que dos funciones  $f$  y  $g$  son **iguales hasta orden  $n$  en  $a$**  si están definidas en un intervalo abierto centrado en  $a$ , y se cumple

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{(x - a)^n} = 0.$$

En particular, hemos probado que una función derivable  $n$  veces en un punto  $a$  y su polinomio de Taylor de orden  $n$  en  $a$  son iguales hasta orden  $n$  en  $a$ . Es muy fácil ver (aplíquese, por ejemplo, la regla de L'Hospital), que dos polinomios de grado  $\leq n$  son iguales hasta orden  $n$  en  $a$  si y sólo si son iguales. De esto se deduce la siguiente propiedad característica del polinomio de Taylor de una función en un punto:

**Corolario 6.2.** *Sea  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  una función  $n$  veces derivable en  $a$ , y sea  $P$  un polinomio de grado  $\leq n$ . Si  $f$  y  $P$  son iguales hasta orden  $n$  en  $a$ , entonces  $P = P_{n,a,f}$ .*

*Demostración.* Basta observar que  $P$  y  $P_{n,a,f}$  son dos polinomios de grado  $\leq n$  iguales hasta orden  $n$  en  $a$ , ya que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x) - P_{n,a,f}(x)}{(x - a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x) - f(x)}{(x - a)^n} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P_{n,a,f}(x)}{(x - a)^n} = 0.$$

*Q.E.D.*

Si  $f$  es  $n$  veces derivable en  $a$ , definimos el **resto de orden  $n$  en  $a$**  mediante

$$R_{n,a,f}(x) = f(x) - P_{n,a,f}(x).$$

Por lo visto anteriormente,  $R_{n,a,f}(x)$  se hace muy pequeño cuando  $x \rightarrow a$ ; en efecto,  $R_{n,a,f}(x)$  tiende a cero más rápido que  $(x - a)^n$  cuando  $x \rightarrow a$ . El siguiente resultado nos proporciona estimaciones mucho más precisas (y muy útiles en la práctica) de este resto:

**Teorema de Taylor.** *Si  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  es  $n + 1$  veces derivable en el intervalo  $[a, x]$  (con  $x > a$ ), entonces existen  $t_1, t_2 \in (a, x)$  tales que*

$$\text{I) } R_{n,a,f}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t_1)}{n!} (x - t_1)^n (x - a) \quad (\text{resto de Cauchy})$$

$$\text{II) } R_{n,a,f}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t_2)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1} \quad (\text{resto de Lagrange})$$

III) Además, si  $f^{(n+1)}$  es integrable en  $[a, x]$  entonces se verifica

$$R_{n,a,f}(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n dt \quad (\text{forma integral del resto})$$

Si  $x < a$ , el mismo resultado es válido reemplazando los intervalos  $(a, x)$  y  $[a, x]$  por  $(x, a)$  y  $[x, a]$ , respectivamente.

*Demostración.* Supongamos, para fijar ideas, que  $x > a$ . Si  $t \in [a, x]$ , definimos

$$S(t) = R_{n,t,f}(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k;$$

obsérvese que  $x$  es un número real *fijo*, mientras que  $t$  es una variable real que recorre el intervalo  $[a, x]$ . Por definición,  $S(x) = 0$ , y  $S(a) = R_{n,a,f}(x)$  es el número que queremos estimar. Por las hipótesis sobre  $f$ ,  $S$  es derivable en  $[a, x]$ , y se cumple:

$$S'(t) = - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} (x-t)^k + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} (x-t)^{k-1} = - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n.$$

Si  $f^{(n+1)}$  es integrable en  $[a, x]$ , lo mismo ocurrirá con  $S'$  (puede probarse que el producto de funciones integrables es integrable), y por tanto

$$S(x) - S(a) = 0 - R_{n,a,f}(x) = \int_a^x S'(t) dt = - \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt,$$

lo cual demuestra la fórmula integral del resto.

Para obtener la forma de Cauchy del resto aplicamos el teorema del valor medio a  $S$  en el intervalo  $[a, x]$ , obteniendo que

$$S(x) - S(a) = -R_{n,a,f}(x) = S'(t_1)(x-a) = - \frac{f^{(n+1)}(t_1)}{n!} (x-t_1)^n (x-a)$$

para algún  $t_1 \in (a, x)$ . Finalmente, aplicando el teorema del valor medio de Cauchy a las funciones  $S(t)$  y  $g(t) = (x-t)^{n+1}$  en el intervalo  $[a, x]$  obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{S(x) - S(a)}{0 - (x-a)^{n+1}} &= \frac{R_{n,a,f}(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{S'(t_2)}{-(n+1)(x-t_2)^n} \\ &= \frac{-f^{(n+1)}(t_2)(x-t_2)^n/n!}{-(n+1)(x-t_2)^n} = \frac{f^{(n+1)}(t_2)}{(n+1)!} \end{aligned}$$

para algún  $t_2 \in (a, x)$ , lo que conduce a la forma de Lagrange del resto.  
*Q.E.D.*

*Nota.* Para  $n = 0$  el teorema de Taylor proporciona el teorema del valor medio de Lagrange y la regla de Barrow.

**Ejemplo 6.3.** Utilizando la forma de Lagrange del resto se obtienen fácilmente las siguientes estimaciones:

$$|R_{n,0,\cos}(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad (6.1a)$$

$$|R_{n,0,\text{sen}}(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad (6.1b)$$

$$|R_{n,0,\exp}(x)| \leq \begin{cases} e^x \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, & x > 0 \\ \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, & x < 0 \end{cases} \quad (6.1c)$$

$$|R_{n,1,\log}(x)| \leq \frac{|x-1|^{n+1}}{n+1}, \quad x \geq 1. \quad (6.1d)$$

Si  $0 < x \leq 1$ , puede probarse que

$$|R_{n,1,\log}(x)| \leq \frac{|x-1|^{n+1}}{x(n+1)}; \quad (6.2)$$

véase el ejercicio al final de este capítulo.

Estas estimaciones permiten calcular el valor de las funciones elementales anteriores en un punto  $x$  con la aproximación que se desee si  $|R_{n,f,a}(x)| \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$  ( $a = 0$  ó  $1$  en este caso).

En primer lugar, obsérvese que si  $m \in \mathbf{N}$  y  $t > 0$  entonces

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{t^m}{m!} = 0.$$

En efecto, si  $m > N = [t]$  entonces podemos escribir

$$\frac{t^m}{m!} = \frac{t}{m} \cdot \frac{t}{m-1} \cdots \frac{t}{N+1} \cdot \frac{t^N}{N!} \leq \frac{t}{m} \cdot \frac{t^N}{N!},$$

donde el último término es constante (no depende de  $m$ ) y el primero tiende a cero cuando  $m$  tiende a infinito. Por tanto, cualquiera que sea  $x \in \mathbf{R}$  para  $f = \cos, \text{sen}, \exp$  se cumple que  $|R_{n,0,f}(x)|$  tiende a cero cuando  $n$  tiende a infinito. Para la función logaritmo, sólo se puede asegurar esto si  $|x-1| \leq 1$ , es decir si  $0 < x \leq 2$  (ya que la estimación del resto que hemos utilizado sólo vale si  $x > 0$ ), pues sólo entonces  $|x-1|^{n+1}$  está acotado cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Por ejemplo, supongamos que queremos calcular  $\text{sen}(1/2)$  (es decir, el seno de un ángulo de  $90/\pi \simeq 28,65$  grados) con un error menor que  $10^{-12}$ . Teniendo en cuenta que  $P_{2n+1,0,\text{sen}} = P_{2n+2,0,\text{sen}}$  y utilizando la fórmula de Cauchy para el resto de orden  $2n+2$  obtenemos

$$|\text{sen } x - P_{2n+1,0,\text{sen}}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}$$

Tomando  $x = 1/2$  en esta fórmula se deduce que basta con que  $2^{2n+3}(2n + 3)! > 10^{12}$ . Teniendo en cuenta la tabla siguiente de valores de  $2^{2n+3}(2n+3)!$ :

$n$	$2^{2n+3}(2n + 3)!$
0	48
1	3840
2	645120
3	185794560
4	81749606400
5	51011754393600

se ve que basta tomar  $n = 5$ , lo que proporciona el valor

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - \frac{1}{8 \cdot 6} + \frac{1}{32 \cdot 120} - \frac{1}{128 \cdot 5040} + \frac{1}{512 \cdot 362880} - \frac{1}{2048 \cdot 39916800} \\ = \frac{39192849079}{81749606400} \simeq 0,479425538604183, \end{aligned}$$

a comparar con el valor exacto con 15 decimales  $\text{sen}(1/2) = 0,479425538604203$ .

*Nota.* Obsérvese, sin embargo, que para calcular  $\log 2$  con la misma precisión que antes ¡necesitaríamos utilizar un polinomio de Taylor de orden  $10^{12}$ !

*Ejercicio.* Calcular el polinomio de Taylor de orden  $m$  de  $\arctan$  en 0, y estimar el error cometido reemplazando  $\arctan(x)$  por  $P_{m,0,\arctan}(x)$ .

*Solución.* En primer lugar, nótese que para todo  $x \in \mathbf{R}$  podemos escribir

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}.$$

La fórmula para la suma de una serie geométrica de razón  $r = (-t^2)$

$$\sum_{k=0}^n r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}, \quad r \neq 1,$$

proporciona la identidad

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}.$$

Integrando esta igualdad entre cero y  $x$  (las funciones del miembro derecho son claramente continuas en todo  $\mathbf{R}$ ) se obtiene

$$\arctan x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + Q_{2n+1}(x),$$

siendo

$$Q_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt.$$

Por el Corolario 6.2, para probar que el polinomio de Taylor de orden  $2n + 1$  de  $\arctan$  en 0 es

$$P_{2n+1,0,\arctan}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1},$$

basta probar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{Q_{2n+1}(x)}{x^{2n+1}} = 0.$$

Pero esto es inmediato, ya que

$$\left| \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \right| \leq \left| \int_0^x t^{2n+2} dt \right| = \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}.$$

En particular, de esto se sigue que

$$R_{2n+1,0,\arctan}(x) = (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$$

y que

$$|R_{2n+1,0,\arctan}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}. \quad (6.3)$$

Nótese que, al cumplirse también

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{Q_{2n+1}(x)}{x^{2n+2}} = 0,$$

se verifica

$$P_{2n+2,0,\arctan}(x) = P_{2n+1,0,\arctan}(x),$$

y por tanto

$$\arctan^{(2k)}(0) = 0, \quad \forall k \in \mathbf{N} \cup \{0\},$$

lo cuál era de esperar al ser  $\arctan$  una función impar. □

*Ejercicio.* Si  $f(x) = \log(1+x)$ , utilizando la identidad

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t}$$

y la misma técnica del ejercicio anterior, pruébese que

$$R_{n,0,f}(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt, \quad x > -1,$$

y dedúzcase (6.2).

# Capítulo 7

## Sucesiones y series

### 7.1. Sucesiones numéricas

Una **sucesión** de números reales es una función  $a : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  tal que  $\text{dom } a = \mathbf{N}$  (ó, a veces,  $\text{dom } a = \mathbf{N} \cup \{0\}$ ). Tradicionalmente,  $a(n)$  se denota por  $a_n$ , y la sucesión se indica por  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

Si  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión de números reales, la definición de  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  es un caso particular de la de  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ . Sin embargo, por su importancia merece la pena recordarla explícitamente:

**Definición 7.1.** Si  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión de números reales y  $l \in \mathbf{R}$ , se dice que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$$

si para todo  $\epsilon > 0$  existe  $N \in \mathbf{N}$  tal que

$$n \geq N \implies |a_n - l| < \epsilon.$$

Cuando existe (i.e., es un número real)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , diremos que la sucesión  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  es **convergente**, y **divergente** en caso contrario. Las propiedades del límite de una sucesión se deducen como caso particular de las del límite cuando  $x$  tiende a infinito de una función  $f(x)$ :

**Proposición 7.2.** Sean  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  y  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  dos sucesiones de números reales.

I) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  existe, entonces es único.

II) Si existen  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , entonces las sucesiones  $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$  y  $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$  son convergentes, y se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab.$$

III) Si, además,  $b \neq 0$ , entonces existe  $m \in \mathbf{N}$  tal que  $b_n \neq 0$  para todo  $n \geq m$ , y se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}.$$

En particular, de la proposición anterior se deduce que si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  entonces para todo  $\lambda \in \mathbf{R}$  se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda a_n) = \lambda a,$$

y si además  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \neq 0$  entonces la sucesión  $a_n/b_n$  está definida para  $n \in \mathbf{N}$  suficientemente grande, y se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

**Ejemplo 7.3.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \\ 1, & x = 1 \\ \infty, & x > 1. \end{cases}$$

Si  $x \leq -1$  entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n$  diverge y no es ni siquiera  $\pm\infty$ , ya que en este caso  $x^n$  tiene signo alternado cuando  $n \rightarrow \infty$ . Todo esto se deduce fácilmente utilizando las fórmulas  $x^n = e^{n \log x}$  si  $x > 0$  y  $x^n = (-1)^n |x|^n$  si  $x < 0$ .

**Ejemplo 7.4.** 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + (-1)^n}{2^{n+1} + (-1)^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

En primer lugar, nótese que el denominador no se anula para ningún  $n \in \mathbf{N}$  (es, de hecho, mayor ó igual que 5). Basta entonces tener en cuenta que

$$\frac{2^n + (-1)^n}{2^{n+1} + (-1)^{n+1}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}}{1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}.$$

**Ejemplo 7.5.** Si  $x$  es un número real, por lo visto en el capítulo anterior se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

**Ejemplo 7.6.** 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

En efecto,

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \frac{2}{n} \cdots \frac{n-1}{n} \frac{n}{n} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

**Ejemplo 7.7.** 
$$\frac{2^{n^2}}{n!}$$
 diverge a infinito.

En efecto,

$$\frac{2^{n^2}}{n!} = \frac{(2^n)^n}{n!} \geq 2^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty,$$

ya que  $2^n > n$  para todo  $n \in \mathbf{N}$  (fórmula del binomio de Newton).

**Ejemplo 7.8.** Supongamos que existe una función  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  definida en  $[1, \infty)$  tal que  $a_n = f(n)$  para todo  $n \in \mathbf{N}$ . En tal caso, si existe  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  entonces también existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , y se tiene

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Por ejemplo, para la sucesión  $a_n = \sqrt[n]{n}$  se puede tomar  $f(x) = x^{1/x}$ . Como (aplicando la regla de L'Hospital)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0,$$

se tiene  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x} = 1$ , y por tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Nótese, sin embargo, que de la no existencia de  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  no se puede deducir la no existencia de  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Por ejemplo, si  $f(x) = \text{sen}(\pi x)$  entonces no existe  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ , mientras que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{sen}(\pi n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

El siguiente resultado caracteriza de forma sencilla la existencia del límite de una función en un punto mediante sucesiones que tienden a dicho punto:

**Proposición 7.9.** Sea  $a$  un punto de acumulación del dominio de una función  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , y sea  $l \in \mathbf{R}$ . Entonces  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  si y sólo si para toda sucesión  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  que cumple

I)  $a_n \in \text{dom } f$  para todo  $n \in \mathbf{N}$

II)  $a_n \neq a$  para todo  $n \in \mathbf{N}$

III)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

la sucesión  $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$  cumple  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l$ .

### 7.1.1. Teorema de Bolzano–Weierstrass

Un tipo muy importante de sucesiones de números reales son las sucesiones monótonas. Por definición (que en realidad es un caso particular de la definición análoga para funciones de  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ), una sucesión  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  es **monótona creciente** (resp. **no decreciente**) si  $a_m > a_n$  (resp.  $a_m \geq a_n$ ) para todo  $m > n$  ( $m, n \in \mathbf{N}$ ). De forma análoga (invirtiendo el sentido de las desigualdades anteriores) se define una sucesión monótona decreciente ó no creciente. Como en el caso de funciones, se dice que una sucesión es **estrictamente monótona** si es monótona creciente ó decreciente. La siguiente propiedad fundamental de las sucesiones monótonas se deduce directamente del axioma del supremo:



**Proposición 7.10.** *Una sucesión monótona no decreciente (resp. no creciente) es convergente si y sólo si está acotada superiormente (resp. inferiormente).*

*Demostración.* En primer lugar, podemos restringirnos a sucesiones no decrecientes (el resultado para una sucesión no creciente  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  se obtiene considerando  $\{-a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ). En segundo lugar, toda sucesión convergente está acotada, tanto superior como inferiormente (la demostración es casi idéntica a la del resultado análogo para funciones arbitrarias). Por tanto, basta probar que si  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  es no decreciente y está acotada superiormente entonces es convergente.

Si  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  está acotada superiormente, el conjunto no vacío

$$A = \{a_n : n \in \mathbf{N}\}$$

está por definición acotado superiormente, y por tanto (axioma del supremo) existe  $a = \sup A$ . Veamos entonces que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . En efecto, por definición de supremo para todo  $\epsilon > 0$  el conjunto  $A \cap (a - \epsilon, a]$  es no vacío. Por tanto, existe  $N \in \mathbf{N}$  tal que  $a - \epsilon < a_N \leq a$ . Por ser la sucesión no decreciente, y ser  $a = \sup A$ , se cumplirá

$$n \geq N \implies a - \epsilon < a_N \leq a_n \leq a,$$

y, en particular,

$$n \geq N \implies |a - a_n| < \epsilon.$$

Esto implica nuestra afirmación. Q.E.D.

*Nota.* Es muy fácil probar que una sucesión monótona no decreciente (resp. no creciente) no acotada superiormente (resp. inferiormente) diverge a infinito (resp. menos infinito).

**Ejemplo 7.11.** Probaremos a continuación que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

con  $2 < e \leq 3$ .

Veamos, en primer lugar, que si  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  entonces la sucesión  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  es monótona creciente. En efecto, utilizando la fórmula del binomio de Newton para  $n \geq 2$  obtenemos

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 2 + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\ &= 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < a_{n+1}, \end{aligned}$$

ya que

$$1 - \frac{i}{n} < 1 - \frac{i}{n+1}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Esto también demuestra que  $a_n > 2$  para todo entero  $n \geq 2$ . Por otra parte, al ser  $1/k! \leq 1/2^{k-1}$  para todo  $k \in \mathbf{N}$  se verifica

$$a_n \leq 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Esto prueba que la sucesión  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  está acotada superiormente (por 3), por lo que (al ser monótona creciente) es convergente. Además, al ser  $2 < a_n < 3$  para todo entero  $n \geq 2$  y ser  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  creciente se tiene

$$2 < \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \equiv e \leq 3.$$

Una **subsucesión** de una sucesión  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión  $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$  tal que  $b_k = a_{n_k}$  con  $n_1 < n_2 < \dots < n_k < n_{k+1} < \dots$ .

**Lema 7.12.** *Toda sucesión contiene una subsucesión que es ó bien no creciente ó bien no decreciente.*

*Demostración.* Diremos que  $m \in \mathbf{N}$  es un *punto cumbre* de una sucesión  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  si  $a_m > a_n$  para todo  $n > m$ . Si  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  contiene infinitos puntos cumbre  $n_1 < n_2 < \dots < n_k < n_{k+1} < \dots$ , entonces la subsucesión  $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  es monótona decreciente. Supongamos, por el contrario, que el número de puntos cumbre de la sucesión  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  es finito (posiblemente igual a cero). En tal caso, sea  $n_1$  un número natural mayor que todos los puntos cumbre de la sucesión. Como  $n_1$  no es un punto cumbre, existirá  $n_2 \in \mathbf{N}$  tal que  $n_2 > n_1$  y  $a_{n_2} \geq a_{n_1}$ . Como  $n_2 > n_1$  tampoco es un punto cumbre, existirá  $n_3 \in \mathbf{N}$  tal que  $n_3 > n_2$  y  $a_{n_3} \geq a_{n_2}$ . Procediendo de esta forma, es claro que obtenemos una subsucesión no decreciente  $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ . *Q.E.D.*

El corolario de este lema, que se conoce como Teorema de Bolzano–Weierstrass, es de gran importancia teórica:

**Teorema de Bolzano–Weierstrass.** *Toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente.*

*Demostración.* Sea  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión acotada. Por el lema anterior, esta sucesión admite una subsucesión  $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  no creciente ó no decreciente. Como esta subsucesión es acotada tanto superior como inferiormente (al serlo la sucesión  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ), de la Proposición 7.10 se sigue que  $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  es convergente. *Q.E.D.*

### 7.1.2. El criterio de Cauchy

Hasta este punto, el único resultado que permite averiguar si una sucesión es convergente sin necesidad de tener una idea previa acerca del valor de su límite es la Proposición 7.10, que se aplica sólo a un tipo muy particular de sucesiones (las acotadas). El criterio de Cauchy, que veremos a continuación, caracteriza de forma relativamente sencilla a las sucesiones convergentes sin necesidad de conocer cuál es su límite.

**Definición 7.13.** Una sucesión  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una **sucesión de Cauchy** si para todo  $\epsilon > 0$  existe  $N \in \mathbf{N}$  tal que

$$n, m \geq N \implies |a_n - a_m| < \epsilon.$$

Toda sucesión convergente es claramente de Cauchy. En efecto, si  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  entonces para todo  $\epsilon > 0$  existe  $N \in \mathbf{N}$  tal que

$$n \geq N \implies |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}.$$

De esto se deduce que

$$n, m \geq N \implies |a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

El axioma del supremo de los números reales (a través del teorema de Bolzano–Weierstrass) garantiza que, recíprocamente, toda sucesión de Cauchy es convergente:

**Teorema 7.14.** *Una sucesión de números reales es convergente si y sólo si es una sucesión de Cauchy.*

*Demostración.* Basta probar que una sucesión de Cauchy es convergente. Veamos, en primer lugar, que si  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión de Cauchy entonces  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  está acotada. En efecto, existe  $N \in \mathbf{N}$  tal que (por ejemplo)

$$m, n \geq N \implies |a_m - a_n| < 1.$$

En particular,

$$n \geq N \implies |a_n| \leq |a_n - a_N| + |a_N| < 1 + |a_N|.$$

Entonces  $\{a_n : n \in \mathbf{N}\}$  está acotado por  $\max(1 + |a_N|, |a_1|, \dots, |a_{N-1}|)$ .

Por el teorema de Bolzano–Weierstrass, toda sucesión de Cauchy  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  posee una subsucesión convergente  $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ . Veamos, para finalizar la demostración, que esto implica que  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  es convergente. En efecto, para todo  $\epsilon > 0$  existe  $M \in \mathbf{N}$  tal que

$$m, n \geq M \implies |a_m - a_n| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por otra parte, si  $a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}$  existe  $K \in \mathbf{N}$  tal que

$$k \geq K \implies |a_{n_k} - a| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Como (por definición de subsucesión) la sucesión de números naturales  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$  es monótona creciente, existe  $m \geq K$  tal que  $n_m \geq M$ . Si tomamos  $N = n_m (\geq M)$  entonces se cumple

$$n \geq N = n_m \implies |a_n - a| \leq |a_n - a_{n_m}| + |a_{n_m} - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

*Q.E.D.*

## 7.2. Series numéricas

Por definición, la **serie**  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  es igual a la sucesión  $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$  definida por

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

El número  $s_n$  se denomina la  $n$ -ésima **suma parcial** de la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ . Diremos que dicha serie es **convergente** si y sólo si la sucesión de sumas parciales  $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$  es convergente. Si  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  es convergente y  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ , diremos que  $s$  es la **suma** de la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ , y escribiremos

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s,$$

es decir

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k.$$

De las propiedades elementales de las sucesiones se deducen propiedades análogas para las series. En primer lugar, *si una serie es convergente su suma es única*. En segundo lugar, si  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s_1$  y  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = s_2$  son dos series convergentes y  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ , entonces la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k)$  es convergente, y se tiene

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda s_1 + \mu s_2.$$

El producto de dos series  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  y  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  es, sin embargo, una operación mucho más delicada, ya que, en principio, dicho producto es una *serie doble*  $\sum_{n,m=1}^{\infty} a_n b_m$  que puede ser escrita como serie ordinaria de infinitas formas distintas y en general no equivalentes. (Véase Spivak, p. 663.)

El criterio de Cauchy para sucesiones proporciona el siguiente **criterio de Cauchy para series**:

**Proposición 7.15.** La serie  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  es convergente si y sólo si para todo  $\epsilon > 0$  existe  $N \in \mathbf{N}$  tal que

$$m > n \geq N \implies \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| < \epsilon.$$

Tomando  $m = n + 1$  en el criterio de Cauchy obtenemos la siguiente condición *necesaria* para que una serie sea convergente:

**Corolario 7.16.** Si  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  es convergente, entonces  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ .

**Ejemplo 7.17.** Consideremos la **serie geométrica**  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ , siendo la **razón**  $x$  un número real arbitrario. Por el corolario anterior, esta serie es divergente si  $|x| \geq 1$ . Recíprocamente, veamos a continuación que si  $|x| < 1$  la serie es convergente. En efecto, si  $x \neq 1$

$$s_n = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Como  $|x| < 1$ ,  $|x^{n+1}| = |x|^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Por tanto, la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$  es convergente en este caso, y su suma es

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1 - x}, \quad |x| < 1.$$

**Ejemplo 7.18.** Veamos que la **serie armónica**  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$  es divergente (aunque su término general tiende a cero). En efecto, basta tener en cuenta que si  $n > 1$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} > \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2}.$$

Al no cumplirse la condición de Cauchy para  $\epsilon = 1/2$  (y  $m = 2n$ ), la serie es divergente.

### 7.2.1. Criterios de convergencia

Un tipo muy importante de series son las series de números no negativos, es decir las series  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  tales que  $a_k \geq 0$  para todo  $k \in \mathbf{N}$ . En tal caso, la sucesión de sumas parciales es monótona no decreciente, y por tanto *una serie de números no negativos es convergente si y sólo si la sucesión de sus sumas parciales está acotada* (en caso contrario, la serie diverge a infinito). Evidentemente, consideraciones análogas pueden hacerse para series de números no positivos.

Una ventaja de las series de término general no negativo (ó, en algunos casos, positivo) es que para este tipo de series se dispone de criterios sencillos para establecer su convergencia. Empecemos por el siguiente criterio elemental, consecuencia directa de la Proposición 7.10 aplicada a las sumas parciales de la serie:

**Teorema** (criterio de comparación). Si  $0 \leq a_n \leq b_n$  para todo número natural  $n \geq M$  y  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  es convergente, entonces  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  es convergente.

*Demostración.* Al ser  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  convergente, para todo  $n \geq M$  la suma parcial  $\sum_{k=1}^n a_k$  está acotada por  $\sum_{k=1}^{M-1} (a_k - b_k) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ . Q.E.D.

**Corolario 7.19.** Si  $b_n \leq a_n \leq c_n$  para todo número natural  $n \geq M$ , y las series  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  y  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$  son convergentes, entonces  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  es convergente.

*Demostración.* En efecto, si  $n \geq M$  se tiene

$$0 \leq a_n - b_n \leq c_n - b_n.$$

Por el criterio de comparación,  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k)$  es convergente, de donde se deduce la tesis al ser  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  convergente. Q.E.D.

Si  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  es una serie arbitraria,  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  es una serie de términos no negativos. Se dice que  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  es **condicionalmente convergente** si  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  converge pero  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  diverge, y **absolutamente convergente** si  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  es convergente. Como indica la notación, no es difícil ver que una serie absolutamente convergente es automáticamente convergente:

**Proposición 7.20.** Si  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  es convergente entonces  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  es también convergente.

*Demostración.* Esto se sigue inmediatamente del criterio de comparación, ya que para todo  $n \in \mathbf{N}$  se tiene

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|.$$

Q.E.D.

Hay muchas series condicionalmente convergentes. Por ejemplo, veremos más adelante que la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}/k$  es convergente, mientras que  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$  es divergente (es la serie armónica). En general, las series absolutamente convergentes tienen mejores propiedades que las condicionalmente convergentes; por ejemplo, el producto de dos series absolutamente convergentes  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  y  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  se puede escribir de infinitas formas como una serie absolutamente convergente al producto  $(\sum_{k=1}^{\infty} a_k)(\sum_{k=1}^{\infty} b_k)$ . Una serie absolutamente convergente tiene también la propiedad de que su carácter convergente ó divergente y el valor de su suma no cambian si se reordenan los términos de dicha serie, cosa que no ocurre en general con las series condicionalmente convergentes (véase Spivak, pp. 658–663). Además, establecer la convergencia de una serie condicionalmente convergente suele ser difícil, ya que no pueden usarse los criterios elementales de convergencia válidos para series de números no negativos que veremos a continuación.

**Ejemplo 7.21.** Cualquiera que sea el número real  $\theta$ , la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(k\theta)}{k^2}$$

es absolutamente convergente. En efecto, para todo  $k \in \mathbf{N}$  se tiene

$$\frac{|\operatorname{sen}(k\theta)|}{k^2} \leq \frac{1}{k^2},$$

y la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$  es convergentes (lo probaremos en breve, utilizando el criterio de la integral).

Un corolario sencillo pero útil del criterio de comparación es el siguiente:

**Proposición 7.22.** Sea  $b_n > 0$  para  $n \geq M$ , y supongamos que existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n \equiv c$  (donde admitimos que  $c = \pm\infty$ ). Se tiene:

- I) Si  $c \in \mathbf{R}$  y  $c \neq 0$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  es convergente si y sólo si  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  lo es.
- II) Si  $c = 0$  y  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  es convergente, entonces  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  es convergente.
- III) Si  $c = \pm\infty$  y  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  es divergente, entonces  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  es divergente.

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad, podemos tomar  $c > 0$  ó  $c = \infty$  (si  $c < 0$  ó  $c = -\infty$ , bastaría aplicar el razonamiento que sigue a la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (-a_n)$ ).

i) Al ser  $c > 0$  existe  $N \in \mathbf{N}$ , que podemos tomar  $\geq M$  sin pérdida de generalidad, tal que

$$n \geq N \implies \frac{c}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3c}{2},$$

de donde se sigue (multiplicando por  $b_n > 0$ )

$$n \geq N \implies 0 < \frac{c}{2} \cdot b_n < a_n < \frac{3c}{2} \cdot b_n.$$

Si  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  es convergente, la última desigualdad y el criterio de comparación implican que  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  es convergente. Por último, si  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  es divergente entonces de la segunda desigualdad y el criterio de comparación se sigue que  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  es también divergente.

ii) Si  $c = 0$ , existe  $N \geq M$  tal que

$$n \geq N \implies -1 < \frac{a_n}{b_n} < 1.$$

Multiplicando por  $b_n > 0$  y aplicando el Corolario 7.19 se deduce que  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  es convergente.

iii) Si  $c = \infty$ , existe  $N \geq M$  tal que

$$n \geq N \implies \frac{a_n}{b_n} > 1.$$

Multiplicando por  $b_n > 0$  se obtiene, por el criterio de comparación, que  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  es divergente. Q.E.D.

El criterio anterior permite deducir el siguiente resultado, que es sumamente útil a la hora de estudiar la convergencia de una serie de números positivos:

**Teorema** (criterio del cociente). *Sea  $a_n \neq 0$  para todo número natural  $n \geq M$ , y supóngase que existe el límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}|/|a_n| = r$  (donde admitimos que  $r = \infty$ ). Entonces  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  es absolutamente convergente si  $r < 1$ , y divergente si  $r > 1$  ó  $r = \infty$ .*

(Si  $r = 1$ , el criterio del cociente no decide: hay series tanto convergentes como divergentes de términos positivos con  $r = 1$ .)

*Demostración.* Supongamos, en primer lugar, que  $r < 1$ . En tal caso, para todo  $\epsilon > 0$  existe  $N \in \mathbf{N}$ , que podemos tomar  $\geq M$ , tal que

$$n \geq N \implies r_n \equiv \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < r + \epsilon.$$

Como  $r < 1$ , podemos tomar  $\epsilon < 1 - r$ , en cuyo caso  $s = r + \epsilon$  está en  $(0, 1)$ . Además, para  $n \geq N$  se tiene

$$0 < |a_{n+1}| = r_n r_{n-1} \dots r_N |a_N| < s^{n-N+1} |a_N| = \frac{|a_N|}{s^N} s^{n+1}.$$

Como  $s < 1$ , la serie geométrica  $\sum_{k=0}^{\infty} s^k$  es convergente; por el criterio de comparación (nótese que  $|a_N|/s^N$  es una constante), también lo será  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ .

Supongamos, por último, que fuera  $r > 1$  ó  $r = \infty$ . Si  $r = \infty$  y tomamos  $s > 1$  arbitrario, existe un número natural  $N \geq M$  tal que

$$n \geq N \implies s < r_n. \quad (7.1)$$

Si  $r > 1$  es finito, tomando  $0 < \epsilon < r - 1$  y llamando  $s = r - \epsilon > 1$  deducimos de nuevo que existe un número natural  $N \geq M$  tal que se cumple (7.1). Por tanto, para todo  $n \geq N$  se tiene ahora

$$|a_{n+1}| > s^{n-N+1} |a_N| > |a_N| > 0,$$

lo cual implica que el término general de la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  no tiende a cero cuando  $k \rightarrow \infty$ , de donde se deduce que  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  es divergente. *Q.E.D.*

**Ejemplo 7.23.** La serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

converge absolutamente para todo  $x \in \mathbf{R}$ . En efecto, si  $x = 0$  el resultado es trivial, y si  $x \neq 0$  basta observar que

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|^{n+1}/(n+1)!}{|x|^n/n!} = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$



*Ejercicio.* Estudiar la convergencia de la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c^k k!}{k^k}$ , siendo  $c$  un número real.

*Solución.* Si  $c = 0$ , la serie converge trivialmente (su sucesión de sumas parciales es constante). Si  $c \neq 0$ , aplicando el criterio del cociente se obtiene

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|c|^{n+1} (n+1)!/(n+1)^{n+1}}{|c|^n n!/n^n} = |c| \left( \frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{|c|}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{|c|}{e}.$$

Por tanto, la serie dada es absolutamente convergente para  $|c| < e$ , y divergente para  $|c| > e$ . Para  $c = \pm e$ , el criterio del cociente no decide. Sin embargo (véase Spivak, problema 21-13), al ser

$$\frac{e^n n!}{n^n} > e, \quad \forall n \in \mathbf{N}, n > 1,$$

el término general de las series  $\sum_{k=1}^{\infty} (\pm e)^k k!/k^k$  no tiende a cero cuando  $k \rightarrow \infty$ , por lo que dichas series son divergentes.  $\square$

Citaremos sin demostración el siguiente criterio análogo al del cociente (aunque ligeramente más fuerte que éste; cf. Spivak, problema 21-18):

**Teorema** (criterio de la raíz). Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = r$  (donde admitimos que  $r = \infty$ ), entonces  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  es absolutamente convergente si  $r < 1$ , y divergente si  $r > 1$  ó  $r = \infty$ .

Para muchas series importantes (como, por ejemplo,  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n^p)$ ), el criterio del cociente (y, en este y en otros muchos casos, también el de la raíz) no decide, porque  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}|/|a_n|$  es exactamente igual a 1. En algunos de estos ejemplos en que fallan los criterios del cociente y de la raíz se puede aplicar con éxito el siguiente criterio:

**Teorema** (criterio de la integral). Sea  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  una función positiva y no creciente en  $[1, \infty)$ , y supongamos que  $f$  es integrable en  $[1, x]$  para todo  $x \geq 1$ . Si  $a_k = f(k)$  para todo  $k \in \mathbf{N}$ , entonces la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  converge si y sólo si la integral impropia  $\int_1^{\infty} f$  es convergente.

*Demostración.* En primer lugar, nótese que al ser  $f$  positiva la integral impropia  $\int_1^{\infty} f$  es convergente si y sólo si el conjunto  $\{\int_1^x f : x \geq 1\}$  es acotado, o equivalentemente si y sólo si existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f$ . Si  $P = \{1, 2, \dots, n\}$ , al ser  $f$  no creciente se tiene

$$L(f, P) = \sum_{k=2}^n f(k) = \sum_{k=2}^n a_k \leq \int_1^n f \leq U(f, P) = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k.$$

Como  $a_k = f(k) > 0$  para todo  $k \in \mathbf{N}$ , de estas desigualdades se deduce fácilmente la tesis aplicando la Proposición 7.10.  $Q.E.D.$

**Ejemplo 7.24.** La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  converge si y sólo si  $p > 1$ . En efecto, si  $p \leq 0$  la serie es divergente porque su término general no tiende a cero, y si  $p > 0$  basta aplicar el criterio de la integral (con  $f(x) = x^{-p}$ ).

Prácticamente todos los criterios de convergencia de series vistos anteriormente son aplicables sólo a series de números no negativos. El criterio que veremos a continuación, sin embargo, es uno de los más importantes y sencillos que son válidos para series cuyo término general no tiene signo constante:

**Teorema** (criterio de Leibniz). *Si  $a_n \geq a_{n+1} > 0$  para todo  $n \in \mathbf{N}$ , y  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , entonces la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$  es convergente.*

*Demostración.* Spivak, p. 656.

*Q.E.D.*

*Ejercicio.* Probar que si  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  cumple las condiciones del criterio de Leibniz entonces para todo  $m \in \mathbf{N}$  se tiene

$$0 \leq (-1)^m \left( \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n - \sum_{n=1}^m (-1)^{n+1} a_n \right) \leq a_{m+1},$$

siendo estas desigualdades estrictas si  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  es estrictamente decreciente. En tal caso, el error cometido truncando la serie tiene el mismo signo que el primer término despreciado ( $(-1)^{m+2} a_{m+1}$ ), y valor absoluto menor que el valor absoluto de dicho término.

**Ejemplo 7.25.** La serie alternada  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$  es condicionalmente convergente.

### 7.3. Sucesiones y series de funciones

Sea  $\{f_n : n \in \mathbf{N}\}$  una colección de funciones definidas en un dominio común  $D$ . Diremos que la **sucesión de funciones**  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  **converge puntualmente** en  $x \in D$  si la sucesión  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  es convergente. Sea  $A \subset D$  el conjunto de todos los puntos  $x$  en que  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  converge puntualmente. El **límite puntual** de la sucesión  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  es la función  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  definida por

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad \forall x \in A.$$

Diremos entonces que la sucesión  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  **converge puntualmente a  $f$  en  $A$** , y escribiremos

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n.$$

Obviamente (ya que las series son un caso particular de las sucesiones) definiciones análogas son válidas para una **serie de funciones**.

**Ejemplo 7.26.** Para todo  $x \in \mathbf{R}$  la sucesión de funciones  $\{P_{n,0,\exp}\}_{n=0}^{\infty}$  converge puntualmente a  $\exp$  en  $\mathbf{R}$ . En efecto, hay que probar que para todo  $x \in \mathbf{R}$  se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n,0,\exp}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

Y, efectivamente (véase (6.1c)), se verifica

$$|e^x - P_{n,0,\exp}(x)| = |R_{n,0,\exp}(x)| \leq \max(1, e^x) \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

En otras palabras, hemos probado que

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

De forma análoga (utilizando las estimaciones (6.1) y (6.3)) se prueban las fórmulas

$$\begin{aligned} \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x \in \mathbf{R} \\ \operatorname{sen} x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall x \in \mathbf{R} \\ \log(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad -1 < x \leq 1 \\ \arctan x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -1 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

En particular, esto demuestra las siguientes igualdades interesantes:

$$\begin{aligned} e &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \\ \log 2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \\ \pi &= 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}. \end{aligned}$$

El problema fundamental que afecta al concepto de convergencia puntual de una sucesión (ó una serie) de funciones es que *el límite puntual de una sucesión de funciones  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  no hereda en general las buenas propiedades (por ejemplo, la continuidad ó la diferenciabilidad) que puedan tener las funciones  $f_n$ .* Esto es precisamente lo que ocurre en el siguiente ejemplo:

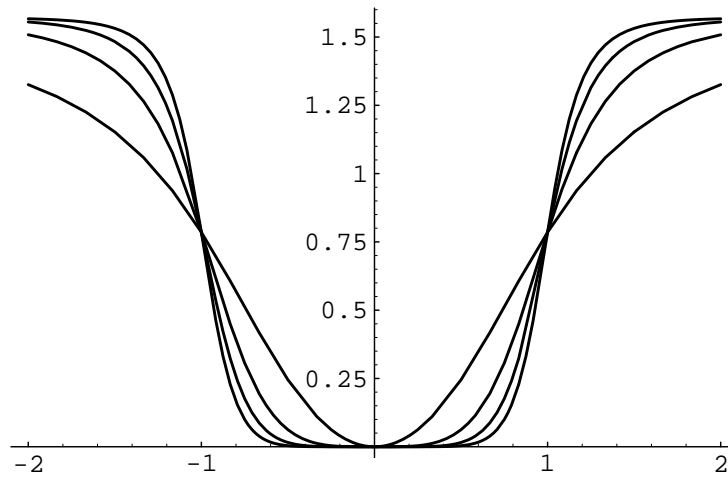


Figura 7.1: Gráfica de  $\arctan(x^{2n})$  para  $n = 1, \dots, 4$

**Ejemplo 7.27.** Consideremos la sucesión de funciones  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  en que  $f_n$  está definida por

$$f_n(x) = \arctan(x^{2n}), \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Las funciones  $f_n$  están definidas y son diferenciables (de hecho, infinitas veces) en toda la recta real (fig. 7.1). El límite puntual  $f$  de la sucesión  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  existe para todo  $x \in \mathbf{R}$ , y está dado por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \\ \frac{\pi}{4}, & x = \pm 1 \\ \frac{\pi}{2}, & |x| > 1. \end{cases}$$

A pesar de que las funciones  $f_n$  son diferenciables en todo  $\mathbf{R}$ , el límite puntual  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  no es ni siquiera continua en los puntos  $x = \pm 1$ .

Pueden construirse también ejemplos (véase Spivak, p. 683) de sucesiones de funciones  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  integrables en un intervalo  $[a, b]$ , que convergen puntualmente a una función  $f$  integrable en  $[a, b]$ , pero tales que

$$\int_a^b f = \int_a^b \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n.$$

### 7.3.1. Convergencia uniforme

En vista de ejemplos como los anteriores, es claro que es necesario definir un concepto de convergencia de una sucesión de funciones más fuerte que la convergencia puntual, de forma que el límite de una sucesión convergente de funciones tenga propiedades análogas a las de las funciones de la sucesión.

Para llegar a este nuevo concepto de convergencia, examinemos en detalle lo que significa que la sucesión  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  converja puntualmente a  $f$  en  $A$ . Esto quiere decir que, dado  $\epsilon > 0$ , para todo  $x \in A$  existe  $N \in \mathbf{N}$ , que en general dependerá de  $\epsilon$  y de  $x$ , de forma que si  $n \geq N$  entonces  $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$ . El problema de los ejemplos anteriores es que, fijado  $\epsilon > 0$ , el  $N$  de la definición anterior puede depender de  $x$ . Si pedimos que esto no ocurra llegamos al importante concepto de convergencia uniforme:

**Definición 7.28.** Se dice que la sucesión de funciones  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  **converge uniformemente** a la función  $f$  en el conjunto  $A \subset \mathbf{R}$  si para todo  $\epsilon > 0$  existe  $N \in \mathbf{N}$  tal que

$$n \geq N \implies |f(x) - f_n(x)| < \epsilon, \text{ para todo } x \in A.$$

La interpretación gráfica de la convergencia uniforme es muy clara: se pide que para todo  $\epsilon > 0$  toda la gráfica de la función  $f_n$  en  $A$  esté comprendida en una franja abierta de anchura  $2\epsilon$  centrada en la gráfica de  $f$  en  $A$ , para  $n$  suficientemente grande (fig.7.2).

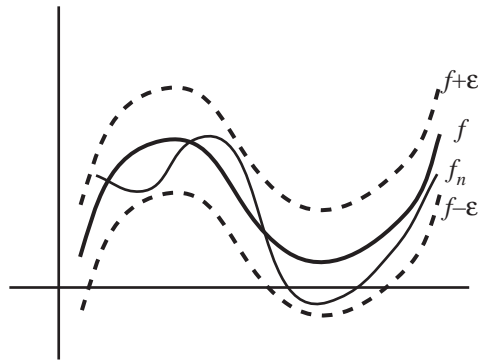


Figura 7.2: Convergencia uniforme de una sucesión de funciones

Es evidente de la definición que si  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  converge uniformemente a  $f$  en  $A$  entonces  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  converge puntualmente a  $f$  en dicho conjunto, pero el recíproco no es cierto en general (por ejemplo, puede verse que falla en el Ejemplo 7.27).

Los siguientes teoremas afirman que, en líneas generales, el límite de una sucesión de funciones uniformemente convergente goza de propiedades análogas a las de las funciones de la sucesión:

**Teorema 7.29.** Sea  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión de funciones uniformemente convergente a  $f$  en  $[a, b]$ .

- I) Si  $f_n$  es integrable en  $[a, b]$  para todo  $n \in \mathbf{N}$ , entonces  $f$  es integrable en  $[a, b]$  y se cumple

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n$$

II) Si  $f_n$  es continua en  $c \in [a, b]$  para todo  $n \in \mathbf{N}$ , entonces  $f$  es continua en  $c$

*Demostración.* Obsérvese, antes que nada, que si se cumplen las hipótesis de este teorema entonces se tiene

$$\int_a^b \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n$$

y

$$\lim_{x \rightarrow c} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{x \rightarrow c} f_n(x) \right).$$

Demostremos, por ejemplo, el segundo apartado (la demostración del primero, bajo condiciones algo más restrictivas, puede verse en Spivak, p. 687<sup>1</sup>). Sea  $\epsilon > 0$  arbitrario. Por la convergencia uniforme de  $f_n$  a  $f$ , existe  $N \in \mathbf{N}$  tal que

$$n \geq N \implies |f(t) - f_n(t)| < \epsilon/3, \quad \forall t \in [a, b].$$

Además, al ser  $f_N$  continua en  $c$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$|x - c| < \delta \implies |f_N(x) - f_N(c)| < \epsilon/3$$

(suponiendo, por sencillez, que  $c \in (a, b)$ ). Si  $|x - c| < \delta$  se cumple entonces:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(c)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(c)| + |f_N(c) - f(c)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

*Q.E.D.*

Si  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  converge uniformemente a  $f$  en  $(a, b)$ , y las funciones  $f_n$  son derivables en  $(a, b)$  para todo  $n \in \mathbf{N}$ , no siempre es cierto que el límite  $f$  sea derivable en  $(a, b)$ , o que si  $f$  es derivable  $f'$  coincida con  $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n$  (para convencerse de esto último tómese, por ejemplo,  $f_n(x) = \text{sen}(nx)/\sqrt{n}$ ). Sin embargo, se verifica el siguiente resultado más débil:

<sup>1</sup>Si admitimos sin demostración que  $f$  es integrable en  $[a, b]$ , entonces dado  $\epsilon > 0$  existe  $N \in \mathbf{N}$  tal que

$$n \geq N \implies |f(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}, \quad \forall x \in [a, b].$$

Por tanto,

$$\left| \int_a^b f - \int_a^b f_n \right| = \left| \int_a^b (f - f_n) \right| \leq \int_a^b |f - f_n| \leq \frac{\epsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) < \epsilon.$$

**Teorema 7.30.** *Supongamos que, para todo  $n \in \mathbf{N}$ ,  $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  es derivable en  $(a, b)$ , siendo además  $f'_n$  integrable en  $[a, b]$ . Si  $\{f'_n\}_{n=1}^\infty$  es uniformemente convergente a una función  $g$  en  $(a, b)$ , y existe  $c \in (a, b)$  tal que la sucesión  $\{f_n(c)\}_{n=1}^\infty$  es convergente, entonces:*

- I)  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  es uniformemente convergente a una función  $f$  en  $(a, b)$
- II)  $f$  es derivable en  $(a, b)$ , y  $f' = g$  en  $(a, b)$ .

En otras palabras, si se cumplen las condiciones del teorema anterior entonces

$$\left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n.$$

*Demostración.* Vamos a suponer, para simplificar la demostración, que  $g$  es continua en  $(a, b)$  (por ejemplo, esto ocurrirá automáticamente si todas las funciones  $f'_n$  son continuas en  $(a, b)$ ). En primer lugar, las hipótesis hechas sobre  $f'_n$  justifican la aplicación de la regla de Barrow, que conduce a la identidad

$$f_n(x) = f_n(c) + \int_c^x f'_n, \quad \forall x \in (a, b).$$

La convergencia *uniforme* de  $f'_n$  a  $g$  en  $(a, b)$  implica, por el Teorema 7.29, que para todo  $x \in (a, b)$  la integral del miembro derecho converge a  $\int_c^x g$ . Al ser  $f_n(c)$  convergente a  $f(c)$  se sigue que  $f_n$  converge puntualmente en  $(a, b)$ , siendo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \equiv f(x) = f(c) + \int_c^x g, \quad \forall x \in [a, b]. \quad (7.2)$$

La convergencia es uniforme en  $(a, b)$ , ya que

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &= \left| f(c) - f_n(c) - \int_c^x (f'_n - g) \right| \leq |f(c) - f_n(c)| + \left| \int_c^x |f'_n - g| \right| \\ &\leq |f(c) - f_n(c)| + (b - a) \sup_{x \in (a, b)} |f'_n(x) - g(x)|. \end{aligned}$$

Por último, si  $g$  es continua en  $(a, b)$  de (7.2) y el Teorema Fundamental del Cálculo se sigue que  $f'(x) = g(x)$  para todo  $x \in (a, b)$ . *Q.E.D.*

### 7.3.2. Series de funciones

Una serie de funciones  $\sum_{k=1}^\infty f_k$  es uniformemente convergente en un conjunto  $A$  si lo es la sucesión de sumas parciales  $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ , siendo  $s_n = \sum_{k=1}^n f_k$ . Al ser las series un caso particular de las sucesiones, los resultados sobre sucesiones de funciones uniformemente convergentes que acabamos de ver se aplican con modificaciones obvias a las series de funciones uniformemente convergentes.

Supongamos que  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$  es una serie de funciones uniformemente convergente a una función  $f$  en un intervalo  $[a, b]$ . En primer lugar, si las funciones  $f_k$  son integrables en  $[a, b]$  para todo  $k \in \mathbf{N}$  lo mismo ocurre con la función  $f$ , y se cumple

$$\int_a^b f = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k,$$

es decir

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k.$$

Si las funciones  $f_k$  son además continuas en  $c \in [a, b]$  para todo  $k \in \mathbf{N}$  entonces  $f$  es continua en  $c$ , y por tanto

$$\lim_{x \rightarrow c} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow c} f_k(x).$$

Finalmente, si  $f_n$  cumple las hipótesis del Teorema 7.30 para todo  $n \in \mathbf{N}$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$  converge en algún  $c \in (a, b)$  y  $\sum_{k=1}^{\infty} f'_k$  es uniformemente convergente en  $(a, b)$  entonces

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} f_k \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k \quad \text{en } (a, b).$$

En el caso de series de funciones hay un criterio muy sencillo que garantiza la convergencia uniforme:

**Teorema** (criterio  $M$  de Weierstrass). *Sea  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$  una serie de funciones definidas en un conjunto  $A$ , y supóngase que para todo  $n \in \mathbf{N}$  existe  $M_n \in \mathbf{R}$  tal que*

$$|f_n(x)| \leq M_n, \quad \forall x \in A.$$

*Si la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$  es convergente, entonces  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$  converge absoluta y uniformemente en  $A$ .*

*Demostración.* En primer lugar, por el criterio de comparación la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  converge absolutamente para todo  $x \in A$ . En segundo lugar, si para  $x \in A$  definimos  $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  entonces para todo  $n \in \mathbf{N}$  y para todo  $x \in A$  se verifica

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k \equiv \left| \sum_{k=1}^{\infty} M_k - \sum_{k=1}^n M_k \right|, \quad \forall x \in A. \end{aligned}$$

Como el miembro derecho puede hacerse más pequeño que cualquier  $\epsilon > 0$  tomando  $n$  suficientemente grande (al ser  $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$  convergente), la serie dada converge uniformemente en  $A$ . Q.E.D.



## 7.4. Series de Taylor y series de potencias

Dada una función  $f$  infinitas veces diferenciable en un punto  $c \in \mathbf{R}$ , es natural considerar la **serie de Taylor** de  $f$  centrada en  $c$ , definida por

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x - c)^k.$$

Escribiremos simbólicamente

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x - c)^k \quad (7.3)$$

para denotar que el miembro derecho es la serie de Taylor centrada en  $c$  del miembro izquierdo. Nótese que la serie de Taylor no es más que una serie de *funciones*  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  en la que las funciones  $f_k$  son particularmente sencillas:

$$f_k(x) = \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x - c)^k.$$

En general, una serie de funciones de la forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - c)^k$$

se denominará **serie de potencias** centrada en  $c$ .

La pregunta fundamental que nos hacemos es la siguiente: ¿bajo qué condiciones (es decir, para qué funciones  $f$  y con qué restricciones sobre  $x$ ) podemos reemplazar  $\sim$  por  $=$  en (7.3)? Antes de continuar, obsérvese que la serie de Taylor de  $f$  centrada en  $c$  puede ser convergente en algún punto  $x$  a un número *distinto* de  $f(x)$ . Por ejemplo, puede probarse que si  $f$  está definida por  $f(0) = 0$  y  $f(x) = e^{-1/x^2}$  para todo  $x \neq 0$ , entonces  $f$  es infinitamente diferenciable en  $\mathbf{R}$  y se cumple

$$f^{(k)}(0) = 0, \quad \forall k = 0, 1, \dots$$

Por tanto, para todo  $x \neq 0$  la serie de Taylor de  $f$  centrada en 0 converge a  $0 \neq f(x)$ .

**Definición 7.31.** Sea  $f$  una función infinitamente diferenciable en un intervalo  $(a, b)$  (diremos en tal caso que  $f$  es **de clase infinito** en  $(a, b)$  y escribiremos  $f \in C^\infty(a, b)$ ). Se dirá que  $f$  es **analítica** en  $c \in (a, b)$  si la serie de Taylor de  $f$  centrada en  $c$  converge a  $f(x)$  para todo  $x$  en un cierto intervalo abierto centrado en  $c$ .

Por ejemplo, por lo visto anteriormente las funciones  $\cos x$ ,  $\sen x$ ,  $\log(1+x)$  y  $\arctan x$  son analíticas en 0, mientras que la función del ejemplo anterior no lo es.

La convergencia de  $\sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(c)(x-c)^k/k!$  a  $f(x)$  significa que

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{n,c,f}(x),$$

o, equivalentemente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n,c,f}(x) = 0. \tag{7.4}$$

Por tanto,  $f$  será analítica en  $c$  si es de clase  $C^\infty(c-r, c+r)$  para algún  $r > 0$ , y para todo  $x \in (c-r, c+r)$  se cumple (7.4).

**Proposición 7.32.** *Sea  $f \in C^\infty(a, b)$ , y supongamos que existe  $M > 0$  tal que para todo  $k = 0, 1, \dots$  se cumple*

$$|f^{(k)}(x)| \leq M^k, \quad \forall x \in (a, b).$$

*Entonces  $f$  es analítica en  $c$ , para todo  $c \in (a, b)$ .*

*Demostración.* Si  $c \in (a, b)$ , sea  $r = \min(c-a, b-c)$ , de forma que  $(c-r, c+r) \subset (a, b)$ . Si  $x \in (c-r, c+r)$  entonces (teorema de Taylor) existe  $t$  en el intervalo  $(c, x)$  ó  $(x, c)$  (nótese que ambos intervalos están contenidos en  $(a, b)$ ) tal que

$$R_{n,c,f}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} (x-c)^{n+1}$$

y por tanto

$$|R_{n,c,f}(x)| \leq \frac{(M|x-c|)^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

*Q.E.D.*

Al ser las series de Taylor un caso particular de las series de potencias, el estudio de las propiedades de las series de potencias tiene un interés indudable. En particular, dicho estudio nos permitirá probar que una serie de potencias convergente en un cierto intervalo abierto no vacío es siempre la serie de Taylor de una función (concretamente, de la función a la cual converge la serie).

Para simplificar (sin pérdida de generalidad), nos restringiremos a considerar series de potencias

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \tag{7.5}$$

centradas en 0. El resultado fundamental es el siguiente:

**Teorema 7.33.** *Supongamos que la serie de potencias (7.5) es convergente en  $x = c \neq 0$ . Entonces se cumple:*

- I) *La serie (7.5) converge absolutamente para todo  $x \in (-|c|, |c|)$  a una función  $f$ .*
- II) *La convergencia de (7.5) a  $f$  es uniforme en todo intervalo  $[-b, b]$  con  $0 < b < |c|$ .*
- III) *Para todo  $x \in (-|c|, |c|)$  la función  $f$  es derivable en  $x$ , y se verifica*

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1},$$

*siendo esta última serie absoluta y uniformemente convergente a  $f'$  en todo intervalo  $[-b, b]$  con  $0 < b < |c|$ .*

*Demostración.* En primer lugar, al ser la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k c^k$  convergente, su término general tiende a cero cuando  $k \rightarrow \infty$ , y por lo tanto está acotado: existe  $M \in \mathbf{R}$  tal que

$$|a_k c^k| < M, \quad \forall k \in \mathbf{N} \cup \{0\}.$$

Si  $0 < b < |c|$  y  $-b \leq x \leq b$  entonces

$$|a_k x^k| = |a_k c^k| \left| \frac{x}{c} \right|^k \leq M \left( \frac{b}{|c|} \right)^k, \quad k = 0, 1, \dots$$

Como  $0 < b/|c| < 1$ , la serie numérica (geométrica)  $\sum_{k=0}^{\infty} (b/|c|)^k$  es convergente, y por tanto el segundo apartado se deduce del criterio  $M$  de Weierstrass. Al ser  $b \in (0, |c|)$  arbitrario, esto prueba también el primer apartado.

Para probar el tercer apartado, nótese que si  $x \in [-b, b]$  entonces

$$|k a_k x^{k-1}| = k |a_k c^k| \frac{|x|^{k-1}}{|c|^k} \leq k M \frac{b^{k-1}}{|c|^k} = \frac{M}{b} \cdot k \left( \frac{b}{|c|} \right)^k, \quad \forall k \in \mathbf{N}.$$

Como (al ser de nuevo  $0 < b/|c| < 1$ ) la serie numérica  $\sum_{k=1}^{\infty} k (b/|c|)^k$  es convergente (criterio del cociente), por el criterio  $M$  de Weierstrass la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$  converge absoluta y uniformemente en  $[-b, b]$ , y por el Teorema 7.30 su suma es  $f'$ . Como  $0 < b < |c|$  es arbitrario, esto prueba el último apartado. *Q.E.D.*

El teorema anterior tiene varias consecuencias importantes que veremos a continuación. En primer lugar, dada una serie de potencias  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  existe un número  $R \geq 0$ , llamado **radio de convergencia** de la serie, tal que la serie es (absolutamente) convergente para  $|x| < R$  y divergente para  $|x| > R$

(si la serie converge para todo  $x \in \mathbf{R}$ , por definición se toma  $R = \infty$ ). En efecto, si la serie no converge en todo  $\mathbf{R}$  (en cuyo caso  $R = \infty$ ) por el teorema anterior  $R = \sup \{ |x| : \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k \text{ es convergente} \}$ . Nótese que  $R$  puede ser cero, lo cual significa que la serie sólo converge para  $x = 0$ ; por ejemplo, veremos a continuación que la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} k! x^k$  tiene radio de convergencia 0. Para calcular el radio de convergencia de una serie de potencias  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ , podemos utilizar el criterio del cociente ó el de la raíz aplicado a la serie de valores absolutos  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| |x|^k$ . Por ejemplo, para aplicar el criterio del cociente hay que calcular

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}| |x|^{n+1}}{|a_n| |x|^n} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

(donde se supone que  $a_n \neq 0$  para todo  $n$  suficientemente grande). Si existe

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|, \quad (7.6)$$

y es distinto de 0, la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  converge absolutamente si  $|x| < 1/q$ , y diverge si  $|x| > 1/q$ . Si  $q = 0$ ,  $r = 0$  y la serie converge para todo  $x \in \mathbf{R}$ , mientras que si  $q = \infty$  entonces  $r = \infty$  para todo  $x \neq 0$  y por tanto la serie diverge para todo  $x \neq 0$ . Luego si existe el límite (7.6) entonces el radio de convergencia de la serie es  $1/q$  (tomando  $1/q = \infty$  si  $q = 0$ , y  $1/q = 0$  si  $q = \infty$ ), es decir

$$R = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right)^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

De forma análoga aplicando el criterio de la raíz se demuestra que si existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$  entonces

$$R = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1}.$$

Por ejemplo, para la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} k! x^k$  se tiene  $a_k = k!$ , y por tanto

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Supongamos que el radio de convergencia de la serie de potencias  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  es  $R > 0$ , y sea

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad |x| < R,$$

su suma. Por el Teorema 7.33 (aplicado a cualquier  $c \in (0, R)$ ),  $f$  es derivable en  $(-R, R)$  y

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k, \quad |x| < R,$$

siendo la serie del miembro derecho (absolutamente) convergente en  $(-R, R)$ . Aplicando el Teorema 7.33 a esta última serie deducimos que  $f'$  es derivable en  $(-R, R)$  y

$$f'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k, \quad |x| < R,$$

siendo esta última serie absolutamente convergente. Repitiendo este razonamiento las veces que sean necesarias obtenemos que para todo  $n \in \mathbf{N}$  la función  $f$  es  $n$  veces derivable en  $(-R, R)$ , y  $f^{(n)}$  está dada por la serie de potencias

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (n+k)(n+k-1) \dots (k+1) a_{n+k} x^k \\ &= n! \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} a_{n+k} x^k, \quad |x| < R, \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

donde la serie del miembro derecho es absolutamente convergente en  $(-R, R)$ . Por tanto,  $f$  es de clase  $C^\infty(-R, R)$ . Además, de la fórmula anterior se deduce que

$$f^{(n)}(0) = n! a_n.$$

Esto significa que *en el interior del intervalo de convergencia  $(-R, R)$  la serie de potencias  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  es la serie de Taylor de su suma  $f$ .*