

Manual de  
**Ecuaciones Diferenciales I**

Federico Finkel Morgenstern y Artemio González López

Febrero de 2009

Edita: Universidad Complutense de Madrid  
Área de Ciencias Exactas y de la Naturaleza

Departamento de Física Teórica II  
Facultad de Ciencias Físicas  
Avenida Complutense s/n  
Ciudad Universitaria  
28040 Madrid

Universidad Complutense de Madrid

Autores:  
Federico Finkel Morgenstern  
Artemio González López

© Los autores

Se prohíbe la reproducción total o parcial de esta obra –incluido el diseño de portada–, sea cual fuere el medio, electrónico o mecánico, sin el consentimiento del editor.

ISBN: 978-84-691-9834-6  
Depósito Legal:  
Impreso en Madrid

# Índice general

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.1	Nociones generales	1
1.2	Ecuaciones diferenciales de primer orden	2
1.2.1	$y' = f(x)$	2
1.2.2	Ecuaciones de variables separadas	3
1.2.3	Ecuaciones homogéneas	5
1.2.4	Ecuaciones exactas	7
1.2.5	Ecuaciones lineales	11
1.2.6	Ecuación de Bernoulli	13
1.2.7	Ecuación de Riccati	14
1.3	Teoremas de existencia y unicidad	16
1.3.1	Funciones lipschitzianas	18
1.3.2	Ecuaciones autónomas de primer orden	25
<b>2</b>	<b>Sistemas y ecuaciones lineales</b>	<b>29</b>
2.1	Espacio de soluciones	29
2.1.1	Wronskiano	32
2.1.2	Método de variación de constantes	35
2.2	Sistemas con coeficientes constantes	35
2.2.1	Cálculo de la exponencial de una matriz	38
2.2.2	Polinomio interpolador de Lagrange	45
2.3	Ecuaciones de orden $n$	47
2.3.1	Ecuaciones lineales	48
2.3.2	Método de variación de constantes	50
2.3.3	Reducción del orden	53
2.4	Ecuaciones de orden $n$ con coeficientes constantes	54
2.4.1	Método de los coeficientes indeterminados	56
2.5	Estabilidad	59
2.5.1	Sistemas con coeficientes constantes	63
2.5.2	Ecuaciones de orden $n$	65
2.5.3	Criterio de Routh–Hurwitz	66
<b>3</b>	<b>Soluciones en forma de serie</b>	<b>71</b>
3.1	Puntos regulares. Ecuaciones de Hermite y Legendre	71
3.1.1	Puntos regulares	72
3.1.2	La ecuación de Hermite	78
3.1.3	La ecuación de Legendre	84
3.2	Puntos singulares regulares	87
3.2.1	La ecuación de Bessel	95

<b>4</b>	<b>Sistemas dinámicos en el plano</b>	<b>105</b>
4.1	Resultados generales . . . . .	105
4.2	Sistemas lineales . . . . .	112
4.3	Sistemas no lineales . . . . .	117

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Nociones generales

Una **ecuación diferencial** es una relación entre una función incógnita  $u$  de una variable  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ , un número finito de derivadas parciales de  $u$ , y la propia variable  $\mathbf{x}$ , que ha de cumplirse idénticamente en cada punto de un abierto  $D \subset \mathbb{R}^N$ .

**Ejemplo 1.1.** La ecuación de Poisson

$$\frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial z^2} = \rho(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \equiv (x, y, z),$$

donde  $\rho$  (que en electrostática representa la densidad de carga) es una función conocida.

**Comentario.** En una ecuación diferencial, tanto  $u$  como sus derivadas parciales deben evaluarse en el mismo punto. Por ejemplo,

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + u(x + 3, y) = 0$$

no es una ecuación diferencial.

Una ecuación diferencial donde la variable independiente  $\mathbf{x}$  tiene varias componentes, es decir, donde  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$  con  $N > 1$ , se dice que es una **ecuación en derivadas parciales** (EDP). En cambio, si  $N = 1$  la ecuación diferencial se dice que es **ordinaria**. En esta asignatura nos centraremos principalmente en las ecuaciones diferenciales ordinarias, que definiremos más formalmente a continuación.

**Definición 1.2.** Una **ecuación diferencial ordinaria** (EDO) de orden  $n$  es una ecuación de la forma

$$\boxed{F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0}, \quad (1.1)$$

donde  $F$  está definida en un abierto  $U \subset \mathbb{R}^{n+2}$  y  $\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \neq 0$  en  $U$ . Una **solución** de (1.1) es una función  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivable  $n$  veces en un intervalo abierto  $D \subset \mathbb{R}$  tal que

$$\boxed{F(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n)}(x)) = 0, \quad \forall x \in D}. \quad (1.2)$$

**Comentario.** La condición  $\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \neq 0$  en  $U$  se impone para que la ecuación sea verdaderamente de orden  $n$ . Cuando sea posible despejar explícitamente la derivada de mayor orden de la ecuación (1.1), es decir, si podemos reescribirla como

$$\boxed{y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})}, \quad (1.3)$$

diremos que la ecuación está en **forma normal**.

**Ejemplo 1.3.** La ecuación

$$y' = -ky, \quad k > 0, \quad (1.4)$$

aparece al estudiar la desintegración de un material radioactivo, donde  $y$  representa la masa del material y  $x$  el tiempo.

*Solución:* nótese que  $y = 0$  es solución de (1.4), mientras que si  $y \neq 0$  se tiene

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -k \implies \int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = -k \int dx \implies \log |y| = -kx + c \implies |y| = e^c e^{-kx},$$

siendo  $c$  una constante arbitraria. Por tanto,

$$y = y_0 e^{-kx}, \quad (1.5)$$

donde  $y_0$  es una constante arbitraria (posiblemente nula ya que  $y = 0$  también es solución) es solución de la ecuación (1.4). De hecho, se trata de la **solución general** de la ecuación (1.4), ya que cualquier solución de dicha ecuación es de la forma (1.5).

**Comentario.** Nótese que la solución general (1.5) de la ecuación (1.4) depende de una constante arbitraria. La solución general de una ecuación de orden  $n$  contiene  $n$  constantes arbitrarias.

## 1.2 Ecuaciones diferenciales de primer orden

En esta sección estudiaremos el caso más sencillo de las ecuaciones de primer orden. Supondremos además que la ecuación puede escribirse en forma normal

$$\boxed{y' = f(x, y)}. \quad (1.6)$$

Veremos a continuación algunos casos particulares de la ecuación (1.6) que pueden integrarse explícitamente.

### 1.2.1 $y' = f(x)$

Si suponemos que  $f$  es continua en un intervalo abierto  $D$ , la ecuación se resuelve simplemente integrando ambos miembros a partir de un punto cualquiera  $x_0 \in D$ :

$$\boxed{y = \int_{x_0}^x f(t) dt + c}, \quad c = y(x_0). \quad (1.7)$$

Utilizando la notación de integral indefinida, a menudo escribiremos la solución como

$$y = \int f(t) dt + c, \quad \text{o también como} \quad y = \int f(x) dx + c.$$

De la expresión (1.7) se sigue que el **problema de valores iniciales**

$$y' = f(x), \quad y(x_0) = y_0$$

tiene la *solución única*  $y = \int_{x_0}^x f(t) dt + y_0$ .

### 1.2.2 Ecuaciones de variables separadas

Son ecuaciones de la forma

$$\boxed{y' = \frac{f(x)}{g(y)}}, \quad (1.8)$$

donde  $f, g$  son continuas en sendos intervalos abiertos  $U, V$ , y  $g(y) \neq 0$  para todo  $y \in V$ .

*Solución:* Si  $y(x)$  es solución de la ecuación (1.8), entonces

$$\begin{aligned} g(y(x))y'(x) = f(x) &\implies \int_{x_0}^x g(y(s))y'(s) \, ds = \int_{x_0}^x f(s) \, ds \\ &\implies_{t=y(s)} \int_{y(x_0)}^{y(x)} g(t) \, dt = \int_{x_0}^x f(s) \, ds \end{aligned}$$

Por tanto, cualquier solución de (1.8) satisface la **ecuación implícita**

$$\boxed{\int g(y) \, dy = \int f(x) \, dx + c}, \quad (1.9)$$

donde  $c$  es una constante arbitraria. Recíprocamente, derivando (1.9) respecto de  $x$  tomando a  $y$  como función de  $x$ , concluimos que cualquier función  $y(x)$  que satisfaga la relación (1.9) es solución de la ecuación (1.8). Por tanto (1.9) es la solución general de (1.8).

**Comentario.** La solución general (1.9) de la ecuación (1.8) está dada en la forma implícita

$$\phi(x, y) = c, \quad \text{donde} \quad \phi(x, y) = \int g(y) \, dy - \int f(x) \, dx. \quad (1.10)$$

La relación  $\phi(x, y) = c$  define implícitamente una familia uniparamétrica de curvas en el plano (correspondiendo cada curva a un valor fijo de  $c$ , si bien puede haber varias ramas con un mismo valor de  $c$ ), que se denominan **curvas integrales** de la ecuación (1.8).

La función  $\phi$  es de clase  $C^1(U \times V)$  (ya que  $\frac{\partial \phi}{\partial x} = -f(x)$  y  $\frac{\partial \phi}{\partial y} = g(y)$  son continuas en  $U$  y  $V$ , respectivamente), y además  $\frac{\partial \phi}{\partial y}$  no se anula en ningún punto de  $U \times V$ . Dado un punto  $(x_0, y_0)$  de  $U \times V$ , consideramos la curva integral definida por la relación (1.10) con  $c = \phi(x_0, y_0)$ . Por el **teorema de la función implícita**, existe un entorno de  $(x_0, y_0)$  donde la relación (1.10) define una *única* función derivable  $y(x)$  tal que

- i)  $y(x_0) = y_0$ ,
- ii)  $\phi(x, y(x)) = \phi(x_0, y_0), \quad \forall x \in \text{dom } y$ .

Por tanto, dicha función  $y$  es localmente la única solución de la ecuación diferencial (1.8) que satisface la condición inicial  $y(x_0) = y_0$ . En otras palabras, el problema de valor inicial asociado a la ecuación (1.8) posee *solución única local* si los datos iniciales  $(x_0, y_0)$  pertenecen a  $U \times V$ .

**Comentario.** El que la solución general de la ecuación de variables separadas (1.8) se exprese mediante una relación implícita (cf. (1.10)) *no* es una propiedad característica de este tipo de ecuaciones. De hecho, a lo largo de esta sección veremos que en muchas ocasiones la solución general de la ecuación de primer orden (1.6) también se expresa mediante una relación implícita. En general no será posible despejar de ella  $y$  como función explícita de  $x$ , si bien normalmente el teorema de la función implícita garantizará la existencia local de dicha función.

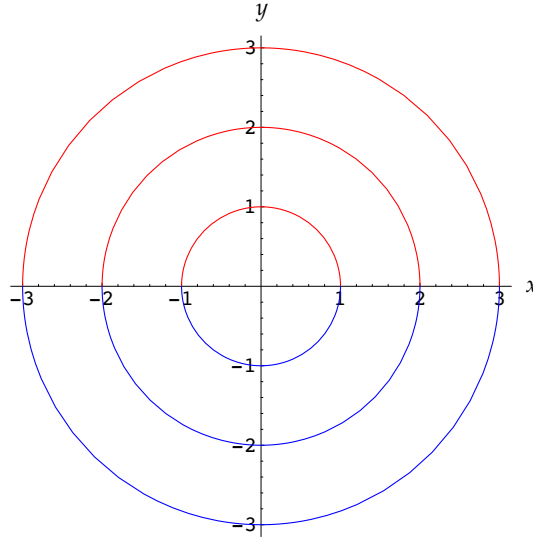


Figura 1.1: Curvas integrales de la ecuación  $y' = -x/y$ . Cada curva integral contiene dos soluciones, definidas en la ecuación (1.13).

**Ejemplo 1.4.** Consideremos la ecuación de variables separadas

$$y' = -\frac{x}{y}. \quad (1.11)$$

En nuestra notación,  $f(x) = -x$ ,  $g(y) = y$ ,  $U = \mathbb{R}$ , y o bien  $V = \mathbb{R}^+$  o bien  $V = \mathbb{R}^-$ , pero no  $V = \mathbb{R}$ , ya que la función  $g$  se anula cuando  $y = 0$ . Procediendo como antes (o bien utilizando directamente la fórmula (1.9)), se obtiene la solución general de (1.11):

$$x^2 + y^2 = c, \quad c > 0. \quad (1.12)$$

Por tanto en este caso las curvas integrales son circunferencias de radio  $\sqrt{c}$  centradas en el origen (ver Fig. 1.1). Cada curva integral contiene *dos* soluciones, dadas por las funciones

$$y = \pm\sqrt{c - x^2}, \quad x \in (-\sqrt{c}, \sqrt{c}), \quad (1.13)$$

correspondiendo los signos  $\pm$  a la elección  $V = \mathbb{R}^\pm$ . La ecuación (1.11) no está definida para  $y = 0$ , pero las soluciones (1.13) tienen límite (cero) cuando  $x \rightarrow \pm\sqrt{c} \mp$  (aunque no son derivables en dichos puntos, al tener pendiente infinita). Nótese que por cada punto  $(x_0, y_0)$  del plano con  $y_0 \neq 0$  pasa una única solución.

**Ejemplo 1.5.** Consideramos ahora la ecuación

$$y' = -\frac{1 + y^2}{1 + x^2}, \quad (1.14)$$

que también es de variables separadas. En este caso  $f(x) = -\frac{1}{1+x^2}$  y  $g(y) = \frac{1}{1+y^2}$  son continuas y  $g$  nunca se anula, por lo que podemos tomar  $U = V = \mathbb{R}$ . La ecuación (1.14) se integra inmediatamente, con el resultado

$$\arctan y = -\arctan x + c, \quad (1.15)$$

donde  $|c| < \pi$  para que la ecuación (1.15) tenga solución en  $y$  para algún valor de  $x$ . Si  $c \neq \pm\frac{\pi}{2}$  y llamamos  $C = \tan c$ , tomando la tangente en ambos miembros de (1.15) se llega a la siguiente



expresión para la solución de (1.14):

$$y = \tan(c - \arctan x) = \frac{C - x}{1 + Cx}. \quad (1.16)$$

Por otra parte, si  $c = \pm \frac{\pi}{2}$  se tiene

$$y = \tan\left(\pm \frac{\pi}{2} - \arctan x\right) = \cot(\arctan x) = \frac{1}{x}, \quad (x \neq 0). \quad (1.17)$$

Nótese que esta solución se obtiene formalmente de (1.16) en el límite  $C \rightarrow \pm\infty$ .

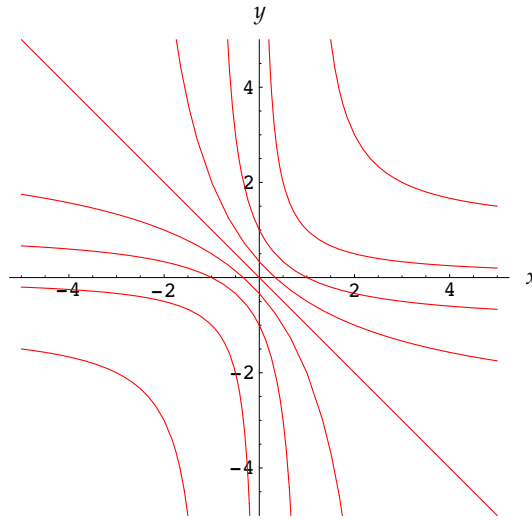


Figura 1.2: Soluciones de la ecuación  $y' = -\frac{1+y^2}{1+x^2}$ .

El problema de valores iniciales asociado a la ecuación (1.14) siempre posee solución única local. Efectivamente, si imponemos la condición inicial  $y(x_0) = y_0$ , de (1.16) concluimos que

$$C = \frac{x_0 + y_0}{1 - x_0 y_0},$$

que tiene sentido salvo si  $y_0 = 1/x_0$ , en cuyo caso la solución correspondiente es  $y = 1/x$ .

*Nota.* La única solución de la ecuación (1.14) que está definida en toda la recta real es  $y = -x$ , que corresponde a  $C = 0$ . La solución (1.17) y todas las demás soluciones (1.16) “explotan” para algún valor finito de  $x$  (concretamente para  $x = 0$  y  $x = -\frac{1}{C}$ , respectivamente). Sin embargo, el miembro derecho de la ecuación (1.14) es continuo (de hecho de clase  $C^\infty$ ) en todo el plano. En general, el estudio de las singularidades de la función  $f(x, y)$  no proporciona por sí sólo información acerca de las posibles singularidades de las soluciones de la ecuación diferencial (1.6).

### 1.2.3 Ecuaciones homogéneas

Son ecuaciones de la forma

$$y' = f(x, y), \quad (1.18)$$

donde  $f$  es continua en un abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$  y homogénea de grado cero, es decir

$$\boxed{f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y), \quad \forall x, y \in U, \quad \forall \lambda \neq 0}. \quad (1.19)$$

Este tipo de ecuación se reduce a una de variables separadas mediante el cambio

$$\boxed{y = xz}, \quad x \neq 0,$$

donde  $z(x)$  es la nueva función incógnita. Efectivamente,

$$y' = z + xz' = f(x, xz) = f(1, z) \implies z' = \frac{f(1, z) - z}{x}. \quad (1.20)$$

Si  $\lambda$  satisface la condición  $f(1, \lambda) = \lambda$ , entonces la ecuación (1.20) tiene la solución constante  $z = \lambda$ , que corresponde a  $y = \lambda x$ . En caso contrario, la ecuación (1.20) se resuelve separando variables e integrando, lo que conduce a la relación implícita

$$\boxed{\int \frac{dz}{f(1, z) - z} = \log|x| + c, \quad \text{con } z = \frac{y}{x}}. \quad (1.21)$$

**Ejemplo 1.6.** Consideremos la ecuación

$$y' = \frac{y - 2x}{2y + x}. \quad (1.22)$$

Como

$$f(x, y) = \frac{y - 2x}{2y + x}$$

es homogénea de grado cero (y continua en todo el plano salvo en la recta  $y = -x/2$ ) nos encontramos ante una ecuación homogénea. Es fácil comprobar que la ecuación  $f(1, \lambda) = \lambda$  no tiene soluciones reales, por lo que ninguna recta por el origen es solución de (1.22). Como

$$\frac{1}{f(1, z) - z} = -\frac{2z + 1}{2(z^2 + 1)},$$

la fórmula (1.21) conduce inmediatamente a

$$\log(1 + z^2) + \arctan z = c - 2 \log|x|,$$

donde  $c$  es una constante arbitraria. Sustituyendo  $z$  por  $y/x$  y simplificando, obtenemos la siguiente expresión implícita para las curvas integrales de la ecuación (1.22):

$$\log(x^2 + y^2) + \arctan \frac{y}{x} = c. \quad (1.23)$$

Nótese que en este caso no es posible despejar explícitamente  $y$  como función de  $x$ . Sin embargo, si expresamos la condición (1.23) en coordenadas polares

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta,$$

obtenemos inmediatamente

$$2 \log r + \theta = c \implies r = Ce^{-\theta/2}; \quad C = e^{c/2} > 0. \quad (1.24)$$

Las curvas integrales son por tanto espirales donde la coordenada radial crece exponencialmente cuando el ángulo gira en el sentido de las agujas del reloj. Para representar gráficamente estas espirales es conveniente determinar primero las isoclinas de la ecuación (1.22). En general, una **isoclina** de la ecuación de primer orden (1.6) es el lugar geométrico de los puntos en los cuales los vectores tangentes a las curvas integrales tienen todos una misma dirección. Las

isoclinas se definen por tanto por la ecuación implícita  $f(x, y) = m$ , donde se admite que  $m \in \mathbb{R}$  ó  $m = \infty$ . Para la ecuación (1.22) de este ejemplo, la ecuación de las isoclinas es

$$\frac{y - 2x}{2y + x} = m, \quad \text{donde } m \in \mathbb{R} \text{ ó } m = \infty. \quad (1.25)$$

Por tanto, en este caso las isoclinas son rectas por el origen, siendo la de pendiente  $m$

$$y = \frac{m + 2}{1 - 2m} x. \quad (1.26)$$

En particular, las isoclinas de pendiente  $0, \infty, 1, -1$  son las rectas  $y = 2x, y = -x/2, y = -3x, y = x/3$ , respectivamente. En la Fig. 1.3 hemos representado estas isoclinas junto con las espirales (1.24) correspondientes a  $c = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ . Cada espiral contiene infinitas soluciones de la ecuación (1.22), definida cada una de ellas en un intervalo de la forma  $(x_0, x_1)$ , donde  $(x_0, y_0)$  e  $(x_1, y_1)$  son dos puntos de corte consecutivos entre la espiral y la isocлина de pendiente infinita  $y = -x/2$ .

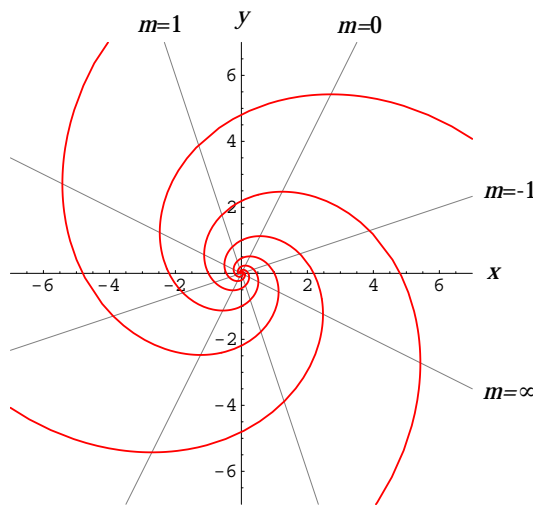


Figura 1.3: Curvas integrales de la ecuación  $y' = \frac{y-2x}{2y+x}$  (en rojo) e isoclinas de pendiente  $0, \infty, 1, -1$  (en gris).

### 1.2.4 Ecuaciones exactas

Una ecuación diferencial de la forma

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0, \quad (1.27)$$

donde  $P, Q$  son funciones continuas en un abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$  y  $Q$  no se anula en  $U$ , se dice **exacta** si existe una función  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  que verifica

$$P(x, y) = f_x(x, y), \quad Q(x, y) = f_y(x, y), \quad \forall (x, y) \in U. \quad (1.28)$$

Es decir, la ecuación (1.27) es exacta si  $(P, Q) = \nabla f$  en  $U$ . En este caso, si  $y(x)$  es una solución de (1.27), podemos reescribir dicha ecuación como

$$f_x(x, y(x)) + f_y(x, y(x))y'(x) = \frac{d}{dx} f(x, y(x)) = 0,$$

y por tanto las soluciones de la ecuación exacta (1.27)-(1.28) verifican

$$\boxed{f(x, y) = c}, \quad (1.29)$$

donde  $c$  es una constante. Recíprocamente, si se cumple (1.29), entonces como  $f_y = Q$  no se anula en  $U$ , el teorema de la función implícita define a  $y$  como función de  $x$  en un entorno de cada punto de  $U$ , verificándose además la ecuación (1.27) de partida en el dominio de  $y$ . Por tanto, la solución general de (1.27)-(1.28) está dada por la ecuación (1.29) que define las curvas de nivel de  $f$ .

En caso de que las funciones  $P, Q$  sean de clase  $C^1(U)$ , una condición *necesaria* para que la ecuación (1.27) sea exacta es

$$\boxed{P_y(x, y) = Q_x(x, y)}, \quad \forall (x, y) \in U, \quad (1.30)$$

ya que por el lema de Schwarz  $f_{xy} = f_{yx}$  en  $U$ . La condición (1.30) es también *suficiente* si el abierto  $U$  es **simplemente conexo**<sup>1</sup>, que en las aplicaciones será el caso más usual.

Veamos cómo determinar la función  $f$  suponiendo que la condición (1.30) se cumple en un rectángulo abierto  $U = (a, b) \times (c, d)$ . Sea  $(x_0, y_0)$  un punto de  $U$ . Integrando la ecuación  $f_x = P$ , obtenemos

$$f(x, y) = \int_{x_0}^x P(s, y) ds + g(y), \quad (1.31)$$

donde  $g$  depende sólo de  $y$ . Nótese que si  $(x, y) \in U$  entonces todos los puntos de la forma  $(s, y)$  con  $s \in [x_0, x]$  ó  $[x, x_0]$  están también en  $U$ , y por tanto la integral de la fórmula anterior está bien definida. Derivando parcialmente (1.31) respecto de  $y$  y utilizando (1.30) se sigue que

$$f_y(x, y) = g'(y) + \int_{x_0}^x P_y(s, y) ds = g'(y) + \int_{x_0}^x Q_x(s, y) ds = g'(y) + Q(x, y) - Q(x_0, y).$$

Imponiendo la segunda ecuación  $f_y = Q$ , obtenemos

$$g'(y) = Q(x_0, y) \implies g(y) = \int_{y_0}^y Q(x_0, s) ds, \quad (1.32)$$

salvo constante arbitraria. (Como antes, la integral de (1.32) está bien definida puesto que todos los puntos  $(x_0, s)$  están en  $U$  si  $s \in [y_0, y]$  ó  $[y, y_0]$ .) Por tanto, en este caso la solución general (1.29) de la ecuación (1.27) viene dada por

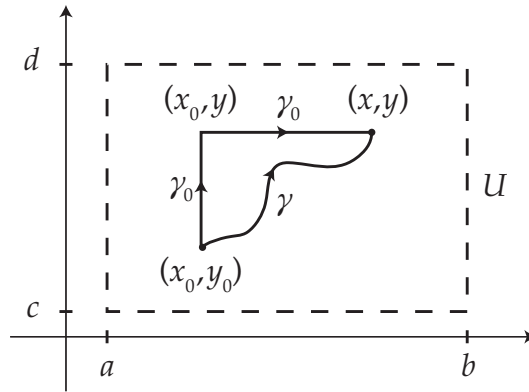
$$\boxed{f(x, y) = \int_{x_0}^x P(s, y) ds + \int_{y_0}^y Q(x_0, s) ds = c}. \quad (1.33)$$

La función  $f$  de la última fórmula puede también expresarse en forma más compacta como la integral de línea

$$f(x, y) = \int_{\gamma_0} (P, Q) \cdot d\mathbf{r}, \quad (1.34)$$

donde  $\gamma_0$  es la curva quebrada de la Fig. 1.4. Como el rectángulo  $U$  es simplemente conexo y se cumple la condición (1.30), la integral de línea del campo vectorial  $(P, Q)$  a lo largo de cualquier curva  $C^1$  a trozos contenida en  $U$  es *independiente del camino seguido*. Por tanto podemos escribir

$$\boxed{f(x, y) = \int_{\gamma} (P, Q) \cdot d\mathbf{r}}, \quad (1.35)$$

Figura 1.4: Caminos que unen  $(x_0, y_0)$  con  $(x, y)$  en  $U$ .

donde  $\gamma$  es cualquier curva  $C^1$  a trozos que vaya de  $(x_0, y_0)$  a  $(x, y)$  sin salirse de  $U$  (ver Fig. 1.4).

*Nota.* La fórmula (1.35) es válida en cualquier abierto simplemente conexo donde se cumpla la condición (1.30).

**Ejemplo 1.7.** Sea la ecuación

$$2xy + 1 + (x^2 + y)y' = 0, \quad (1.36)$$

que es de la forma (1.27) con  $P = 2xy + 1$  y  $Q = x^2 + y$ . Como  $P_y = 2x = Q_x$ , la ecuación es exacta en cualquiera de los abiertos simplemente conexos  $U_{\pm} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \gtrless -x^2\}$  donde  $Q$  no se anula. Buscamos por tanto una función  $f$  tal que  $\nabla f = (P, Q)$ , es decir

$$\begin{aligned} f_x = 2xy + 1 &\implies f = x^2y + x + g(y) \\ f_y = x^2 + g'(y) = x^2 + y &\implies g'(y) = y \implies g(y) = \frac{y^2}{2}, \end{aligned}$$

salvo una constante. Por tanto las curvas integrales de la ecuación (1.36) verifican la ecuación implícita

$$2x^2y + 2x + y^2 = c, \quad (1.37)$$

donde  $c$  es una constante arbitraria. Despejando  $y$  obtenemos dos expresiones

$$y_{\pm} = -x^2 \pm \sqrt{x^4 - 2x + c} \quad (1.38)$$

para cada valor de  $c$  (ver Fig. 1.5), donde el signo  $\pm$  de la raíz corresponde a la elección del abierto  $U_{\pm}$ . Si  $c > \frac{3}{2\sqrt{2}}$  cada expresión  $y_{\pm}$  es una solución de la ecuación (1.36), definida en todo  $\mathbb{R}$ . En cambio, si  $c < \frac{3}{2\sqrt{2}}$  cada expresión  $y_{\pm}$  determina *dos* soluciones de dicha ecuación, definidas en sendos intervalos  $(-\infty, x_0)$  y  $(x_1, \infty)$ , donde  $x_0 < x_1$  son las dos raíces del polinomio  $x^4 - 2x + c$  que aparece en el radicando de (1.38). Por último, si  $c = \frac{3}{2\sqrt{2}}$ , cada expresión  $y_{\pm}$  también determina dos soluciones de (1.36), definidas en los intervalos  $(-\infty, \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$  y  $(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \infty)$  respectivamente.

Consideremos otra vez la ecuación (1.27) con  $P, Q$  de clase  $C^1(U)$ . Supongamos que  $P_y \neq Q_x$  en  $U$  y por tanto la ecuación *no* es exacta. Si  $\mu(x, y)$  es una función que no se anula en  $U$ , la ecuación

$$\mu(x, y)P(x, y) + \mu(x, y)Q(x, y)y' = 0 \quad (1.39)$$

<sup>1</sup>Recordemos que un abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$  es *conexo* si todo par de puntos de  $U$  pueden unirse mediante una curva continua enteramente contenida en  $U$ . El abierto  $U$  es *simplemente conexo* si es conexo y toda curva cerrada continua contenida en  $U$  puede deformarse de forma continua a un punto sin salirse de  $U$ . Intuitivamente, un abierto es simplemente conexo si “consta de un sólo trozo” y “no tiene agujeros”.

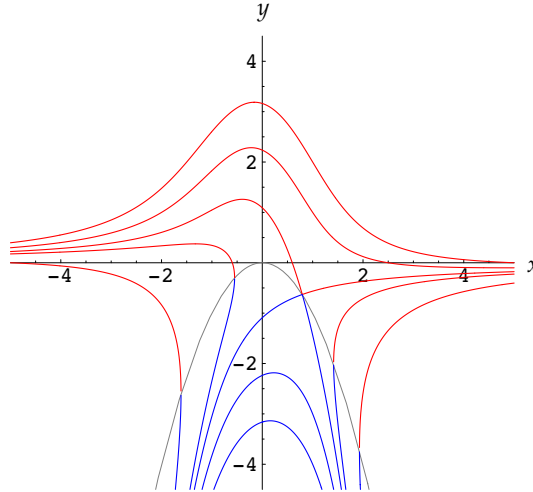


Figura 1.5: Curvas integrales (1.37) de la ecuación (1.36). La parábola  $y = -x^2$  (en gris) es una isoclina de pendiente  $\infty$ , que divide al plano en dos abiertos simplemente conexos  $U_{\pm}$  donde  $Q = x^2 + y$  no se anula y las soluciones son de la forma  $y_{\pm}$ , respectivamente.

es equivalente a la ecuación (1.27), ya que ambas tienen el mismo conjunto de soluciones. Se dice que la función  $\mu$  es un **factor integrante** de la ecuación (1.27) de partida si la ecuación (1.39) es exacta. En este caso podemos resolver (1.27) integrando (1.39) mediante el procedimiento discutido más arriba.

Si  $U$  es un abierto simplemente conexo, la condición necesaria y suficiente que debe cumplir  $\mu$  para que la ecuación (1.39) sea exacta es

$$(\mu P)_y = (\mu Q)_x.$$

Es decir, la función  $\mu$  debe ser solución de la ecuación en derivadas parciales de primer orden

$$\boxed{P(x, y) \mu_y - Q(x, y) \mu_x + [P_y(x, y) - Q_x(x, y)] \mu = 0}. \quad (1.40)$$

Aunque se demuestra que esta EDP siempre tiene solución, el problema es que la técnica habitual para resolverla requiere conocer precisamente la solución de la EDO (1.27) de partida. Sin embargo, podemos buscar soluciones *particulares* de (1.40) que dependan de un único argumento, tales como  $\mu(x)$ ,  $\mu(y)$ ,  $\mu(x + y)$ ,  $\mu(x^2 + y^2)$ , etc. En general estas funciones no serán solución de la EDP (1.40), a menos que  $P_y - Q_x$  sea de alguna forma sencilla. Por ejemplo, si

$$\boxed{\frac{P_y - Q_x}{Q} \equiv g(x)}, \quad (1.41)$$

entonces (1.40) admite un factor integrante del tipo  $\mu(x)$ . Efectivamente, si se cumple (1.41) y  $\mu_y = 0$ , la ecuación (1.40) se reduce a

$$\mu'(x) = g(x)\mu(x) \implies \boxed{\mu(x) = ce^{\int g(x) dx}}. \quad (1.42)$$

Análogamente, si

$$\boxed{\frac{P_y - Q_x}{P} \equiv h(y)}, \quad (1.43)$$

entonces (1.40) admite como solución el factor integrante dependiente sólo de  $y$

$$\boxed{\mu(y) = ce^{-\int h(y) dy}}, \quad (1.44)$$

*Ejercicio.* Probar que la ecuación (1.27) posee un factor integrante  $\mu(r)$  función de  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  si y sólo si

$$\boxed{\frac{P_y - Q_x}{yP - xQ} = g(r)},$$

y que en tal caso  $\mu$  puede calcularse por la fórmula

$$\boxed{\mu(r) = ce^{-\int rg(r) dr}}.$$

**Ejemplo 1.8.** La ecuación

$$y(1-x) - \operatorname{sen} y + (x + \cos y)y' = 0, \quad (1.45)$$

no es exacta, ya que  $P = y(1-x) - \operatorname{sen} y$ ,  $Q = x + \cos y$  no satisfacen la condición (1.30). Sin embargo, como

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = -1 \equiv g(x)$$

no depende de  $y$ , de la ecuación (1.42) se sigue que  $\mu(x) = e^{-x}$  es un factor integrante de la ecuación (1.45) en cualquiera de los abiertos simplemente conexos

$$U_{\pm} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + \cos y \gtrless 0\}.$$

Buscamos por tanto una función  $f$  tal que  $\nabla f = e^{-x}(P, Q)$ . En este caso resulta más sencillo comenzar integrando la ecuación  $f_y = e^{-x}Q$ , que proporciona

$$\begin{aligned} f_y = e^{-x}(x + \cos y) &\implies f = e^{-x}(xy + \operatorname{sen} y) + h(x) \\ f_x = e^{-x}(y - xy - \operatorname{sen} y) + h'(x) = e^{-x}(y(1-x) - \operatorname{sen} y) &\implies h'(x) = 0. \end{aligned}$$

Por tanto podemos elegir

$$f(x, y) = e^{-x}(xy + \operatorname{sen} y),$$

de modo que las curvas integrales de la ecuación (1.36) verifican la ecuación trascendente

$$e^{-x}(xy + \operatorname{sen} y) = c, \quad (1.46)$$

donde  $c$  es una constante arbitraria. En este caso no es posible despejar explícitamente  $y$  como función de  $x$  (aunque para  $c = 0$  podemos despejar  $x$  como función de  $y$ ). Sin embargo, el teorema de la función implícita garantiza que si  $f_y(x_0, y_0) = e^{-x_0}(x_0 + \cos y_0) \neq 0$ , es decir si  $(x_0, y_0) \in U_{\pm}$ , entonces la ecuación (1.46) define a  $y$  como función de  $x$  en un entorno de  $(x_0, y_0)$ .

## 1.2.5 Ecuaciones lineales

Son ecuaciones de la forma

$$\boxed{y' = a(x)y + b(x)}, \quad (1.47)$$

donde  $a$  y  $b$  son funciones continuas en un intervalo abierto  $U$ . La ecuación (1.47) se dice **homogénea** si  $b \equiv 0$ , e **inhomogénea** o **completa** en caso contrario. Veamos que la solución general de una ecuación lineal puede expresarse siempre mediante cuadraturas. En efecto, en el caso homogéneo

$$\boxed{y' = a(x)y} \quad (1.48)$$

admite la *solución trivial*  $y = 0$ , y si  $y \neq 0$  podemos tratarla como una ecuación de variables separadas:

$$\frac{y'}{y} = a(x) \implies \log |y| = \int a(x) dx + c_0 \implies |y| = e^{c_0} e^{\int a(x) dx}.$$

La solución general de (1.48) es por tanto

$$\boxed{y = ce^{\int a(x) dx}}, \quad (1.49)$$

donde  $c$  es una constante arbitraria (o bien  $c = \pm e^{c_0}$ , o bien  $c = 0$  para la solución trivial).

**Comentario.** El conjunto de soluciones (1.49) de la ecuación homogénea (1.48) es un espacio vectorial de dimensión uno.

La ecuación inhomogénea (1.47) se resuelve mediante el **método de variación de constantes**, debido a Lagrange. El método consiste en probar como solución una función de la forma

$$y = c(x)e^{A(x)}, \quad (1.50)$$

donde

$$A(x) = \int a(x) dx$$

es un primitiva cualquiera (pero fija) de la función  $a(x)$ . Es decir, se trata de probar como solución la solución general de la ecuación homogénea reemplazando la constante  $c$  por una función incógnita  $c(x)$ . Sustituyendo (1.50) en la ecuación (1.47) obtenemos

$$c'(x)e^{A(x)} + c(x)e^{A(x)}a(x) = a(x)c(x)e^{A(x)} + b(x),$$

de donde

$$c'(x) = b(x)e^{-A(x)} \implies c(x) = c + \int b(x)e^{-A(x)} dx,$$

donde  $c$  es una constante arbitraria. Por tanto, la solución general de la ecuación completa (1.47) es

$$\boxed{y = ce^{A(x)} + e^{A(x)} \int b(x)e^{-A(x)} dx}. \quad (1.51)$$

**Comentario.** La expresión (1.51) muestra que la solución general de la ecuación (1.47) es de la forma

$$y = y_h(x) + y_p(x),$$

donde  $y_h$  es la solución general de la ecuación homogénea y  $y_p$  es una solución particular de la ecuación completa.



**Comentario.** Consideremos ahora el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y' = a(x)y + b(x), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \quad (1.52)$$

donde  $x_0 \in U$ . Tomando como primitiva de  $a(x)$  la función  $A(x) = \int_{x_0}^x a(s) ds$ , de la expresión (1.51) se sigue inmediatamente que la única solución de (1.47) que verifica la condición inicial  $y(x_0) = y_0$  es

$$y = y_0 e^{\int_{x_0}^x a(s) ds} + e^{\int_{x_0}^x a(s) ds} \int_{x_0}^x b(s) e^{-\int_{x_0}^s a(t) dt} ds.$$

**Ejemplo 1.9.** Sea la ecuación lineal inhomogénea

$$y' = \frac{y}{x} + x^2, \quad (1.53)$$

definida si  $x \neq 0$ . La solución general de la ecuación homogénea es

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} \implies \log |y| = \log |x| + c_0 \implies y = cx,$$

donde  $c \in \mathbb{R}$  (el valor  $c = 0$  proviene de la solución trivial  $y \equiv 0$ ). Para la ecuación inhomogénea, probamos una solución particular de la forma  $y_p = c(x)x$ , que conduce a

$$y'_p = c'x + c = c + x^2 \implies c = \frac{x^2}{2} \implies y_p = \frac{x^3}{2}.$$

Por tanto, la solución general de la ecuación (1.53) es

$$y = cx + \frac{x^3}{2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Nótese que aunque la ecuación diferencial (1.53) no está definida si  $x = 0$ , las soluciones obtenidas son analíticas en toda la recta real.

### 1.2.6 Ecuación de Bernoulli

Es una ecuación de la forma

$$y' = a(x)y + b(x)y^r, \quad r \neq 0, 1, \quad (1.54)$$

siendo  $a, b$  continuas en un intervalo abierto  $U$ . La ecuación (1.54) no está definida para  $y < 0$  a menos que  $r = p/q$  sea un racional irreducible con  $q$  impar, ni para  $y = 0$  cuando  $r < 0$ . La ecuación de Bernoulli puede transformarse en una ecuación lineal (y por tanto resoluble por cuadraturas) mediante el cambio de variable

$$z = y^{1-r}.$$

En efecto, derivando  $z$  respecto de  $x$  y utilizando (1.54) obtenemos

$$z' = (1-r)y^{-r}y' = (1-r)a(x)y^{1-r} + (1-r)b(x) = (1-r)a(x)z + (1-r)b(x),$$

que es lineal en la nueva variable  $z$ .

**Ejemplo 1.10.** La ecuación

$$y' = \frac{y - y^2}{x}, \quad (1.55)$$

es una ecuación de Bernoulli con  $r = 2$ . Una posible solución es  $y \equiv 0$ . Si  $y \neq 0$ , el cambio de variable apropiado es  $z = 1/y$ , que conduce a

$$z' = -\frac{y'}{y^2} = -\frac{1}{xy} + \frac{1}{x} = -\frac{z}{x} + \frac{1}{x}, \quad (1.56)$$

que es lineal en  $z$ . La solución general de la ecuación homogénea es

$$z_h = \frac{c}{x}.$$

Para la ecuación completa, probamos una solución particular de la forma  $z_p = \frac{c(x)}{x}$ , que conduce a

$$\frac{c'}{x} = \frac{1}{x} \implies c = x \implies z_p = 1.$$

Luego la solución general de (1.56) es

$$z = z_h + z_p = \frac{x + c}{x},$$

y por tanto

$$y = \frac{x}{x + c}$$

es la solución general de (1.55). (La solución  $y \equiv 0$  se obtiene formalmente en el límite  $c \rightarrow \infty$ .)

*Ejercicio.* Resolver la ecuación (1.55) tratándola como ecuación de variables separadas.

### 1.2.7 Ecuación de Riccati

La ecuación de Riccati

$$\boxed{y' = a(x) + b(x)y + c(x)y^2}, \quad a, c \neq 0, \quad (1.57)$$

con  $a, b, c$  continuas en un intervalo abierto  $U$ , es de gran importancia en Física Matemática por su estrecha relación con las ecuaciones lineales de segundo orden (como la ecuación de Schrödinger). En general no es posible resolver una ecuación de Riccati por cuadraturas. Sin embargo, si se conoce una solución particular  $y_0(x)$  es posible reducirla a una ecuación lineal mediante el cambio de variable

$$\boxed{u = \frac{1}{y - y_0(x)}}.$$

Efectivamente,

$$\begin{aligned} u' &= -\frac{y' - y_0'(x)}{(y - y_0(x))^2} = -\frac{b(x)(y - y_0(x)) + c(x)(y^2 - y_0^2(x))}{(y - y_0(x))^2} = -b(x)u - c(x)\frac{y + y_0(x)}{y - y_0(x)} \\ &= -[b(x) + 2c(x)y_0(x)]u - c(x), \end{aligned}$$

que es una ecuación lineal en  $u$ .

**Ejemplo 1.11.** Consideramos la ecuación de Riccati

$$y' = y^2 - \frac{2}{x^2}. \quad (1.58)$$

Si probamos una solución particular de la forma  $y = \lambda/x$ , obtenemos

$$-\frac{\lambda}{x^2} = \frac{\lambda^2}{x^2} - \frac{2}{x^2} \implies \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \implies \lambda = -2, 1.$$

Tomamos como solución particular  $y_0 = 1/x$ . El cambio de variable

$$u = \frac{1}{y - 1/x} \quad (1.59)$$

conduce a la ecuación lineal

$$u' = -\frac{y' + 1/x^2}{(y - 1/x)^2} = -\frac{y^2 - 1/x^2}{(y - 1/x)^2} = -\frac{y + 1/x}{y - 1/x} = -\frac{2u}{x} - 1. \quad (1.60)$$

La solución general de la ecuación homogénea es

$$u_h = \frac{C}{x^2}.$$

Para determinar una solución particular de la ecuación inhomogénea (1.60) podemos utilizar el método de variación de constantes, o más directamente, probar una solución de la forma  $u_p = kx$ . Sustituyendo en (1.60) se obtiene

$$k = -2k - 1 \implies k = -\frac{1}{3}.$$

Por tanto

$$u = \frac{C}{x^2} - \frac{x}{3} = -\frac{x^3 + c}{3x^2}, \quad c = -3C,$$

es la solución general de (1.60). De (1.59) se sigue inmediatamente que

$$y = \frac{1}{x} - \frac{3x^2}{x^3 + c}.$$

es la solución general de (1.58).

**Comentario.** Como hemos mencionado más arriba, la ecuación de Riccati (1.57) está estrechamente relacionada con las ecuaciones lineales de segundo orden. Más concretamente, es posible convertir (1.57) en una ecuación lineal de segundo orden mediante el cambio de variable

$$y = -\frac{1}{c(x)} \frac{z'}{z}.$$

En efecto,

$$y' = -\frac{1}{c(x)} \frac{z''}{z} + \frac{c'(x)}{c(x)^2} \frac{z'}{z} + \frac{1}{c(x)} \frac{z'^2}{z^2} = a(x) - \frac{b(x)}{c(x)} \frac{z'}{z} + \frac{1}{c(x)} \frac{z'^2}{z^2},$$

y por tanto  $z$  verifica la ecuación

$$z'' - \left[ b(x) + \frac{c'(x)}{c(x)} \right] z' + a(x)c(x)z = 0.$$

En el próximo capítulo veremos que la solución general de esta ecuación es de la forma

$$z = k_1 z_1(x) + k_2 z_2(x),$$

donde  $k_1, k_2$  son constantes reales y  $z_1, z_2$  son dos soluciones linealmente independientes, que en general no podrán determinarse de forma explícita. La solución general de la ecuación de Riccati de partida (1.57) se expresa en términos de  $z_1$  y  $z_2$  como

$$y = -\frac{1}{c(x)} \frac{k_1 z_1'(x) + k_2 z_2'(x)}{k_1 z_1(x) + k_2 z_2(x)}.$$

(Nótese que esta solución depende de una sólo constante arbitraria, o bien  $k_2/k_1$ , o bien  $k_1/k_2$ .)

### 1.3 Teoremas de existencia y unicidad

En esta sección estudiaremos la *existencia y unicidad* de solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (1.61)$$

En distintos ejemplos de la sección anterior donde la función  $f$  era suficientemente regular hemos visto que este problema tiene solución única local. Nuestro objetivo es precisar qué condiciones deben satisfacer la función  $f$  y el dato inicial  $(x_0, y_0)$  para que el problema (1.61) posea solución única local. Supondremos que la variable dependiente  $y$  y la función  $f$  son vectoriales<sup>2</sup>, es decir, consideraremos el problema de valores iniciales para sistemas de ecuaciones de primer orden.

**Definición 1.12.** Un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en forma normal para una función incógnita  $y = (y_1, \dots, y_n)$  es una ecuación vectorial del tipo

$$y' = f(x, y), \quad (1.62)$$

donde  $f = (f_1, \dots, f_n)$  está definida en un abierto  $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$  y toma valores en  $\mathbb{R}^n$ . Dado  $(x_0, y_0) \in U$ , el **problema de valores iniciales** asociado al sistema (1.62) consiste en determinar una solución  $y(x)$  definida en un intervalo  $I$  que contenga a  $x_0$  tal que

$$y(x_0) = y_0. \quad (1.63)$$

**Comentario.** El sistema (1.62) es equivalente a las  $n$  ecuaciones escalares

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \dots, y_n), \\ \vdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \dots, y_n), \end{cases}$$

mientras que el dato inicial (1.63) corresponde a las  $n$  condiciones

$$y_1(x_0) = y_{01}, \dots, y_n(x_0) = y_{0n}.$$

<sup>2</sup>De aquí en adelante prescindiremos de la notación vectorial, e.g., escribiremos simplemente  $y$  en lugar de  $y$ .

**Comentario.** El problema de valores iniciales (1.62)–(1.63) incluye como caso particular el problema de valores iniciales asociado a una ecuación *escalar* de orden  $n$  en forma normal

$$\begin{cases} u^{(n)} = F(x, u, u', \dots, u^{(n-1)}), \\ u(x_0) = u_0, u'(x_0) = u_1, \dots, u^{(n-1)}(x_0) = u_{n-1}. \end{cases} \quad (1.64)$$

En efecto, si introducimos las  $n$  variables dependientes

$$y_1 = u, y_2 = u', \dots, y_n = u^{(n-1)},$$

el problema de valores iniciales (1.64) puede reescribirse como el sistema de ecuaciones de primer orden

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y_n, \\ y_n' = F(x, y_1, \dots, y_n), \end{cases}$$

con la condición inicial

$$y_1(x_0) = u_0, y_2(x_0) = u_1, \dots, y_n(x_0) = u_{n-1}.$$

(Más en general, un sistema de  $m$  ecuaciones diferenciales ordinarias de orden  $n$  puede convertirse en un sistema de  $mn$  ecuaciones de primer orden.)

La existencia **local** de soluciones del problema de valores iniciales (1.62)–(1.63) está garantizada si la función  $f$  es *continua* en su abierto de definición, de acuerdo con el siguiente teorema:

**Teorema de existencia de Peano.** Sea  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua en el abierto  $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , y sea  $(x_0, y_0) \in U$ . Entonces el problema (1.62)–(1.63) tiene (al menos) una solución  $y(x)$  definida en un intervalo de la forma  $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ , para  $\alpha > 0$  suficientemente pequeño.

*Nota.* El número  $\alpha$ , que es función de  $(x_0, y_0)$ , se puede estimar explícitamente, y depende esencialmente de lo grande que sea el valor de  $\|f(x, y)\|$  en  $U$ .

La continuidad de la función  $f$  en el abierto  $U$  no garantiza la unicidad (ni siquiera local) de soluciones del problema de valores iniciales (1.62)–(1.63) con datos iniciales en  $U$ , tal y como ilustra el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 1.13.** Sea el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y' = 3y^{2/3}, \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (1.65)$$

Como  $f(x, y) = 3y^{2/3}$  es continua en  $U = \mathbb{R}^2$ , el teorema de Peano garantiza que el problema (1.65) posee al menos una solución local cualquiera que sea el dato inicial  $(x_0, y_0)$ . Veamos que si  $y_0 = 0$  la solución no es única. En efecto,  $y \equiv 0$  es una solución del problema (1.65) cuando  $y_0 = 0$ . Por otro lado, como la ecuación  $y' = 3y^{2/3}$  es de variables separadas podemos integrarla inmediatamente, con el resultado

$$y = (x + c)^3, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (1.66)$$

En particular,  $y = (x - x_0)^3$  es otra solución de (1.65) con  $y_0 = 0$ , que difiere de  $y \equiv 0$  en cualquier intervalo abierto centrado en  $x_0$ .

### 1.3.1 Funciones lipschitzianas

En este apartado introduciremos la noción de función lipschitziana, que aparecerá en breve al enunciar un conjunto *suficiente* de condiciones sobre la función  $f$  para que el problema de valores iniciales (1.62)–(1.63) tenga solución única local.

**Definición 1.14.** Sea  $I$  un intervalo. Se dice que una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es **lipschitziana** en  $I$  si existe una constante  $L > 0$  (constante de Lipschitz) tal que

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|, \quad \forall x_1, x_2 \in I. \quad (1.67)$$

**Comentarios.**

- $f$  lipschitziana en  $I \implies f$  uniformemente continua en  $I \implies f$  continua en  $I$ .
- $f$  lipschitziana en  $I \not\Rightarrow f$  derivable en  $I$ . Por ejemplo,  $f(x) = |x|$  es lipschitziana en cualquier intervalo (con constante de Lipschitz  $L = 1$ ), ya que de la desigualdad triangular se sigue que

$$||x_1| - |x_2|| \leq |x_1 - x_2|.$$

- $f$  derivable en  $I \not\Rightarrow f$  lipschitziana en  $I$ . Por ejemplo, la función  $f(x) = 1/x$  es derivable en  $I = (0, 1)$ , pero no es lipschitziana en dicho intervalo, ya que si existiera una constante  $L > 0$  tal que

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| = \frac{|x_1 - x_2|}{x_1 x_2} \leq L|x_1 - x_2|, \quad \forall x_1, x_2 \in (0, 1),$$

entonces debería cumplirse  $L \geq \frac{1}{x_1 x_2}$  para todo  $x_1 \neq x_2 \in (0, 1)$ , claramente falso.

**Proposición 1.15.** Si  $f$  es derivable en un intervalo  $I$  y  $f'$  está acotada en  $I$ , entonces  $f$  es lipschitziana en  $I$ .

*Demostración.* Basta ver que se cumple (1.67) para cualquier par de puntos  $x_1 < x_2$  de  $I$ . Como  $f$  es derivable en  $[x_1, x_2] \subset I$ , por el teorema del valor medio existe  $\xi \in (x_1, x_2)$  tal que

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\xi)| |x_1 - x_2| \leq L|x_1 - x_2|,$$

donde  $L$  es una cota de  $|f'|$  en  $I$ . □

**Corolario 1.16.** Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $C^1$  en un intervalo compacto  $I$ , entonces es lipschitziana en  $I$ .

*Demostración.* Como  $f'$  es continua en el intervalo compacto  $I$ , está acotada en dicho intervalo. Luego  $f$  es lipschitziana en  $I$  por la proposición anterior. □

Veamos ahora la generalización de la Definición 1.14 para funciones  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**Definición 1.17.** Sea  $f : I \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , siendo  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo y  $D \subset \mathbb{R}^n$  (no necesariamente abierto). Diremos que  $f$  es **lipschitziana en la segunda variable** (o *en el segundo argumento*) en  $I \times D$  si existe  $L > 0$  (constante de Lipschitz) tal que

$$\|f(x, y^1) - f(x, y^2)\| \leq L\|y^1 - y^2\|, \quad \forall x \in I, \quad \forall y^1, y^2 \in D. \quad (1.68)$$

*Nota.* En la fórmula anterior,  $\|\cdot\|$  denota la norma euclidiana en  $\mathbb{R}^n$ , es decir

$$v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n \implies \|v\| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}.$$

Nótese también que en la Definición 1.17 la variable  $x$  juega el papel de un parámetro.

Veamos a continuación la generalización de la Proposición 1.15 al caso vectorial:

**Proposición 1.18.** Sea  $f : I \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , siendo  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo y  $D \subset \mathbb{R}^n$  un abierto convexo<sup>3</sup>. Si todas las derivadas parciales  $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$  respecto de las  $n$  últimas variables son continuas y están acotadas en  $I \times D$ , entonces  $f$  es lipschitziana en el segundo argumento en  $I \times D$ .

*Demostración.* Sean  $(x, y^1), (x, y^2) \in I \times D$ . Aplicando el teorema del valor medio a cada componente  $f_i$  de  $f$  obtenemos

$$f_i(x, y^1) - f_i(x, y^2) = \nabla f_i(x, \eta_i) \cdot (y^1 - y^2), \quad (1.69)$$

para algún punto  $\eta_i$  del segmento que une  $y^1$  con  $y^2$  (contenido en  $D$  al ser dicho conjunto convexo), donde el gradiente está tomado respecto de las variables  $(y_1, \dots, y_n)$ . Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz al miembro derecho de (1.69), obtenemos

$$|f_i(x, y^1) - f_i(x, y^2)| \leq \|\nabla f_i(x, \eta_i)\| \|y^1 - y^2\| \leq \sqrt{n}M \cdot \|y^1 - y^2\|,$$

siendo  $M$  una cota superior de los valores absolutos de las derivadas parciales  $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$  en  $I \times D$ . De esta desigualdad se sigue que

$$\|f(x, y^1) - f(x, y^2)\| \leq nM \cdot \|y^1 - y^2\|.$$

Por tanto,  $f$  es lipschitziana en el segundo argumento en  $I \times D$ , y se puede tomar  $L = nM$ .  $\square$

**Definición 1.19.** Se dice que  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  es **localmente lipschitziana** en el segundo argumento en el abierto  $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$  si para todo  $(x_0, y_0) \in U$  existe un cilindro abierto  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times B_r(y_0) \subset U$  dentro del cual  $f$  es lipschitziana en el segundo argumento.

*Notación.* En la última definición  $B_r(y_0)$  denota la bola abierta de radio  $r$  centrada en  $y_0$ , es decir,

$$B_r(y_0) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - y_0\| < r\}.$$

**Proposición 1.20.** Sea  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , donde  $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$  es un abierto. Si todas las derivadas parciales  $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$  respecto a la segunda variable  $y \equiv (y_1, \dots, y_n)$  son continuas en  $U$ , entonces  $f$  es localmente lipschitziana respecto a la variable  $y$  en  $U$ .

*Demostración.* Como las derivadas parciales  $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$  son continuas en cualquier cilindro compacto

$$C = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times \bar{B}_r(y_0)$$

contenido en  $U$ , están acotadas en  $C$  y por tanto también en  $\overset{\circ}{C} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times B_r(y_0)$ . De la Proposición 1.18 se sigue que  $f$  es lipschitziana respecto a la segunda variable en  $\overset{\circ}{C}$ .  $\square$

<sup>3</sup>Recuérdese que un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  es *convexo* si el segmento que une cualquier par de puntos de  $A$  está enteramente contenido en  $A$

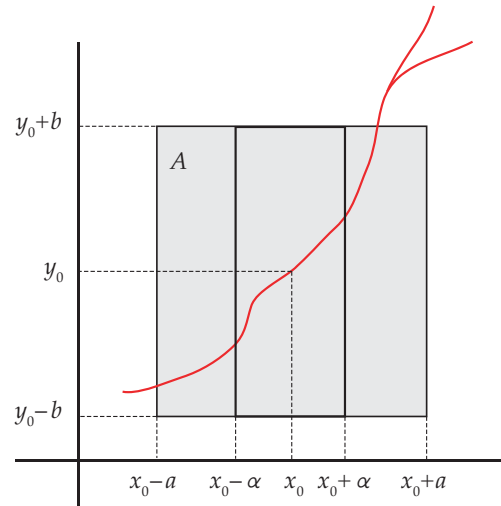


Figura 1.6: Si la función  $f(x, y)$  satisface las hipótesis del teorema de Picard–Lindelöf en el rectángulo sombreado  $A$ , el problema de valores iniciales (1.62)–(1.63) tiene solución única definida en el intervalo  $I \equiv [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ . No está garantizado que la solución esté definida o sea única en todo el intervalo  $[x_0 - a, x_0 + a]$ .

Enunciaremos ahora el resultado principal de esta sección:

**Teorema de Picard–Lindelöf.** Sea  $f : A \equiv [x_0 - a, x_0 + a] \times \bar{B}_b(y_0) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  (siendo  $a, b > 0$ ) continua y lipschitziana con respecto a la segunda variable en el conjunto  $A$ . Entonces el problema de valores iniciales (1.62)–(1.63) tiene una solución única  $y(x)$  definida en el intervalo  $I \equiv [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ , siendo

$$\alpha = \min(a, b/M), \quad M = \max \{ \|f(x, y)\| : (x, y) \in A \}.$$

**Comentario.** La existencia de  $M$  está garantizada, al ser  $f$  continua en el compacto  $A$ .

*Demostración.* Por sencillez, presentaremos la demostración en el caso  $n = 1$ , correspondiente a una ecuación escalar (ver Fig. 1.6). En este caso el conjunto  $A$  es un rectángulo cerrado

$$A = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b],$$

y  $\|f(x, y)\| = |f(x, y)|$ . El primer paso de la demostración consiste en formular el problema de valores iniciales (1.62)–(1.63) como una *ecuación integral*. Más precisamente, si integramos la ecuación diferencial (1.62) entre  $x_0$  y un cierto  $x \in I$  y tenemos en cuenta que  $y(x_0) = y_0$ , obtenemos

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) \, ds. \quad (1.70)$$

Por tanto cualquier solución del problema de valores iniciales satisface la ecuación integral (1.70). Recíprocamente, toda solución *continua*  $y : I \rightarrow [y_0 - b, y_0 + b]$  de la ecuación integral es solución del problema de valores iniciales. Efectivamente, dicha solución verifica la condición inicial  $y(x_0) = y_0$ , y como  $f(s, y(s))$  es continua en  $s$  para todo  $s \in I$ , del teorema fundamental del cálculo se sigue que  $y$  es derivable en  $x$ , siendo  $y'(x) = f(x, y(x))$ .



La idea del resto de la demostración es construir una sucesión de funciones  $y_k$  (llamadas *aproximantes de Picard*) que convergen uniformemente en  $I$  a una función continua  $y$ , que es la única solución de la ecuación integral (1.70) en dicho intervalo.

i) *Construcción de los aproximantes de Picard.* El primer aproximante es la función constante  $y_0(x) = y_0$ , definida en  $I$ . A continuación definimos  $y_1 : I \rightarrow [y_0 - b, y_0 + b]$  como

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_0) ds, \quad \forall x \in I.$$

Como  $f$  es continua en  $A$ , la función  $y_1$  está bien definida y es diferenciable (por el teorema fundamental del cálculo). Además,  $\text{im } y_1 \subset [y_0 - b, y_0 + b]$  ya que

$$|y_1(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(s, y_0) ds \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(s, y_0)| ds \right| \leq M|x - x_0| \leq M\alpha \leq b, \quad (1.71)$$

para todo  $x \in I$ . Procediendo de forma recursiva, supongamos definidas las funciones diferenciables  $y_0, \dots, y_{k-1} : I \rightarrow [y_0 - b, y_0 + b]$ . Entonces definimos

$$\boxed{y_k(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_{k-1}(s)) ds}, \quad \forall x \in I. \quad (1.72)$$

Como  $\text{im } y_{k-1} \subset [y_0 - b, y_0 + b]$ , se sigue que  $f(s, y_{k-1}(s))$  es continua para todo  $s \in I$ . Luego  $y_k$  está bien definida y es diferenciable en  $I$  (esto último por el teorema fundamental del cálculo). Además,  $\text{im } y_k \subset [y_0 - b, y_0 + b]$  ya que

$$|y_k(x) - y_0| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(s, y_{k-1}(s))| ds \right| \leq M|x - x_0| \leq M\alpha \leq b, \quad (1.73)$$

para todo  $x \in I$ .

ii) *Convergencia uniforme en  $I$  de los aproximantes de Picard.* Comenzaremos probando por inducción la desigualdad

$$|y_k(x) - y_{k-1}(x)| \leq \frac{ML^{k-1}|x - x_0|^k}{k!}, \quad \forall x \in I, \forall k \in \mathbb{N}, \quad (1.74)$$

donde  $L > 0$  es una constante de Lipschitz de  $f$  en  $A$ . En primer lugar, la desigualdad es válida si  $k = 1$  (cf. (1.71)). Supongamos que (1.74) se cumple para un cierto  $k \in \mathbb{N}$ . La lipshitzianidad de  $f$  implica entonces que también se cumple para  $k + 1$ :

$$\begin{aligned} |y_{k+1}(x) - y_k(x)| &= \left| \int_{x_0}^x [f(s, y_k(s)) - f(s, y_{k-1}(s))] ds \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x |f(s, y_k(s)) - f(s, y_{k-1}(s))| ds \right| \\ &\leq L \left| \int_{x_0}^x |y_k(s) - y_{k-1}(s)| ds \right| \leq L \cdot \frac{ML^{k-1}}{k!} \left| \int_{x_0}^x |s - x_0|^k ds \right| \\ &= \frac{ML^k}{k!} \left| \int_{x_0}^x (s - x_0)^k ds \right| = \frac{ML^k}{k!} \cdot \frac{|x - x_0|^{k+1}}{(k+1)} = \frac{ML^k |x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!}. \end{aligned} \quad (1.75)$$

Veamos a continuación que la sucesión de funciones  $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$  converge uniformemente en  $I$  a una función  $y$ . Como

$$y_m = y_0 + \sum_{k=1}^m (y_k - y_{k-1}),$$

la convergencia uniforme en  $I$  de la sucesión  $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$  es equivalente a la de la serie telescópica

$$\sum_{k=1}^{\infty} (y_k - y_{k-1}). \quad (1.76)$$

Utilizando la desigualdad (1.74) se tiene

$$x \in I \implies |y_k(x) - y_{k-1}(x)| \leq \frac{ML^{k-1}\alpha^k}{k!} = \frac{M}{L} \frac{(\alpha L)^k}{k!}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Como la serie numérica

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha L)^k}{k!} = e^{\alpha L} - 1$$

es convergente, del criterio  $M$  de Weierstrass se sigue que la serie telescópica (1.76), y por tanto la sucesión  $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ , converge uniformemente en  $I$  a una función  $y$ . Al ser cada una de las funciones  $y_k$  continua en  $I$ , la función límite

$$y(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k(x) \quad (1.77)$$

también es continua en  $I$ .

iii) *Probar que la función límite (1.77) verifica la ecuación integral (1.70).* Comprobaremos ahora que la función límite (1.77) es solución de la ecuación integral (1.70). Nótese en primer lugar que al tomar el límite  $k \rightarrow \infty$  en la desigualdad (1.73) obtenemos inmediatamente

$$|y(x) - y_0| \leq b, \quad \forall x \in I. \quad (1.78)$$

Esto implica que la sucesión de funciones

$$g_k(s) \equiv f(s, y_k(s)), \quad \forall s \in I,$$

converge *uniformemente* en  $I$  a la función  $g(s) = f(s, y(s))$ . En efecto, teniendo en cuenta que  $f$  es lipschitziana respecto al segundo argumento en  $A$  junto con las desigualdades (1.73) y (1.78), obtenemos

$$|g(s) - g_k(s)| = |f(s, y(s)) - f(s, y_k(s))| \leq L |y(s) - y_k(s)|, \quad s \in I.$$

Como cada función  $g_k$  es integrable en  $I$  (al ser continua en dicho intervalo) y la sucesión  $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$  converge uniformemente a  $g$ , se cumple

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x g_k(s) ds = \int_{x_0}^x g(s) ds, \quad x \in I. \quad (1.79)$$

Tomando límite  $k \rightarrow \infty$  en la ecuación (1.72) y utilizando (1.79) concluimos que  $y$  es solución de la ecuación integral (1.70). Al ser  $y$  continua en  $I$ , esto implica que  $y$  es solución del problema de valores iniciales (1.62)–(1.63).

iv) *Unicidad de la solución.* Supongamos que  $z : I \rightarrow [y_0 - b, y_0 + b]$  es solución del problema de valores iniciales (1.62)–(1.63). Probemos por inducción la desigualdad

$$|z(x) - y_k(x)| \leq \frac{ML^k |x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!}, \quad \forall x \in I, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.80)$$

En primer lugar, la desigualdad es válida para  $k = 0$ , ya que al ser  $z$  solución de la ecuación integral (1.70) se tiene

$$|z(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(s, z(s)) \, ds \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(s, z(s))| \, ds \right| \leq M|x - x_0|, \quad \forall x \in I. \quad (1.81)$$

Veamos que si se cumple (1.80) para  $k - 1 \geq 0$ , entonces también lo hace para  $k$ . En efecto, procediendo como en la cadena de desigualdades (1.75) obtenemos

$$\begin{aligned} |z(x) - y_k(x)| &= \left| \int_{x_0}^x [f(s, z(s)) - f(s, y_{k-1}(s))] \, ds \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x |f(s, z(s)) - f(s, y_{k-1}(s))| \, ds \right| \\ &\leq L \left| \int_{x_0}^x |z(s) - y_{k-1}(s)| \, ds \right| \\ &\leq L \cdot \frac{ML^{k-1}}{k!} \left| \int_{x_0}^x |s - x_0|^k \, ds \right| = \frac{ML^k |x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!}. \end{aligned} \quad (1.82)$$

Por último, tomando el límite cuando  $k \rightarrow \infty$  en la desigualdad (1.80) y teniendo en cuenta que  $\lim_{m \rightarrow \infty} t^m/m! = 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , obtenemos

$$|z(x) - y(x)| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M}{L} \frac{(L|x - x_0|)^{k+1}}{(k+1)!} = 0, \quad \forall x \in I.$$

Luego  $z = y$  en el intervalo  $I$ . □

**Comentario.** De la última parte (apartado iv)) de la demostración del teorema de Picard–Lindelöf, se deduce también que la *única* solución del problema de valores iniciales (1.62)–(1.63) en *cualquier* subintervalo de  $I$  es precisamente la función límite  $y(x)$  de los aproximantes de Picard.

**Comentario.** La expresión (1.80) proporciona una estimación del error cometido al aproximar la solución  $y(x)$  por su  $k$ -ésimo aproximante:

$$\|y(x) - y_k(x)\| \leq \frac{ML^k |x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!}, \quad \forall x \in I, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.83)$$

Fijado  $x \in I$ , el error cometido tiende a cero cuando  $k \rightarrow \infty$ . En cambio, si fijamos  $k$  el error cometido es pequeño sólo si  $|x - x_0|$  es suficientemente pequeño. En la práctica, los aproximantes de Picard no suelen utilizarse para calcular aproximadamente la solución del problema de valores iniciales (1.62)–(1.63), ya que para determinar el  $k$ -ésimo aproximante es necesario calcular  $k$  integrales definidas.

**Comentario.** Ni la continuidad ni la lispchitzianidad son condiciones *necesarias* para que el problema de valores iniciales (1.62)–(1.63) tenga solución única. Por ejemplo, la función

$$f(x, y) = \begin{cases} -\frac{2y}{x} + 4x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

es discontinua en el eje vertical  $x = 0$ . Como la ecuación  $y' = f(x, y)$  es lineal, se resuelve fácilmente con el resultado

$$y = \frac{c}{x^2} + x^2.$$

Por tanto, la ecuación diferencial  $y' = f(x, y)$  con la condición inicial  $y(0) = 0$  tiene la solución única  $y = x^2$ , correspondiente a  $c = 0$ . En cambio, si la condición inicial es  $y(0) = y_0 \neq 0$ , el problema de valores iniciales no tiene solución, ya que la única solución de la ecuación diferencial definida para  $x = 0$  es  $y = x^2$ .

Como consecuencia inmediata del teorema de Picard–Lindelöf se tienen los siguientes teoremas de existencia y unicidad:

**Proposición 1.21.** *Si la función  $f : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  y sus derivadas parciales  $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ) son continuas en el abierto  $U$ , entonces para todo  $(x_0, y_0) \in U$  el problema de valores iniciales (1.62)–(1.63) tiene solución única en un intervalo de la forma  $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ , con  $\alpha > 0$  (dependiente de  $(x_0, y_0)$ ) suficientemente pequeño.*

*Demostración.* Por la Proposición 1.20, la función  $f$  es localmente lipschitziana con respecto a la segunda variable en  $U$ , es decir, existe un cilindro abierto  $C = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times B_r(y_0) \subset U$  donde  $f$  es lipschitziana con respecto al segundo argumento. Luego basta aplicar el teorema de Picard–Lindelöf en cualquier cilindro compacto  $A = [x_0 - a, x_0 + a] \times \bar{B}_b(y_0) \subset C$ .  $\square$

**Corolario 1.22.** *Si  $f : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es de clase  $C^1$  en el abierto  $U$ , el problema de valores iniciales (1.62)–(1.63) tiene solución única local para todo dato inicial  $(x_0, y_0) \in U$ .*

**Comentario.** Si se cumplen las hipótesis de la Proposición 1.21 o del Corolario 1.22, entonces ninguna solución puede cortar a otra solución dentro de  $U$ .

En ocasiones utilizaremos la siguiente versión “global” del teorema de Picard–Lindelöf:

**Proposición 1.23.** *Si la función  $f : A \equiv I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  (siendo  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo) es continua y lipschitziana respecto a la segunda variable en  $A$ , entonces para todo  $x_0 \in I$  el problema de valores iniciales (1.62)–(1.63) tiene solución única en todo el intervalo  $I$ .*

*Idea de la demostración.* Repasando la demostración del teorema de Picard–Lindelöf se observa que la restricción  $\alpha \leq b/M$  sólo es necesaria para asegurar que  $y_k(x) \in \bar{B}_b(y_0)$ . Al reemplazar  $\bar{B}_b(y_0)$  por  $\mathbb{R}^n$ , esta condición deja de ser necesaria. Utilizando esta observación es inmediato probar la proposición si el intervalo  $I$  es compacto. Si  $I$  no es compacto, la proposición se demuestra teniendo en cuenta que es válida para cualquier intervalo compacto  $J \subset I$ .  $\square$

**Ejemplo 1.24.** La Proposición 1.23 no es aplicable al problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y' = 2xy^2, \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (1.84)$$

ya que  $f(x, y) = 2xy^2$  no es lipschitziana en la segunda variable en ningún conjunto de la forma  $A = I \times \mathbb{R}$ , siendo  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo. En efecto, si existiera  $L > 0$  tal que

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = 2|x||y_1^2 - y_2^2| = 2|x||y_1 + y_2||y_1 - y_2| \leq L|y_1 - y_2|, \quad \forall x \in I, \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R},$$

se tendría el resultado absurdo  $L \geq 2|x||y_1 + y_2|$  para todo  $x \in I, y_1 \neq y_2 \in \mathbb{R}$ . Por tanto no está garantizado que el problema de valores iniciales (1.84) tenga solución única definida en todos los puntos de un intervalo  $I$  que contenga a  $x_0$ . Sin embargo, al ser  $f$  de clase  $C^1$  en todo el plano, el Corolario 1.22 garantiza que el problema (1.84) posee solución única local para cualquier dato inicial  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ . Por ejemplo, la solución que verifica  $y(0) = 1$  (la ecuación se integra inmediatamente al ser de variables separadas),

$$y(x) = \frac{1}{1 - x^2},$$

sólo está definida en el intervalo  $(-1, 1)$ . En cambio, la solución que cumple  $y(0) = -1$ , es decir

$$y(x) = -\frac{1}{1+x^2},$$

está definida en toda la recta real.

### 1.3.2 Ecuaciones autónomas de primer orden

En este apartado veremos algunas propiedades generales de las ecuaciones **autónomas** de primer orden

$$y' = f(y), \quad (1.85)$$

donde supondremos que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tiene derivada continua en toda la recta real. La Proposición 1.21 implica entonces que el problema de valores iniciales asociado a la ecuación (1.85) tiene solución única local para cualquier dato inicial  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  (es decir, por cada punto del plano pasa una única solución). Como la ecuación (1.85) es de variables separadas su solución es inmediata:

$$\int \frac{dy}{f(y)} = x + c, \quad (1.86)$$

donde se supone que  $f(y)$  no se anula en el intervalo de integración. Veamos a continuación algunas propiedades generales de las soluciones de la ecuación autónoma (1.85):

**Proposición 1.25.** Sea la ecuación  $y' = f(y)$ , siendo  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1(\mathbb{R})$ .

- i) Si  $y(x)$  es solución y  $a \in \mathbb{R}$ , entonces  $y(x+a)$  también es solución.
- ii) Si  $a \in \mathbb{R}$  satisface  $f(a) = 0$ , entonces la función constante  $y(x) = a$  es solución.
- iii) Las isoclinas son rectas horizontales.
- iv) Toda solución es constante o estrictamente monótona.
- v) Toda solución acotada para  $x \geq x_0$  (resp.  $x \leq x_0$ ) tiende a una solución constante cuando  $x \rightarrow \infty$  (resp.  $x \rightarrow -\infty$ ).

*Demostración.*

- i) Si  $z(x) = y(x+a)$ , entonces  $z'(x) = y'(x+a) = f(y(x+a)) = f(z(x))$ .
- ii) Evidente.
- iii) Evidente.
- iv) Si  $y(x)$  es solución e  $y'(x_0) = 0$  para algún  $x_0 \in \mathbb{R}$ , entonces  $f(y(x_0)) = 0$ . De la unicidad de la solución se sigue que  $y(x) = y(x_0)$  es una solución constante. Por tanto, si una solución no es constante su derivada no se anula, ni puede cambiar de signo al ser  $y'(x) = f(y(x))$  una función continua.
- v) Probemos la afirmación en el caso  $x \rightarrow \infty$ . Sea  $y(x)$  una solución acotada para todo  $x \geq x_0$ . Si  $y$  es constante la afirmación es trivial. En caso contrario  $y(x)$  es estrictamente monótona, y al ser acotada existe  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) \equiv a$ . Como  $f$  es continua, se tiene

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(y(x)) = f(a) = \lim_{x \rightarrow \infty} y'(x).$$

Si fuera  $f(a) > 0$ , entonces por definición de límite existe  $x_1 \geq x_0$  tal que

$$y'(x) > \frac{f(a)}{2}, \quad \forall x > x_1.$$

Integrando esta relación entre  $x_1$  y  $x$ , obtenemos

$$y(x) > y(x_1) + \frac{f(a)}{2}(x - x_1), \quad \forall x > x_1.$$

Luego  $y(x)$  no estaría acotada para todo  $x \geq x_0$ , en contra de la hipótesis. Análogamente se demuestra que no puede ser  $f(a) < 0$ . Luego  $f(a) = 0$ , y por tanto  $y(x)$  tiende a la solución constante  $z(x) = a$  cuando  $x \rightarrow \infty$ . La demostración para el caso  $x \rightarrow -\infty$  es similar.  $\square$

**Ejemplo 1.26.** Consideramos el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y' = y(y - 1), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (1.87)$$

Las soluciones constantes de la ecuación autónoma son los ceros de la función  $f(y) \equiv y(y - 1)$ , es decir  $y = 0$  e  $y = 1$ . Si  $y_0 < 0$  ó  $y_0 > 1$ , las correspondientes soluciones son monótonas crecientes, ya que en ambos casos se tiene  $y'(x_0) = f(y(x_0)) = f(y_0) > 0$  y la derivada no puede cambiar de signo. En cambio, si  $0 < y_0 < 1$  las correspondientes soluciones son monótonas decrecientes (ver Fig. 1.7).

Las soluciones con  $y_0 > 1$  no están acotadas superiormente a la derecha de  $x_0$ , puesto que en caso contrario deberían tender a una solución constante  $y = a$  con  $a > y_0 > 1$ . En cambio estas soluciones están acotadas por  $y_0$  a la izquierda de  $x_0$ , y por tanto tienden a la solución constante  $y = 1$  cuando  $x \rightarrow -\infty$ . Análogamente, las soluciones con  $y_0 < 0$  no están acotadas a la izquierda de  $x_0$ , mientras que tienden a la solución constante  $y = 0$  cuando  $x \rightarrow \infty$ . Por último, las soluciones con  $y_0 \in (0, 1)$  tienden a la solución constante  $y = 0$  (resp.  $y = 1$ ) cuando  $x \rightarrow \infty$  (resp.  $x \rightarrow -\infty$ ). Además, como  $y'' = (2y - 1)y'$  estas últimas soluciones tienen un punto de inflexión cuando cortan a la recta  $y = 1/2$  (ver Fig. 1.7).

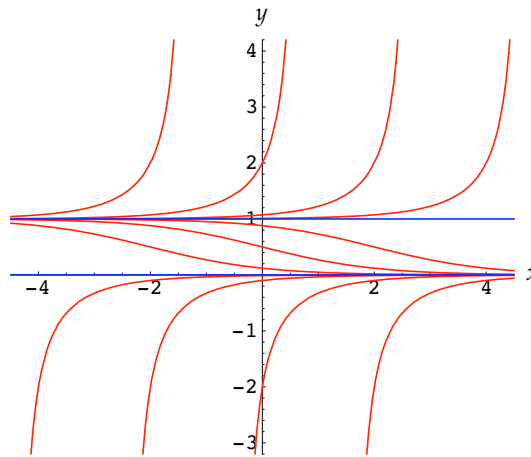


Figura 1.7: Soluciones (1.88) de la ecuación autónoma (1.87) para distintos datos iniciales (en rojo). En azul se representan las soluciones constantes  $y = 0$  e  $y = 1$ .

La solución del problema de valores iniciales (1.87) se calcula fácilmente utilizando (1.86), con el resultado

$$y(x) = \frac{y_0}{y_0 + (1 - y_0)e^{x-x_0}}. \quad (1.88)$$

Si  $y_0 > 1$ , entonces  $-y_0 < 1 - y_0 < 0$  y por tanto la solución (1.88) explota para un cierto  $x_1 > x_0$ . Si  $0 < y_0 < 1$ , el denominador del miembro derecho de (1.88) es claramente positivo y la solución (1.88) está definida en toda la recta real (como ya sabíamos). Por último, si  $y_0 < 0$  entonces  $1 - y_0 > |y_0|$  y por tanto (1.88) explota para algún  $x_1 < x_0$ .

%





## Capítulo 2

# Sistemas y ecuaciones lineales

### 2.1 Espacio de soluciones

**Definición 2.1.** Un **sistema lineal de primer orden** es un sistema de  $n$  ecuaciones de la forma

$$\boxed{y' = A(x)y + b(x)}, \quad (2.1)$$

donde  $A : \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  es una función matricial y  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función vectorial, es decir,

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}, \quad b(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

El sistema (2.1) se dice **homogéneo** si  $b \equiv 0$ , e **inhomogéneo** en caso contrario.

**Comentario.** El conjunto  $M_n(\mathbb{R})$  es un espacio vectorial de dimensión  $n^2$ . La base canónica de dicho espacio es la formada por las matrices  $E_{ij}$  cuyo único elemento de matriz no nulo es un 1 en la fila  $i$  y la columna  $j$ . Las coordenadas de una matriz  $A$  en esta base son sus elementos de matriz  $a_{ij}$ . En el espacio vectorial  $M_n(\mathbb{R})$  se define la **norma del supremo**

$$\|A\|_s = \max \{ \|Av\| : \|v\| = 1 \}, \quad A \in M_n(\mathbb{R}); \quad (2.3)$$

nótese que este máximo existe, ya que la función  $v \mapsto Av$  es continua (por ser lineal) y la esfera  $\{v \in \mathbb{R}^n : \|v\| = 1\}$  es compacta. Es fácil ver que  $\|\cdot\|_s$  es efectivamente una norma en  $M_n(\mathbb{R})$ . De la definición (2.3) se sigue inmediatamente que

$$\|Aw\| \leq \|A\|_s \|w\|, \quad \forall w \in \mathbb{R}^n.$$

La norma del supremo de una matriz  $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$  verifica las desigualdades

$$\max \{ |a_{ij}| : 1 \leq i, j \leq n \} \leq \|A\|_s \leq \left( \sum_{i,j} a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq n \max \{ |a_{ij}| : 1 \leq i, j \leq n \}. \quad (2.4)$$

En efecto, si  $e_j$  es el  $j$ -ésimo vector de la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ , al ser  $\|e_j\| = 1$  se tiene

$$a_{ij}^2 \leq \sum_{i=1}^n a_{ij}^2 = \|Ae_j\|^2 \leq \|A\|_s^2,$$

de donde se sigue inmediatamente la primera desigualdad (2.4). En cuanto a las restantes desigualdades, si  $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$  entonces

$$(Av)_i = \sum_j a_{ij}v_j = (a_{i1}, \dots, a_{in}) \cdot (v_1, \dots, v_n).$$

Si  $\|v\| = 1$ , utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se obtiene

$$\|Av\|^2 = \sum_i (Av)_i^2 \leq \sum_i \|(a_{i1}, \dots, a_{in})\|^2 = \sum_{i,j} a_{ij}^2 \leq n^2 \max \{a_{ij}^2 : 1 \leq i, j \leq n\},$$

y por tanto

$$\|Av\| \leq \left( \sum_{i,j} a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq n \max \{|a_{ij}| : 1 \leq i, j \leq n\}.$$

La segunda y tercera desigualdades (2.4) se siguen de esta expresión tomando el máximo sobre todos los vectores  $v$  de norma unidad.

**Comentario.** Como es sabido, una función vectorial  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continua en  $x \in \mathbb{R}$  si y sólo si lo son cada una de sus componentes  $b_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Análogamente, una función matricial  $A : \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  es continua en  $x \in \mathbb{R}$  si y sólo si sus  $n^2$  elementos de matriz  $a_{ij} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones continuas en  $x$  (este resultado también puede probarse directamente utilizando las desigualdades (2.4)).

La Proposición 1.23 conduce inmediatamente al siguiente teorema de existencia y unicidad global para el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y' = A(x)y + b(x), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (2.5)$$

asociado al sistema lineal (2.1):

**Teorema 2.2.** Si  $A : I \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  y  $b : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  son continuas en el intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ , entonces el problema de valores iniciales (2.5) tiene solución única definida en todo el intervalo  $I$  para cualquier dato inicial  $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ .

*Demostración.* Supongamos en primer lugar que el intervalo  $I$  es compacto. En vista de la Proposición 1.23, basta probar que la función lineal  $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $f(x, y) = A(x)y + b(x)$  es continua y lipschitziana con respecto al segundo argumento en  $I \times \mathbb{R}^n$ .

En cuanto a la continuidad de  $f$ , dado  $(x_1, y^1) \in I \times \mathbb{R}^n$  se tiene

$$f(x, y) - f(x_1, y^1) = (A(x) - A(x_1))y + A(x_1)(y - y^1) + b(x) - b(x_1) \rightarrow 0$$

cuando  $(x, y) \rightarrow (x_1, y^1)$  al ser tanto  $A$  como  $b$  continuas en  $I$ .

En cuanto a la lipschitzianidad de  $f$  respecto a la variable  $y$ , dados  $(x, y^1), (x, y^2) \in I \times \mathbb{R}^n$ , entonces

$$\|f(x, y^1) - f(x, y^2)\| = \|A(x)(y^1 - y^2)\| \leq \|A(x)\|_s \|y^1 - y^2\| \leq nM \|y^1 - y^2\|$$

donde

$$M = \max \{|a_{ij}(x)| : 1 \leq i, j \leq n, x \in I\}$$

y hemos tenido en cuenta la última desigualdad (2.4). Nótese que la existencia de  $M$  está garantizada al ser las  $n^2$  funciones  $a_{ij}$  continuas en el intervalo compacto  $I$ . Esto demuestra el teorema si el intervalo  $I$  es compacto.

Supongamos ahora que el intervalo  $I$  no es compacto. Veamos que aún así el problema de valores iniciales (2.5) posee una solución única  $y$  definida en todo el intervalo  $I$ . En efecto,

dado  $x \in I$  (con  $x \neq x_0$ ), sea  $J \subset I$  un intervalo compacto que contenga a  $x_0$  y a  $x$ . Por ser  $J$  compacto, ya sabemos que existe una única solución  $y_J$  del problema (2.5) definida en  $J$ . Definimos entonces  $y(x) = y_J(x)$ . Esta definición es correcta, ya que si  $J' \subset I$  es otro intervalo compacto que contiene a  $x_0$  y  $x$ , entonces  $y_J = y_{J'}$  en el intervalo compacto  $J \cap J'$ , y como  $x \in J \cap J'$  entonces  $y_J(x) = y_{J'}(x)$ . Esto prueba que el problema (2.5) tiene una solución  $y$  definida en todo  $I$ . La unicidad es inmediata, ya que si  $z$  es otra solución de dicho problema y  $x \in I$ , entonces  $z(x) = y(x)$  aplicando el teorema en el intervalo compacto  $[x_0, x]$  (ó  $[x, x_0]$ , si  $x < x_0$ ) contenido en  $I$ .  $\square$

En lo que sigue supondremos que las funciones  $A$  y  $b$  del sistema lineal (2.1)-(2.2) son continuas en un intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ . Denotaremos por  $\mathcal{S}$  el conjunto de soluciones del sistema (2.1), es decir,

$$\mathcal{S} = \{y : I \rightarrow \mathbb{R}^n \mid y' = A(x)y + b(x), \forall x \in I\} \subset C^1(I, \mathbb{R}^n).$$

Llamaremos  $\mathcal{S}_0$  al conjunto de soluciones del correspondiente sistema homogéneo

$$\boxed{y' = A(x)y}. \quad (2.6)$$

**Proposición 2.3.** *El conjunto  $\mathcal{S}_0$  de soluciones del sistema homogéneo (2.6) es un espacio vectorial real.*

*Demostración.* Si  $\varphi^1, \varphi^2 \in \mathcal{S}_0$  y  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , entonces

$$(\lambda\varphi^1 + \mu\varphi^2)'(x) = \lambda\varphi^{1'}(x) + \mu\varphi^{2'}(x) = \lambda A(x)\varphi^1(x) + \mu A(x)\varphi^2(x) = A(x)(\lambda\varphi^1(x) + \mu\varphi^2(x)),$$

y por tanto  $\lambda\varphi^1 + \mu\varphi^2 \in \mathcal{S}_0$ .  $\square$

**Proposición 2.4.** *El conjunto de soluciones del sistema inhomogéneo (2.1) es el espacio afín*

$$\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_0,$$

donde  $y_p$  es una solución particular fija del sistema inhomogéneo.

*Demostración.* Dada  $y \in \mathcal{S}$ , la función  $y - y_p$  es solución del sistema homogéneo (2.6), por lo que  $y - y_p \in \mathcal{S}_0$ , es decir  $y \in y_p + \mathcal{S}_0$ . Recíprocamente, si  $y_h \in \mathcal{S}_0$  entonces obviamente  $y_p + y_h \in \mathcal{S}$ .  $\square$

Como consecuencia del Teorema 2.2 de existencia y unicidad, veamos que la dimensión del espacio de soluciones del sistema homogéneo es precisamente  $n$ .

**Teorema 2.5.** *El conjunto de soluciones del sistema homogéneo  $y' = A(x)y$  es un espacio vectorial real de dimensión  $n$ .*

*Demostración.* Sea  $x_0 \in I$  un punto fijo pero arbitrario de  $I$ , y sea  $e_i$  el  $i$ -ésimo vector de la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ . Veamos en primer lugar que las soluciones  $Y^i(x)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} Y^i' = A(x)Y^i, \\ Y^i(x_0) = e_i, \end{cases} \quad (2.7)$$

constituyen un sistema de generadores del espacio vectorial  $\mathcal{S}_0$ . Sea  $y(x)$  una solución cualquiera del sistema homogéneo (2.6), y llamemos

$$y_0 = y(x_0) \equiv (y_{01}, \dots, y_{0n}) = \sum_{i=1}^n y_{0i}e_i.$$

Entonces la función

$$z(x) = \sum_{i=1}^n y_{0i} Y^i(x)$$

es solución del sistema homogéneo (2.6) (al ser combinación lineal de soluciones) y satisface la condición inicial

$$z(x_0) = \sum_{i=1}^n y_{0i} e_i = y_0 = y(x_0).$$

Del Teorema (2.2) de existencia y unicidad se sigue que  $z = y$  en  $I$ . Luego *toda solución es combinación lineal de las  $n$  soluciones  $Y^i$* , que constituyen así un sistema de generadores de  $\mathcal{S}_0$ . Veamos que de hecho las  $n$  soluciones  $Y^i$  son linealmente independientes y forman por tanto una base de  $\mathcal{S}_0$ . En caso contrario existirían  $n$  constantes reales  $\lambda_i$  no todas nulas tales que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i Y^i = 0,$$

es decir

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i Y^i(x) = 0, \quad \forall x \in I.$$

Pero entonces

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i Y^i(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0,$$

que sólo tiene la solución trivial  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$  al ser  $\{e_1, \dots, e_n\}$  una base de  $\mathbb{R}^n$ . Luego  $\{Y^1, \dots, Y^n\}$  es una base de  $\mathcal{S}_0$ , y por tanto  $\dim \mathcal{S}_0 = n$ .  $\square$

### 2.1.1 Wronskiano

**Definición 2.6.** Un **sistema fundamental de soluciones** del sistema homogéneo (2.6) es una base  $\{y^1, \dots, y^n\}$  de su espacio de soluciones.

Por ejemplo, las  $n$  soluciones  $Y^i$  del problema de valores iniciales (2.7) forman un sistema fundamental de soluciones del sistema homogéneo  $y' = A(x)y$ .

**Comentario.** Por definición, cualquier solución  $y(x)$  del sistema homogéneo (2.6) es combinación lineal de los elementos de un sistema fundamental de soluciones  $\{y^1, \dots, y^n\}$ , es decir,

$$y(x) = \sum_{i=1}^n c_i y^i(x), \quad x \in I, \quad (2.8)$$

para ciertas constantes reales  $c_1, \dots, c_n$ . La igualdad vectorial (2.8) es equivalente a las  $n$  igualdades escalares

$$y_k(x) = \sum_{i=1}^n c_i y_k^i(x), \quad k = 1, \dots, n,$$

para cada una de las componentes de la solución  $y(x)$ . A su vez, podemos escribir la igualdad (2.8) en forma matricial como

$$\boxed{y(x) = Y(x) c}, \quad (2.9)$$

siendo

$$Y(x) = (y^1(x) \quad \dots \quad y^n(x)) \equiv \begin{pmatrix} y_1^1(x) & \dots & y_1^n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n^1(x) & \dots & y_n^n(x) \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

**Definición 2.7.** Una **matriz fundamental** del sistema homogéneo (2.6) es cualquier función matricial  $Y : I \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  cuyas *columnas* forman un sistema fundamental de soluciones.

*Nota.* Si  $Y(x)$  es una matriz fundamental del sistema homogéneo (2.6), la solución general de dicho sistema está dada por la ecuación (2.9).

Dadas  $n$  soluciones  $\varphi^1, \dots, \varphi^n$  (no necesariamente independientes) del sistema homogéneo (2.6), consideramos la **matriz de soluciones**

$$\Phi(x) = (\varphi^1(x) \quad \dots \quad \varphi^n(x))$$

cuya  $i$ -ésima columna viene dada por la solución  $\varphi^i$ . Nótese que la matriz  $\Phi(x)$  verifica la ecuación matricial

$$\Phi'(x) = A(x)\Phi(x). \quad (2.10)$$

ya que

$$\Phi'(x) = (\varphi^{1'}(x) \quad \dots \quad \varphi^{n'}(x)) = (A(x)\varphi^1(x) \quad \dots \quad A(x)\varphi^n(x)) = A(x)\Phi(x).$$

**Definición 2.8.** Dadas  $n$  soluciones  $\varphi^1, \dots, \varphi^n$  del sistema homogéneo (2.6), su **wronskiano** es el determinante de la correspondiente matriz de soluciones  $\Phi(x)$ , es decir,

$$W[\varphi^1, \dots, \varphi^n](x) \equiv \det \Phi(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1^1(x) & \dots & \varphi_1^n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_n^1(x) & \dots & \varphi_n^n(x) \end{vmatrix}. \quad (2.11)$$

*Notación.* Cuando esté claro del contexto a qué soluciones  $\varphi^1, \dots, \varphi^n$  nos estamos refiriendo denotaremos su wronskiano sencillamente como  $W(x)$ .

La propiedad clave del wronskiano (2.11) es que su anulación en *cualquier* punto del intervalo  $I$  implica la dependencia lineal de las soluciones  $\varphi^1, \dots, \varphi^n$  en dicho intervalo, de acuerdo con la siguiente

**Proposición 2.9.** Sean  $\varphi^1, \dots, \varphi^n$  soluciones del sistema homogéneo (2.6) en el intervalo  $I$ . Entonces  $\{\varphi^1, \dots, \varphi^n\}$  son linealmente independientes  $\iff W[\varphi^1, \dots, \varphi^n](x) \neq 0, \forall x \in I$ .

*Demostración.* Veamos en primer lugar la implicación ( $\Leftarrow$ ). Si  $\{\varphi^1, \dots, \varphi^n\}$  fueran linealmente dependientes, entonces los *vectores*  $\{\varphi^1(x), \dots, \varphi^n(x)\}$  serían linealmente dependientes para cada  $x \in I$ . Pero entonces  $W[\varphi^1, \dots, \varphi^n](x) = 0$  para todo  $x \in I$ .

En cuanto a la implicación ( $\Rightarrow$ ), si existiera  $x_0 \in I$  tal que  $W[\varphi^1, \dots, \varphi^n](x_0) = 0$  entonces los *vectores*  $\{\varphi^1(x_0), \dots, \varphi^n(x_0)\}$  serían linealmente dependientes, es decir, existirían  $n$  constantes reales  $\lambda_k$  no todas nulas tales que

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi^k(x_0) = 0.$$

Pero entonces

$$y(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi^k(x)$$

sería solución del sistema (2.6) con la condición inicial  $y(x_0) = 0$ . Por el Teorema 2.2 de existencia y unicidad  $y \equiv 0$  en  $I$ , y por tanto  $\{\varphi^1, \dots, \varphi^n\}$  serían linealmente dependientes.  $\square$

**Comentario 1.** Dadas  $\varphi^1, \dots, \varphi^n$  soluciones de  $y' = A(x)y$ , de la última demostración se sigue que o bien  $W[\varphi^1, \dots, \varphi^n](x) \neq 0$  para todo  $x \in I$ , o bien  $W[\varphi^1, \dots, \varphi^n](x) = 0$  para todo  $x \in I$ .

**Comentario 2.** Nótese que una función matricial  $\Phi : I \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  es una matriz fundamental del sistema (2.6) si y sólo si

$$\text{i) } \Phi'(x) = A(x)\Phi(x), \quad \forall x \in I, \quad (2.12a)$$

$$\text{ii) } \det \Phi(x) \neq 0, \quad \forall x \in I. \quad (2.12b)$$

Si  $\Phi(x)$  es una matriz fundamental y  $P \in M_n(\mathbb{R})$  es cualquier matriz invertible, es inmediato comprobar que  $\Psi(x) = \Phi(x)P$  cumple i) y ii), y por tanto es una matriz fundamental.

**Comentario 3.** Dadas  $n$  funciones diferenciables  $\varphi^1, \dots, \varphi^n$  arbitrarias (no necesariamente solución de un sistema lineal homogéneo (2.6) con  $A$  continua en  $I$ ), la anulación de su wronskiano (incluso idénticamente) no implica la dependencia lineal. Por ejemplo, las funciones

$$\varphi^1(x) = \begin{pmatrix} \text{sen } x \\ x \end{pmatrix}, \quad \varphi^2(x) = \begin{pmatrix} e^x \text{sen } x \\ e^x x \end{pmatrix}$$

son linealmente independientes aunque su wronskiano se anula idénticamente en  $\mathbb{R}$ .

**Comentario 4.** Si el wronskiano de  $n$  funciones diferenciables  $\varphi^1, \dots, \varphi^n$  arbitrarias se anula en ciertos puntos de un intervalo  $I$  pero no en todo  $I$ , dichas funciones no pueden ser solución de un sistema homogéneo  $y' = A(x)y$  con  $A$  continua en  $I$ .

Sean  $\varphi^k, k = 1, \dots, n$ , soluciones del sistema homogéneo (2.6), y sea  $W(x)$  su wronskiano. Entonces

$$W'(x) = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} \varphi_1^1(x) & \dots & \varphi_1^n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_i^{1'}(x) & \dots & \varphi_i^{n'}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_n^1(x) & \dots & \varphi_n^n(x) \end{vmatrix}. \quad (2.13)$$

Como  $\varphi^k$  es solución de (2.6) se verifica

$$\varphi_i^{k'}(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x)\varphi_j^k(x).$$

Luego

$$W'(x) = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} \varphi_1^1(x) & \dots & \varphi_1^n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}(x)\varphi_j^1(x) & \dots & \sum_{j=1}^n a_{ij}(x)\varphi_j^n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_n^1(x) & \dots & \varphi_n^n(x) \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} \varphi_1^1(x) & \dots & \varphi_1^n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{ii}(x)\varphi_i^1(x) & \dots & a_{ii}(x)\varphi_i^n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_n^1(x) & \dots & \varphi_n^n(x) \end{vmatrix},$$

ya que un determinante no varía al sumar a una fila una combinación lineal de las restantes. Por tanto

$$W'(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii}W(x) = \text{tr } A(x) \cdot W(x).$$

Integrando esta última ecuación lineal de primer orden a partir de un cierto  $x_0 \in I$  se obtiene

$$\boxed{W(x) = W(x_0) e^{\int_{x_0}^x \text{tr } A(t) dt}}, \quad \forall x \in I, \quad (2.14)$$

expresión que se conoce como la **fórmula de Abel-Liouville**. Nótese que de esta fórmula se deduce también que o bien  $W(x)$  no se anula en  $I$ , o bien  $W(x)$  se anula idénticamente en  $I$ .

### 2.1.2 Método de variación de constantes

En general no resulta posible determinar de forma explícita una matriz fundamental del sistema homogéneo (2.6). Sin embargo, cuando se conoce una matriz fundamental  $Y(x)$  de dicho sistema se podrá determinar la solución general del correspondiente sistema inhomogéneo (2.1) utilizando el **método de variación de constantes**. Análogamente al caso escalar (ver pág. 12), el método consiste en probar como solución la función que se obtiene al sustituir el vector constante  $c$  de la solución general (2.9) del sistema homogéneo por una función incógnita  $c(x)$ , es decir,

$$y(x) = Y(x)c(x), \quad c(x) = \begin{pmatrix} c_1(x) \\ \vdots \\ c_n(x) \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo en (2.1) obtenemos

$$y'(x) = Y'(x)c(x) + Y(x)c'(x) = A(x)Y(x)c(x) + b(x),$$

y teniendo en cuenta que al ser  $Y(x)$  una matriz fundamental verifica las condiciones (2.12),

$$c'(x) = Y^{-1}(x)b(x), \quad \forall x \in I.$$

Luego

$$c(x) = c + \int^x Y^{-1}(s)b(s) ds, \quad c \in \mathbb{R}^n.$$

Por tanto la solución general del sistema inhomogéneo (2.1) viene dada por

$$\boxed{y(x) = Y(x)c + Y(x) \int^x Y^{-1}(s)b(s) ds}, \quad \forall x \in I. \quad (2.15)$$

Nótese que (de acuerdo con la Proposición 2.4) la solución (2.15) es de la forma

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

donde  $y_h(x)$  es la solución general del sistema homogéneo e  $y_p(x)$  es una solución particular del sistema inhomogéneo. Por último, la solución del problema de valores iniciales (2.5) es

$$\boxed{y(x) = Y(x)Y^{-1}(x_0)y_0 + \int_{x_0}^x Y(x)Y^{-1}(s)b(s) ds}, \quad \forall x \in I. \quad (2.16)$$

## 2.2 Sistemas con coeficientes constantes

Como hemos visto en la sección anterior, la dificultad para resolver el sistema inhomogéneo (2.1) estriba en determinar una matriz fundamental del correspondiente sistema homogéneo, ya que si se conoce tal matriz la solución general (2.15) del sistema inhomogéneo puede expresarse mediante cuadraturas. En esta sección veremos que cuando la matriz  $A(x)$  del sistema (2.1) es *constante* podemos encontrar en principio una matriz fundamental del correspondiente sistema homogéneo. Más precisamente, vamos a comprobar que una matriz fundamental del sistema homogéneo

$$\boxed{y' = Ay, \quad A \in M_n(\mathbb{R})} \quad (2.17)$$

es

$$Y(x) = e^{xA}. \quad (2.18)$$

Las preguntas que surgen inmediatamente son ¿cómo se define la exponencial de una matriz? y ¿por qué  $e^{xA}$  es una matriz fundamental del sistema (2.17)? En cuanto a la primera pregunta, recordemos que para todo  $t \in \mathbb{R}$  la función exponencial  $e^t$  puede representarse por su serie de Maclaurin (serie de Taylor centrada en cero)

$$e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}, \quad (2.19)$$

donde la serie del miembro derecho converge absolutamente para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Debido a ello se define la exponencial de una matriz como la serie

$$e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!}, \quad \forall B \in M_n(\mathbb{R}), \quad (2.20)$$

donde  $B^0 \equiv \mathbb{1}$  denota la matriz identidad. Para que esta definición tenga sentido es necesario comprobar que la serie anterior converge en el espacio normado  $M_n(\mathbb{R})$ . Para probar esto, nótese que si  $v \in \mathbb{R}^n$  es un vector de norma unidad, se verifica

$$\|B^k v\| \leq \|B\|_s \|B^{k-1} v\| \leq \|B\|_s^2 \|B^{k-2} v\| \leq \dots \leq \|B\|_s^k \|v\| = \|B\|_s^k.$$

Tomando el máximo sobre  $\|v\| = 1$  se sigue que

$$\|B^k\|_s \leq \|B\|_s^k. \quad (2.21)$$

Al ser la serie numérica (2.19) convergente en  $t = \|B\|_s$ , por el criterio de Cauchy se tiene que  $\forall \varepsilon > 0$ , existe  $M \in \mathbb{N}$  tal que

$$l > m \geq M \implies \sum_{k=m+1}^l \frac{\|B\|_s^k}{k!} < \varepsilon.$$

Utilizando las desigualdades triangular y (2.21) se sigue que

$$l > m \geq M \implies \left\| \sum_{k=m+1}^l \frac{B^k}{k!} \right\|_s \leq \sum_{k=m+1}^l \frac{\|B^k\|_s}{k!} \leq \sum_{k=m+1}^l \frac{\|B\|_s^k}{k!} < \varepsilon.$$

Por el criterio de Cauchy la serie (2.20) es absolutamente convergente para cualquier matriz  $B \in M_n(\mathbb{R})$ . En particular, la serie de potencias con coeficientes matriciales

$$e^{xA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k A^k}{k!} \quad (2.22)$$

converge para cualquier  $x \in \mathbb{R}$  y para cualquier matriz  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . De las propiedades generales de las series de potencias se deduce que  $e^{xA}$  es derivable para todo  $x \in \mathbb{R}$ , siendo su derivada la derivada término a término de la serie de potencias (2.22), es decir,

$$(e^{xA})' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1} A^k}{(k-1)!} = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k A^k}{k!} = A e^{xA}. \quad (2.23)$$

De esta última ecuación se sigue que  $e^{xA}$  es una matriz de soluciones del sistema homogéneo (2.17). En otras palabras, las  $n$  columnas de la matriz  $e^{xA}$  son soluciones de (2.17), siendo su wronskiano en  $x = 0$

$$W(0) = \det(e^0) = \det \mathbb{1} = 1 \neq 0.$$



Del Comentario 1 de la sección anterior (o de la fórmula de Abel–Liouville) se sigue que dicho wronskiano no se anula en toda la recta real, es decir,

$$W(x) = \det(e^{xA}) \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.24)$$

Las ecuaciones (2.23) y (2.24) muestran que la matriz  $e^{xA}$  satisface las condiciones (2.12) del Comentario 2 de la sección anterior, estableciendo así el siguiente

**Teorema 2.10.** *La matriz  $e^{xA}$  es una matriz fundamental del sistema homogéneo con coeficientes constantes  $y' = Ay$ .*

**Comentario.** La solución general del sistema homogéneo (2.17) está dada por

$$y(x) = e^{xA}c, \quad c \in \mathbb{R}^n. \quad (2.25)$$

En particular, como  $e^0 = \mathbb{1}$ , la solución del sistema  $y' = Ay$  con la condición inicial  $y(0) = y_0$  es simplemente

$$y(x) = e^{xA}y_0.$$

La siguiente proposición resume algunas propiedades importantes de la exponencial matricial:

**Proposición 2.11.** *Sean  $A, B, P \in M_n(\mathbb{R})$ , con  $P$  invertible. Entonces:*

i) *Si  $A$  y  $B$  conmutan (es decir  $[A, B] \equiv AB - BA = 0$ ), entonces*

$$e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A. \quad (2.26)$$

*En particular  $e^{(s+t)A} = e^{sA} e^{tA}$  para todos  $s, t \in \mathbb{R}$ .*

ii)  *$e^A$  es invertible, siendo  $(e^A)^{-1} = e^{-A}$ .*

iii)  *$Pe^A P^{-1} = e^{PAP^{-1}}$ .*

iv)  *$\det(e^A) = e^{\text{tr} A}$ .*

*Demostración.*

i) Como  $[A, B] = 0$ , entonces

$$(A + B)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} A^j B^{k-j}.$$

Luego

$$\begin{aligned} e^{A+B} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+B)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} A^j B^{k-j} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!(k-j)!} A^j B^{k-j} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{B^{k-j}}{(k-j)!} = \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} \right) = e^A e^B, \end{aligned}$$

estando la reordenación de las series del penúltimo paso justificada por la convergencia absoluta de la exponencial de matrices. La segunda igualdad de (2.26) se sigue de la conmutatividad de la suma de matrices.

ii) Del punto i) se sigue inmediatamente que

$$\mathbb{1} = e^{A-A} = e^A e^{-A} = e^{-A} e^A \implies (e^A)^{-1} = e^{-A}.$$

$$\text{iii) } Pe^A P^{-1} = P \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right) P^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{PA^k P^{-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(PAP^{-1})^k}{k!} = e^{PAP^{-1}}.$$

iv) Como  $e^{xA}$  es una matriz fundamental del sistema (2.17), sus columnas son solución de dicho sistema, siendo su wronskiano  $\det(e^{xA})$ . Utilizando la fórmula de Abel–Liouville obtenemos

$$\det(e^{xA}) = \det(e^0) e^{\int_0^x \text{tr} A dt} = e^{x \text{tr} A}.$$

Particularizando para  $x = 1$  se obtiene la fórmula del enunciado.  $\square$

*Nota.* En general, la identidad (2.26) es falsa cuando las matrices  $A$  y  $B$  no conmutan.

**Comentario.** En vista de la proposición anterior y de las expresiones (2.15) y (2.16) obtenidas al estudiar el método de variación de constantes, la solución general del sistema inhomogéneo

$$y' = Ay + b(x), \quad A \in M_n(\mathbb{R}), \quad b : I \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ continua,}$$

viene dada por

$$y(x) = e^{xA} c + e^{xA} \int^x e^{-sA} b(s) ds = e^{xA} c + \int^x e^{(x-s)A} b(s) ds, \quad (2.27)$$

donde  $c \in \mathbb{R}^n$ . Si imponemos además la condición inicial  $y(x_0) = y_0$  la solución buscada es

$$y(x) = e^{(x-x_0)A} y_0 + \int_{x_0}^x e^{(x-s)A} b(s) ds.$$

**Comentario.** En la siguiente subsección, para el cálculo explícito de la exponencial de una matriz real necesitaremos hallar la exponencial de una matriz *compleja*, que se define exactamente igual que en el caso real, mediante la ecuación (2.20). De forma análoga al caso real, se prueba que la serie de la exponencial de una matriz compleja converge en el espacio de matrices  $M_n(\mathbb{C})$  con la norma del supremo, que se define como en la ecuación (2.3). Recuérdese, a este respecto, que la norma de un vector  $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{C}^n$  está dada por

$$\|v\| = \left( \sum_{i=1}^n |v_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.28)$$

siendo  $|v_i|$  el módulo de  $v_i$ . Por último, se demuestra fácilmente que la exponencial de matrices complejas satisface las propiedades enunciadas en la Proposición 2.11.

### 2.2.1 Cálculo de la exponencial de una matriz

En este apartado nos planteamos cómo efectuar el cálculo explícito de la matriz fundamental  $e^{xA}$  del sistema homogéneo con coeficientes constantes (2.17). Para ello comenzaremos recordando que toda matriz  $A \in M_n(\mathbb{R})$  puede reducirse a su **forma canónica de Jordan**  $J \in M_n(\mathbb{C})$  mediante una transformación de semejanza. En otras palabras, existe una matriz invertible  $P \in M_n(\mathbb{C})$  tal que

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m \end{pmatrix},$$

donde cada **bloque de Jordan**  $J_i$  es de la forma

$$J_i = \lambda_i \mathbb{1}_{r_i} + N_i, \quad (2.29)$$

siendo  $N_i$  una matrix nilpotente diagonal por bloques

$$N_i = \begin{pmatrix} N[n_i] & & & \\ & N[n'_i] & & \\ & & \ddots & \\ & & & N[n_i^{(s_i-1)}] \end{pmatrix},$$

donde  $n_i \geq n'_i \geq \dots \geq n_i^{(s_i-1)} \geq 1$  y  $N[k] \in M_k(\mathbb{R})$  es la **matrix nilpotente elemental** de orden  $k$

$$N[k] = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En la expresión (2.29) los números (en general complejos)  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  son los distintos **autovalores** de la matrix  $A$ , es decir, las  $m$  raíces distintas del **polinomio característico**

$$p_A(t) \equiv \det(t\mathbb{1} - A)$$

de la matrix  $A$ .

- El número  $r_i = n_i + n'_i + \dots + n_i^{(s_i-1)}$  es la dimensión del bloque de Jordan  $J_i$ , que coincide con la multiplicidad de  $\lambda_i$  como raíz del polinomio característico, ya que

$$p_A(t) = \det(t\mathbb{1} - PJP^{-1}) = \det(P(t\mathbb{1} - J)P^{-1}) = \det(t\mathbb{1} - J) = \prod_{i=1}^m (t - \lambda_i)^{r_i}.$$

En otras palabras,  $r_i$  es la **multiplicidad algebraica** de  $\lambda_i$ .

- El entero  $s_i$  es el número de **bloques de Jordan elementales**

$$\lambda_i \mathbb{1}_k + N[k]$$

asociados al autovalor  $\lambda_i$ . Veremos más adelante que  $s_i$  es la **multiplicidad geométrica** del autovalor  $\lambda_i$ , es decir, el número de autovectores linealmente independientes asociados a dicho autovalor (cf. ecuación (2.33)).

- El número  $n_i$  (**índice** de  $\lambda_i$ ) es la dimensión del mayor bloque de Jordan elemental asociado al autovalor  $\lambda_i$ , y coincide con la multiplicidad de  $\lambda_i$  como raíz del **polinomio mínimo**  $\phi_A$  de la matrix  $A$ , es decir

$$\phi_A(t) = \prod_{i=1}^m (t - \lambda_i)^{n_i}.$$

Recordemos que dicho polinomio se define como el polinomio mónico de menor grado que anula a la matrix  $A$ , es decir, tal que

$$\phi_A(A) = 0. \quad (2.30)$$

La existencia de este polinomio es consecuencia del teorema de Cayley–Hamilton, según el cual  $p_A(A) = 0$ . Nótese que, al ser  $n_i \leq r_i$ , el polinomio mínimo divide exactamente al polinomio característico.

**Comentario.** Nótese que  $N[k]^j = 0$  si y sólo si  $j \geq k$ , es decir,  $N[k]$  es una matriz nilpotente de orden  $k$ . De esto se sigue que  $N_i^j = 0$  si y sólo si  $j \geq n_i$ . Además, como  $N[1] = 0 \in M_1(\mathbb{R})$ , la matriz  $A$  es diagonalizable si y sólo si  $n_1 = \dots = n_m = 1$ , es decir, cuando todas las raíces del polinomio mínimo tienen multiplicidad uno. Equivalentemente,  $A$  es diagonalizable si y sólo si la multiplicidad geométrica  $s_i$  de cada autovalor coincide con su multiplicidad algebraica  $r_i$ . En particular, si  $A$  tiene  $n$  autovalores distintos es diagonalizable.

**Comentario.** Se prueba que la forma canónica de Jordan  $J$  de la matriz  $A$  es única salvo reordenación de sus bloques de Jordan  $J_i$ . Nótese que aunque  $A$  sea una matriz real, tanto  $J$  como  $P$  pueden ser complejas. Las columnas  $P_1, \dots, P_n$  de la matriz  $P$  forman una base de  $\mathbb{C}^n$  (**base de Jordan** de  $A$ ) respecto de la cual la matriz del operador lineal  $v \mapsto Av$  es la forma canónica  $J$ . Además, si  $v_1, \dots, v_k$  son los vectores de la base de Jordan correspondientes a un bloque de Jordan elemental  $\lambda \mathbb{1}_k + N[k]$ , utilizando la relación  $AP = PJ$  se puede demostrar que

$$v_{j+1} = (A - \lambda)^j v_1, \quad j = 1, \dots, k-1; \quad (A - \lambda)^k v_1 = 0. \quad (2.31)$$

En la práctica, para calcular los vectores  $v_1, \dots, v_k$  basta con tomar un vector

$$v_1 \in \ker(A - \lambda)^k - \ker(A - \lambda)^{k-1} \quad (2.32)$$

y definir los restantes vectores  $v_2, \dots, v_k$  mediante la relación (2.31), ya que de (2.32) se deduce fácilmente que los vectores  $v_1, \dots, v_k$  son linealmente independientes. Por último, de las ecuaciones (2.31) se sigue que  $v_k$  es autovector de  $A$  con autovalor  $\lambda$ . Por tanto  $A$  posee  $s_i$  autovectores linealmente independientes asociados a cada autovalor  $\lambda_i$ , es decir,

$$\dim \ker(A - \lambda_i) = s_i. \quad (2.33)$$

Una vez halladas la forma canónica de Jordan  $J$  de la matriz  $A$  y una matriz invertible  $P$  tal que  $A = PJP^{-1}$ , el cálculo de la exponencial  $e^{xA}$  se reduce al de  $e^{xJ}$ . En efecto, por la Proposición 2.11 se tiene

$$e^{xA} = e^{xPJP^{-1}} = Pe^{xJ}P^{-1}.$$

Ahora bien, al ser  $J$  diagonal por bloques se sigue que

$$J^k = \begin{pmatrix} J_1^k & & & \\ & J_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m^k \end{pmatrix}, \quad \text{y por tanto} \quad e^{xJ} = \begin{pmatrix} e^{xJ_1} & & & \\ & e^{xJ_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{xJ_m} \end{pmatrix}.$$

Como  $[\lambda_i \mathbb{1}, N_i] = 0$  y  $N_i$  es también diagonal por bloques, se tiene

$$e^{xJ_i} = e^{x\lambda_i \mathbb{1}} e^{xN_i} = e^{x\lambda_i} \begin{pmatrix} e^{xN[n_i]} & & & \\ & e^{xN[n'_i]} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{xN[n_i^{(s_i-1)}]} \end{pmatrix}.$$

Al ser la matriz  $xN[k]$  nilpotente de orden  $k$ , su exponencial se reduce a una suma finita:

$$e^{xN[k]} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^j}{j!} N[k]^j = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ x & 1 & & & \\ \frac{x^2}{2!} & x & 1 & & \\ \frac{x^3}{3!} & \frac{x^2}{2!} & x & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} & \frac{x^{k-2}}{(k-2)!} & \cdots & \cdots & x & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

En resumen, la exponencial de la matriz  $xA$  es semejante a una matriz diagonal por bloques:

$$e^{xA} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} e^{xN[n_1]} & & & \\ & \ddots & & \\ & & e^{\lambda_1 x} e^{xN[n_1^{(s_1-1)}]} & \\ & & & \ddots & \\ & & & & e^{\lambda_m x} e^{xN[n_m]} \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & e^{\lambda_m x} e^{xN[n_m^{(s_m-1)}]} \end{pmatrix} P^{-1},$$

donde  $e^{xN^{[k]}}$  está dado por la ecuación (2.34).

**Comentario.** Como  $e^{xA}$  es una matriz fundamental del sistema homogéneo (2.17), la matriz  $Pe^{xJ} = e^{xA}P$  verifica las condiciones (2.12), y es por tanto una matriz fundamental de dicho sistema. En general resulta más fácil determinar  $Pe^{xJ}$  que  $e^{xA}$ , ya que para la primera no hace falta calcular  $P^{-1}$ . Sin embargo (a diferencia de  $e^{xA}$ , que es siempre real cuando  $A$  es real) la matriz  $Pe^{xJ}$  puede ser compleja, de modo que posiblemente haya que tomar combinaciones lineales de sus columnas para obtener a partir de ella una matriz fundamental real.

**Comentario.** Si  $y(x)$  es una solución compleja del sistema  $y' = Ay$ , con  $A$  real, entonces

$$\overline{y(x)}' = \overline{y'(x)} = \overline{Ay(x)} = A\overline{y(x)},$$

y por tanto  $\overline{y(x)}$  es también solución. Por la linealidad del sistema, de esto se sigue que

$$\operatorname{Re} y(x) = \frac{1}{2} (y(x) + \overline{y(x)}), \quad \operatorname{Im} y(x) = \frac{1}{2i} (y(x) - \overline{y(x)})$$

son soluciones *reales* de dicho sistema.

A continuación utilizaremos los resultados que acabamos de enunciar para describir explícitamente la forma de las soluciones del sistema homogéneo (2.17). En primer lugar, si  $\lambda$  es un autovalor de  $A$  y  $v$  es un autovector con autovalor  $\lambda$ , entonces  $y = e^{\lambda x}v$  es solución de (2.17), ya que

$$y' = e^{\lambda x}\lambda v = e^{\lambda x}Av = A(e^{\lambda x}v) = Ay.$$

Si  $\lambda \in \mathbb{R}$ , al ser  $A$  real siempre podemos elegir  $v$  real. En cambio, si  $\lambda = a + ib$  con  $b \neq 0$ , tomando la parte real y la parte imaginaria de  $e^{\lambda x}v$  se obtienen las dos soluciones reales

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(e^{\lambda x}v) &= e^{ax} (\cos(bx) \operatorname{Re} v - \operatorname{sen}(bx) \operatorname{Im} v), \\ \operatorname{Im}(e^{\lambda x}v) &= e^{ax} (\cos(bx) \operatorname{Im} v + \operatorname{sen}(bx) \operatorname{Re} v). \end{aligned} \tag{2.35}$$

- Si  $A$  es diagonalizable, es decir, si

$$J = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n \end{pmatrix},$$

(en esta notación los autovalores  $\mu_i$  no tienen por qué ser distintos entre sí) entonces existe una base  $\{P_1, \dots, P_n\}$  de  $\mathbb{C}^n$  formada por autovectores de  $A$ , donde  $AP_i = \mu_i P_i$ . Por tanto, en este caso las funciones

$$\varphi^i(x) = e^{\mu_i x} P_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

son un sistema fundamental de soluciones del sistema (2.17), ya que

$$W[\varphi^1, \dots, \varphi^n](0) = \det P = \det(P_1 \dots P_n) \neq 0.$$

La matriz fundamental correspondiente a las soluciones  $\varphi^i(x)$  es  $Pe^{xJ}$ , ya que

$$(e^{\mu_1 x} P_1 \quad e^{\mu_2 x} P_2 \quad \dots \quad e^{\mu_n x} P_n) = (P_1 \quad P_2 \quad \dots \quad P_n) \begin{pmatrix} e^{\mu_1 x} & & & \\ & e^{\mu_2 x} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\mu_n x} \end{pmatrix} = Pe^{xJ}.$$

Cuando un autovalor  $\mu_i$  sea complejo, podemos reemplazar las soluciones complejas  $e^{\mu_i x} P_i$  y  $e^{\bar{\mu}_i x} \bar{P}_i$  por las soluciones reales  $\operatorname{Re}(e^{\mu_i x} P_i)$  e  $\operatorname{Im}(e^{\mu_i x} P_i)$ , cf. ecuación (2.35).

• Si  $A$  no es diagonalizable, sean  $\{P_{l+1}, \dots, P_{l+k}\} \equiv \{v_1, \dots, v_k\}$  los vectores de la base de Jordan de  $\mathbb{C}^n$  correspondientes a un bloque de Jordan elemental

$$\lambda \mathbb{1}_k + N[k], \quad k \geq 2,$$

siendo  $\lambda$  uno de los autovalores de  $A$ . Al ser

$$Pe^{xJ} = \left( P_1 \quad \dots \quad P_l \quad \boxed{P_{l+1} \quad \dots \quad P_{l+k}} \quad P_{l+k+1} \quad \dots \quad P_n \right) \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & \boxed{e^{\lambda x} e^{xN[k]}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{pmatrix},$$

utilizando (2.34) se sigue que las columnas  $l+1, \dots, l+k$  de la matriz fundamental  $Pe^{xJ}$  son

$$\begin{aligned} (v_1 \quad \dots \quad v_k) e^{\lambda x} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ x & 1 & & & & \\ \frac{x^2}{2!} & x & 1 & & & \\ \frac{x^3}{3!} & \frac{x^2}{2!} & x & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} & \frac{x^{k-2}}{(k-2)!} & \dots & \dots & x & 1 \end{pmatrix} \\ & = \left( \underbrace{e^{\lambda x} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{x^i}{i!} v_{1+i}}_{\varphi^{k-1}} \quad \underbrace{e^{\lambda x} \sum_{i=0}^{k-2} \frac{x^i}{i!} v_{2+i}}_{\varphi^{k-2}} \quad \dots \quad \underbrace{e^{\lambda x} \sum_{i=0}^1 \frac{x^i}{i!} v_{k-1+i}}_{\varphi^1} \quad \underbrace{e^{\lambda x} v_k}_{\varphi^0} \right) \end{aligned} \quad (2.36)$$

Por tanto, las  $k$  funciones vectoriales

$$\boxed{\varphi^j(x) = e^{\lambda x} \sum_{i=0}^j \frac{x^i}{i!} v_{k-j+i}}, \quad j = 0, \dots, k-1, \quad (2.37)$$

son soluciones linealmente independientes del sistema homogéneo (2.17). Por ejemplo, si  $k = 2, 3$  estas soluciones son

$$k = 2: \quad \varphi^0(x) = e^{\lambda x} v_2, \quad \varphi^1(x) = e^{\lambda x} (v_1 + x v_2); \quad (2.38a)$$

$$k = 3: \quad \varphi^0(x) = e^{\lambda x} v_3, \quad \varphi^1(x) = e^{\lambda x} (v_2 + x v_3), \quad \varphi^2(x) = e^{\lambda x} \left( v_1 + x v_2 + \frac{x^2}{2} v_3 \right). \quad (2.38b)$$

Como  $A$  es una matriz real, se demuestra que si el autovalor  $\lambda$  es real entonces se pueden elegir  $v_1, \dots, v_k$  reales (cf. ecuaciones (2.31)-(2.32)), de modo que las soluciones (2.37) son reales. En cambio, si  $\lambda = a + ib \notin \mathbb{R}$ , tomando la parte real y la parte imaginaria de las  $k$  soluciones complejas (2.37) se obtienen las  $2k$  soluciones reales

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \varphi^j(x) &= e^{ax} \sum_{i=0}^j \frac{x^i}{i!} (\cos(bx) \operatorname{Re} v_{k-j+i} - \operatorname{sen}(bx) \operatorname{Im} v_{k-j+i}), \\ \operatorname{Im} \varphi^j(x) &= e^{ax} \sum_{i=0}^j \frac{x^i}{i!} (\cos(bx) \operatorname{Im} v_{k-j+i} + \operatorname{sen}(bx) \operatorname{Re} v_{k-j+i}), \end{aligned} \quad (2.39)$$

con  $j = 0, \dots, k-1$ , combinaciones lineales de las soluciones complejas correspondientes a los autovalores  $\lambda$  y  $\bar{\lambda}$ . Estas consideraciones prueban que el sistema homogéneo (2.17) tiene un sistema fundamental de soluciones de la forma (2.37)-(2.39). Teniendo en cuenta que la solución general del sistema es combinación lineal de estas soluciones, se obtiene el siguiente resultado:

**Teorema 2.12.** Las soluciones del sistema homogéneo con coeficientes constantes  $y' = Ay$ , con  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , son combinaciones lineales con coeficientes en  $\mathbb{R}^n$  de funciones de la forma

$$x^j e^{ax} \cos(bx), \quad x^k e^{ax} \operatorname{sen}(bx),$$

donde  $a + ib$  ( $b \geq 0$ ) es un autovalor de  $A$  y los exponentes  $j, k$  son estrictamente menores que el índice de dicho autovalor.

**Ejemplo 2.13.** Se trata de determinar la solución del problema de valores iniciales

$$y' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

Sea  $A$  la matriz del sistema (2.40). Su polinomio característico es

$$p_A(t) = \begin{vmatrix} t-3 & 4 \\ -1 & t+1 \end{vmatrix} = (t-1)^2.$$

Por tanto  $\lambda = 1$  es autovalor de  $A$  con multiplicidad algebraica 2. Como  $A$  no es diagonalizable (las únicas matrices con todos los autovalores iguales que son diagonalizables son los múltiplos de la identidad), el índice del autovalor  $\lambda = 1$  es 2. En virtud del Teorema 2.12, las soluciones del sistema (2.40) son combinación lineal de las funciones

$$e^x, \quad xe^x$$

con coeficientes en  $\mathbb{R}^2$ , es decir,

$$y = e^x(w_1 + xw_2), \quad w_i \in \mathbb{R}^2.$$

Sustituyendo en la ecuación  $y' = Ay$  obtenemos:

$$e^x(w_1 + xw_2) + e^x w_2 = e^x(Aw_1 + xAw_2).$$

Igualando los coeficientes de las distintas potencias de  $x$  obtenemos las ecuaciones lineales

$$w_2 = (A-1)w_1, \quad (A-1)w_2 = 0.$$

Al ser  $(A - 1)^2 = 0$ , la segunda de estas ecuaciones es consecuencia de la primera, y por tanto  $w_1$  es arbitrario. Luego la solución general del sistema es

$$y(x) = e^x(w_1 + x(A - 1)w_1).$$

Como  $y(0) = w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  y  $(A - 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ , la solución que satisface la condición inicial del enunciado es

$$y(x) = \begin{pmatrix} 1 + 2x \\ x \end{pmatrix} e^x.$$

**Ejemplo 2.14.** Hallemos la solución general del sistema de primer orden

$$y' = Ay, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

El polinomio característico de la matriz del sistema es

$$p_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -1 & -1 \\ -2 & t-1 & 1 \\ 0 & 1 & t-1 \end{vmatrix} = t^3 - 3t^2 + 4 = (t+1)(t-2)^2.$$

Los autovalores de  $A$  son  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 2$  con multiplicidades algebraicas  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = 2$ . Luego la matriz  $A$  es diagonalizable si y sólo si el índice del autovalor 2 es  $n_2 = 1$ . Como

$$(A+1)(A-2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ -2 & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \neq 0,$$

se sigue que  $n_2 = 2$  y por tanto  $A$  no es diagonalizable. Otra forma de demostrar que  $A$  no es diagonalizable es comprobar que  $s_2 = \dim \ker(A - 2) = 1$ , y por tanto  $J_2$  consta de un único bloque de Jordan elemental de dimensión 2. En efecto, se tiene

$$\dim \ker(A - 2) = 3 - \text{rank}(A - 2) = 3 - 2 = 1.$$

De acuerdo con la ecuación (2.37), una base del espacio de soluciones del sistema (2.41) está dada por

$$\psi(x) = e^{-x}u, \quad \varphi^0(x) = e^{2x}v_2, \quad \varphi^1(x) = e^{2x}(v_1 + xv_2),$$

donde  $u \in \mathbb{R}^3$  es autovector de  $A$  con autovalor  $-1$ , y los vectores  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$  satisfacen

$$v_2 = (A - 2)v_1 \neq 0, \quad (A - 2)^2v_1 = 0,$$

de acuerdo con las ecuaciones (2.31). (Nótese que a estas mismas condiciones se llega inmediatamente al sustituir  $\psi(x)$  y  $\varphi^1(x)$  en el sistema (2.41).) Teniendo en cuenta lo anterior, podemos elegir

$$u = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, al ser

$$(A - 2)^2 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -4 & 4 & 4 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$



podemos tomar

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ya que entonces} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

En definitiva, la solución general del sistema (2.41) es

$$y(x) = b\psi(x) + c_0\varphi^0(x) + c_1\varphi^1(x) = b \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-x} + c_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2x} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1+x \\ -x \end{pmatrix} e^{2x},$$

donde  $b, c_0, c_1$  son constantes arbitrarias.

## 2.2.2 Polinomio interpolador de Lagrange

Uno de los métodos más efectivos para el cálculo de la exponencial de una matriz es el basado en el polinomio interpolador de Lagrange, que describiremos a continuación. De hecho, mediante este método se puede calcular cualquier función matricial  $f(A)$  de una matriz  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , donde  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es una función analítica. Más concretamente, sea  $f(z)$  la función definida por la serie de potencias

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad |z| < R,$$

donde  $R > 0$  es el radio de convergencia de la serie. Igual que se hizo al principio de esta sección con la función exponencial, se demuestra que la serie matricial

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k, \quad A \in M_n(\mathbb{R}),$$

es convergente si  $\|A\|_s < R$ . (En el caso de la función exponencial  $R = \infty$ , y por tanto esta condición se satisface automáticamente.) Para calcular  $f(A)$  para una matriz  $A \in M_n(\mathbb{R})$  tal que  $\|A\|_s < R$ , nótese que la ecuación (2.30) permite expresar cualquier potencia  $A^k$  con  $k \geq d(A)$ , siendo  $d(A) \equiv n_1 + \dots + n_m$  el grado del polinomio mínimo de  $A$ , en términos de potencias  $A^j$  con  $j < d(A)$ . Por tanto existe un polinomio  $P_{f,A}$  (dependiente de  $f$  y de  $A$ ) tal que

$$\boxed{f(A) = P_{f,A}(A), \quad \deg(P_{f,A}) \leq d(A) - 1}. \quad (2.42)$$

Dicho polinomio es único, ya que si  $f(A) = P(A)$  con  $\deg P \leq d(A) - 1$  entonces  $P_{f,A} - P$  sería un polinomio de grado menor que el del polinomio mínimo de  $A$  que anula a la matriz  $A$ , y por tanto  $P_{f,A} - P = 0$ . El polinomio  $P_{f,A}$  definido por (2.42) se denomina **polinomio interpolador de Lagrange** de la matriz  $A$  para la función  $f$ . En la práctica, para el cálculo de  $P_{f,A}$  se suele utilizar el siguiente resultado:

**Proposición 2.15.** *Un polinomio  $P$  de grado menor o igual que  $d(A) - 1$  coincide con el polinomio interpolador  $P_{f,A}$  si y sólo si verifica las ecuaciones*

$$P^{(j)}(\lambda_i) = f^{(j)}(\lambda_i); \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 0, \dots, n_i - 1, \quad (2.43)$$

siendo  $n_i$  el índice del autovalor  $\lambda_i$ .

*Demostración.* Para empezar, nótese que la condición  $f(A) = P_{f,A}(A)$  es equivalente a imponer que  $f(A)v = P_{f,A}(A)v$  para todo  $v$  de la base de Jordan de  $A$ . Veamos, en primer lugar, que las condiciones (2.43) son *necesarias* para que  $P = P_{f,A}$ . Sean  $v_{i1}, \dots, v_{i,n_i}$  los vectores de la base de Jordan correspondientes al primer bloque de Jordan elemental asociado a un autovalor  $\lambda_i$  (de dimensión mayor o igual que los demás bloques elementales asociados a dicho autovalor). Escribiendo

$$f(z) - P(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_{ij}(z - \lambda_i)^j \quad (2.44)$$

(la serie es convergente para  $|z|$  suficientemente pequeño, ya que  $|\lambda_i| \leq \|A\|_s$  para cualquier autovalor  $\lambda_i$ ), si  $P = P_{f,A}$  se tiene

$$0 = [P_{f,A}(A) - P(A)]v_{i1} = [f(A) - P(A)]v_{i1} = \sum_{j=0}^{\infty} b_{ij}(A - \lambda_i)^j v_{i1} = \sum_{j=0}^{n_i-1} b_{ij}v_{i,j+1},$$

donde hemos utilizado las ecuaciones (2.31). Por tanto

$$0 = b_{ij} \equiv \frac{1}{j!} (f - P)^{(j)}(\lambda_i) = 0, \quad j = 0, \dots, n_i - 1,$$

que son las ecuaciones (2.43) correspondientes al autovalor  $\lambda_i$ .

Para demostrar que las ecuaciones (2.43) son *suficientes* para que  $P = P_{f,A}$ , al ser  $\deg P \leq d(A) - 1$  basta probar que  $f(A) = P(A)$ , es decir, que  $[f(A) - P(A)]v = 0$  para todo  $v$  de la base de Jordan de  $A$ . Sea entonces  $v$  un vector de dicha base correspondiente a un bloque de Jordan elemental de dimensión  $k$  y autovalor  $\lambda_i$ . Utilizando el desarrollo (2.44) y teniendo en cuenta que  $b_{ij} = 0$  si  $j = 0, \dots, n_i - 1$  por las ecuaciones (2.43) obtenemos

$$[f(A) - P(A)]v = \sum_{j=n_i}^{\infty} b_{ij}(A - \lambda_i)^j v.$$

Cada uno de los términos de la suma del miembro derecho de esta ecuación se anula en virtud de las ecuaciones (2.31), ya que por definición de índice se tiene que  $k \leq n_i$ .  $\square$

**Comentario.** Las condiciones (2.43) son un sistema lineal de  $n_1 + \dots + n_m = d(A)$  ecuaciones que determinan los  $d(A)$  coeficientes del polinomio  $P \equiv P_{f,A}$ .

**Ejemplo 2.16.** Calculemos la matriz  $e^{xA}$ , donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

utilizando el polinomio interpolador de Lagrange. El polinomio característico es

$$p_A(t) = \begin{vmatrix} t & 0 & -1 & 0 \\ 0 & t & 0 & 1 \\ 1 & 0 & t & 0 \\ 0 & -1 & 0 & t \end{vmatrix} = (t^2 + 1)^2,$$

de modo que los autovalores son  $\lambda = \pm i$  (de multiplicidad algebraica 2). Se comprueba inmediatamente que  $A^2 + \mathbb{1} = 0$ , y por tanto el polinomio mínimo es  $\phi_A(t) = t^2 + 1$ . El polinomio interpolador de Lagrange de la matriz  $A$  para la función  $f(z) = e^{xz}$  es entonces de la forma

$$P_{f,A}(z) = \alpha + \beta z,$$

donde los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  se determinan mediante las ecuaciones (2.43). Como en este caso  $n_1 = n_2 = 1$ , dichas ecuaciones se reducen a  $P_{f,A}(\pm i) = e^{\pm ix}$ , es decir,

$$\begin{aligned}\alpha + \beta i &= e^{ix} \\ \alpha - \beta i &= e^{-ix}.\end{aligned}$$

Sumando y restando las ecuaciones anteriores se obtiene  $\alpha = \cos x$ ,  $\beta = \sin x$ , y por tanto

$$e^{xA} = \cos x + \sin x \cdot A = \begin{pmatrix} \cos x & 0 & \sin x & 0 \\ 0 & \cos x & 0 & -\sin x \\ -\sin x & 0 & \cos x & 0 \\ 0 & \sin x & 0 & \cos x \end{pmatrix}.$$

## 2.3 Ecuaciones de orden $n$

Recordemos que una **ecuación escalar de orden  $n$  en forma normal** es una relación de la forma

$$\boxed{u^{(n)} = F(x, u, u', \dots, u^{(n-1)})}, \quad (2.45)$$

donde  $x \in \mathbb{R}$ ,  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ . Como ya mencionamos en el capítulo anterior, una ecuación de este tipo es equivalente al sistema de  $n$  ecuaciones de primer orden

$$y' = f(x, y), \quad (2.46)$$

donde  $y \equiv (y_1, \dots, y_n)$  está dado por

$$y = (u, u', \dots, u^{(n-1)}),$$

y

$$f(x, y) = (y_2, \dots, y_n, F(x, y)).$$

Si añadimos a la ecuación (2.45) las condiciones iniciales

$$\boxed{u(x_0) = u_0, u'(x_0) = u_1, \dots, u^{(n-1)}(x_0) = u_{n-1}}, \quad (2.47)$$

donde  $u_i \in \mathbb{R}$ , la correspondiente condición inicial para el sistema (2.46) es

$$y(x_0) = (u_0, u_1, \dots, u_{n-1}).$$

Los teoremas de existencia y unicidad para sistemas de primer orden del capítulo anterior tienen una traducción inmediata al problema de valores iniciales (2.45)-(2.47), ya que  $f$  es continua, derivable, de clase  $C^1$ , o lipschitziana respecto al segundo argumento si  $F$  lo es. Esta última afirmación es evidente para todas las propiedades citadas salvo para la lipschitzianidad, que estableceremos a continuación. En efecto, si  $F$  es lipschitziana respecto a  $y \equiv (u, u', \dots, u^{(n-1)})$  con constante de Lipschitz  $L$ , entonces

$$\begin{aligned}\|f(x, y^1) - f(x, y^2)\|^2 &= \sum_{i=2}^n (y_i^1 - y_i^2)^2 + [F(x, y^1) - F(x, y^2)]^2 \\ &\leq \|y^1 - y^2\|^2 + [F(x, y^1) - F(x, y^2)]^2 \leq (1 + L^2) \|y^1 - y^2\|^2,\end{aligned}$$

y por tanto  $f$  es lipschitziana respecto de  $y$  con constante de Lipschitz  $\sqrt{1+L^2}$ . En definitiva, se verifican los siguientes resultados:

**Teorema 2.17.** Si  $F : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en el abierto  $U$ , entonces para todo  $(x_0, u_0, \dots, u_{n-1}) \in U$  el problema de valores iniciales (2.45)-(2.47) tiene al menos una solución  $u(x)$  definida en un intervalo de la forma  $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ , donde  $\alpha > 0$  depende de  $(x_0, u_0, \dots, u_{n-1})$ .

**Teorema 2.18.** Si  $F : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  y sus derivadas parciales  $\frac{\partial F}{\partial u^{(i)}}$  ( $i = 0, \dots, n-1$ ) respecto de las últimas  $n$  variables son continuas en el abierto  $U$  (en particular, si  $F$  es de clase  $C^1(U)$ ), entonces para todo  $(x_0, u_0, \dots, u_{n-1}) \in U$  el problema de valores iniciales (2.45)-(2.47) tiene solución única en un intervalo de la forma  $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ , donde  $\alpha > 0$  depende de  $(x_0, u_0, \dots, u_{n-1})$ .

**Teorema 2.19.** Si  $F : A \equiv I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (siendo  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo) es continua y lipschitziana respecto de las  $n$  últimas variables  $(u, u', \dots, u^{(n-1)})$  en  $A$ , entonces para todo  $x_0 \in I$  el problema de valores iniciales (2.45)-(2.47) tiene solución única en el intervalo  $I$ .

### 2.3.1 Ecuaciones lineales

Nos centraremos a continuación en el caso en que la función  $F$  en la ecuación (2.45) es lineal (o más propiamente, afín) en  $u$  y sus derivadas, es decir, estudiaremos ecuaciones de la forma

$$u^{(n)} + a_{n-1}(x)u^{(n-1)} + \dots + a_1(x)u' + a_0(x)u = b(x), \quad (2.48)$$

donde las funciones  $a_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 0, \dots, n-1$ ) y  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  son continuas en un intervalo  $I$ . Diremos que la ecuación (2.48) es **homogénea** si  $b \equiv 0$  en  $I$ , e **inhomogénea** o **completa** en caso contrario.

El sistema de primer orden asociado a la ecuación (2.48) es también lineal, ya que está dado por

$$y' = A(x)y + b(x)e_n, \quad (2.49)$$

donde

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) & -a_2(x) & \dots & -a_{n-1}(x) \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

se denomina **matriz compañera** de la ecuación (2.48). Nótese, en particular, que

$$\text{tr } A(x) = -a_{n-1}(x). \quad (2.51)$$

Al ser las entradas de la matriz compañera y  $b(x)$  funciones continuas de  $x$  en el intervalo  $I$ , el Teorema (2.2) garantiza que el problema de valores iniciales (2.48)-(2.47) con  $x_0 \in I$  tiene solución única definida en todo ese intervalo:

**Teorema 2.20.** Si las funciones  $a_i : I \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 0, \dots, n-1$ ) y  $b : I \rightarrow \mathbb{R}$  son continuas en el intervalo  $I$ , el problema de valores iniciales (2.48)-(2.47) posee solución única definida en todo  $I$  para cualquier dato inicial  $(x_0, u_0, \dots, u_{n-1}) \in I \times \mathbb{R}^n$ .

Utilizaremos una notación análoga a la de los sistemas lineales de primer orden, denotando por  $\mathcal{S}$  el conjunto de soluciones en  $I$  de la ecuación (2.48), y por  $\mathcal{S}_0$  el de la correspondiente ecuación homogénea

$$\boxed{u^{(n)} + a_{n-1}(x)u^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)u' + a_0(x)u = 0}. \quad (2.52)$$

Nótese que ambos conjuntos están contenidos en  $C^n(I)$ . Razonando como en el caso de los sistemas de primer orden (cf. Propositiones 2.3 y 2.4) se prueba inmediatamente:

**Proposición 2.21.** *El conjunto  $\mathcal{S}_0$  de soluciones de la ecuación homogénea (2.52) es un espacio vectorial real.*

**Proposición 2.22.** *El conjunto de soluciones de la ecuación inhomogénea (2.48) es el espacio afín*

$$\mathcal{S} = u_p + \mathcal{S}_0,$$

donde  $u_p$  es una solución particular fija de dicha ecuación.

Para determinar la dimensión del espacio  $\mathcal{S}_0$  utilizaremos el siguiente resultado:

**Proposición 2.23.** *Sean  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$  soluciones de la ecuación lineal homogénea (2.52), y denotemos por  $y^i = (\varphi_i, \varphi_i', \dots, \varphi_i^{(n-1)})$ ,  $i = 1, \dots, k$ , las correspondientes soluciones del sistema lineal de primer orden asociado. Entonces*

$$\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\} \text{ linealmente independientes} \iff \{y^1, \dots, y^k\} \text{ linealmente independientes}.$$

*Demostración.* La implicación ( $\Rightarrow$ ) es evidente. En cuanto al recíproco, supongamos que

$$\lambda_1\varphi_1 + \cdots + \lambda_k\varphi_k = 0, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

Derivando  $n - 1$  veces esta igualdad se sigue que

$$\lambda_1 y^1 + \cdots + \lambda_k y^k = 0,$$

y por tanto  $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$ , al ser  $\{y^1, \dots, y^k\}$  linealmente independientes por hipótesis.  $\square$

De la proposición anterior y del Teorema 2.5 se sigue inmediatamente el siguiente corolario:

**Corolario 2.24.** *El espacio  $\mathcal{S}_0$  de soluciones de la ecuación homogénea (2.52) es de dimensión  $n$ .*

**Definición 2.25.** Un **sistema fundamental de soluciones** de la ecuación homogénea (2.52) es una base  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  de su espacio de soluciones  $\mathcal{S}_0$ .

**Comentario.** Si  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  es un sistema fundamental de soluciones de (2.52), entonces cualquier solución  $u$  de dicha ecuación puede expresarse como

$$u(x) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x), \quad c_i \in \mathbb{R}.$$

**Definición 2.26.** Dadas  $n$  soluciones  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  de la ecuación homogénea (2.52), su **wronskiano** se define como el wronskiano de las correspondientes soluciones del sistema lineal asociado, es decir,

$$W[\varphi_1, \dots, \varphi_n](x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \cdots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}. \quad (2.53)$$

*Notación.* Utilizaremos frecuentemente la notación abreviada  $W(x)$  en lugar de  $W[\varphi_1, \dots, \varphi_n](x)$  cuando quede claro por el contexto a qué soluciones  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  nos estamos refiriendo.

Al igual que en el caso de los sistemas lineales de primer orden, mediante el wronskiano es inmediato determinar la independencia lineal de un conjunto de  $n$  soluciones de una ecuación lineal homogénea, de acuerdo con la siguiente proposición:

**Proposición 2.27.** Sean  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  soluciones de la ecuación homogénea (2.52) en el intervalo  $I$ . Entonces  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  son linealmente independientes  $\iff W[\varphi_1, \dots, \varphi_n](x) \neq 0, \forall x \in I$ .

*Demostración.* Si  $y^1, \dots, y^n$  son las soluciones del sistema de primer orden correspondientes a  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ , por las Proposiciones 2.9 y 2.23 se tiene

$$\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \text{ l.i.} \iff \{y^1, \dots, y^n\} \text{ l.i.} \iff W[y^1, \dots, y^n](x) \neq 0, \forall x \in I.$$

Pero, por definición,  $W[y^1, \dots, y^n](x) = W[\varphi_1, \dots, \varphi_n](x)$ .  $\square$

**Comentario 1.** Dadas  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  soluciones de la ecuación (2.52), o bien  $W[\varphi_1, \dots, \varphi_n](x) \neq 0$  para todo  $x \in I$ , o bien  $W[\varphi_1, \dots, \varphi_n](x) = 0$  para todo  $x \in I$ . Luego basta comprobar que  $W[\varphi_1, \dots, \varphi_n](x_0) \neq 0$  en un cierto  $x_0 \in I$  para garantizar la independencia lineal en  $I$  de dichas soluciones.

**Comentario 2.** Sean  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  soluciones de la ecuación (2.52), y sea  $W(x)$  su wronskiano. Como la matriz compañera (2.50) verifica  $\text{tr} A(x) = -a_{n-1}(x)$ , la fórmula de Abel-Liouville (2.14) se reduce a

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^x a_{n-1}(t) dt}, \quad x \in I. \quad (2.54)$$

Nótese que la afirmación del Comentario 1 se sigue directamente de esta fórmula, y que el wronskiano es constante si el coeficiente  $a_{n-1}(x)$  se anula idénticamente en  $I$ .

### 2.3.2 Método de variación de constantes

Al igual que para los sistemas lineales de primer orden, si se conoce un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea (2.52) es posible expresar la solución general de la ecuación inhomogénea (2.48) correspondiente mediante cuadraturas. En efecto, sea  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  un sistema fundamental de soluciones de la ecuación (2.52), y sea  $\Phi(x)$  la correspondiente matriz fundamental del sistema de primer orden asociado, es decir,

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

La solución general del sistema de primer orden (2.49) asociado a la ecuación inhomogénea (2.48) es (ver Ec. (2.15))

$$y(x) = \Phi(x)c + \int^x b(t) \Phi(x) \Phi(t)^{-1} e_n dt, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.55)$$

La solución general de (2.48) es la primera componente del miembro derecho de la última ecuación. Para escribir esta solución más explícitamente, nótese que la primera componente de

$\Phi(x) \Phi(t)^{-1} e_n$  es igual a

$$\sum_{i=1}^n \Phi_{1i}(x) [\Phi(t)^{-1}]_{in} = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) (-1)^{i+n} \frac{M_{ni}(t)}{W(t)} = \frac{1}{W(t)} \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \dots & \varphi_n'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-2)}(t) & \dots & \varphi_n^{(n-2)}(t) \\ \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \end{vmatrix},$$

donde  $M_{ni}(t)$  denota el menor asociado al elemento de matriz  $ni$  de la matriz  $\Phi(t)$ , y la última igualdad se obtiene desarrollando el determinante por la última fila. Sustituyendo la expresión anterior en (2.55) obtenemos la siguiente expresión para la solución general de la ecuación (2.48):

$$u(x) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x) + \int^x \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \dots & \varphi_n'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-2)}(t) & \dots & \varphi_n^{(n-2)}(t) \\ \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \end{vmatrix} \frac{b(t)}{W(t)} dt. \quad (2.56)$$

En particular, para la ecuación lineal de segundo orden

$$u'' + a_1(x) u' + a_0(x) u = b(x) \quad (2.57)$$

se tiene

$$u(x) = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \int^x \frac{b(t)}{W(t)} [\varphi_1(t) \varphi_2(x) - \varphi_2(t) \varphi_1(x)] dt. \quad (2.58)$$

Nótese que la función

$$u_p(x) = \int_{x_0}^x \frac{b(t)}{W(t)} [\varphi_1(t) \varphi_2(x) - \varphi_2(t) \varphi_1(x)] dt \quad (2.59)$$

es una solución particular de la ecuación inhomogénea (2.57) que verifica las condiciones iniciales

$$u_p(x_0) = u_p'(x_0) = 0.$$

**Ejemplo 2.28.** Consideremos la ecuación de segundo orden

$$u'' + \omega^2 u = F(x), \quad \omega > 0, \quad (2.60)$$

que describe el movimiento de un oscilador armónico sometido a una fuerza externa  $F(x)$  (movimiento forzado). Hallemos en primer lugar un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea

$$u'' + \omega^2 u = 0. \quad (2.61)$$

El sistema de primer orden (2.49)-(2.50) asociado es

$$y' = A y \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} y, \quad (2.62)$$

siendo  $y = (u, u')$ . Los autovalores de la matriz  $A$  son las soluciones de la ecuación

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \omega^2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \omega^2 = 0 \iff \lambda = \pm i\omega.$$

Considerando el autovalor  $\lambda = i\omega$ , y tomando como autovector  $v = (1, i\omega)$ , de las ecuaciones (2.35) se sigue inmediatamente que un sistema fundamental de soluciones de (2.62) está dado por

$$y^1(x) = (\cos(\omega x), -\omega \operatorname{sen}(\omega x)), \quad y^2(x) = (\operatorname{sen}(\omega x), \omega \cos(\omega x)).$$

Por tanto un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea (2.61) es

$$\varphi_1(x) = \cos(\omega x), \quad \varphi_2(x) = \operatorname{sen}(\omega x),$$

cuyo wronskiano es

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos(\omega x) & \operatorname{sen}(\omega x) \\ -\omega \operatorname{sen}(\omega x) & \omega \cos(\omega x) \end{vmatrix} = \omega.$$

(Nótese que  $W(x)$  es constante; esto es consecuencia de la fórmula de Abel–Liouville (2.54), ya que en este caso  $a_{n-1} \equiv a_1 = 0$ .) Al ser

$$\varphi_1(t)\varphi_2(x) - \varphi_2(t)\varphi_1(x) = \cos(\omega t)\operatorname{sen}(\omega x) - \operatorname{sen}(\omega t)\cos(\omega x) = \operatorname{sen}\omega(x-t),$$

de la Ec. (2.58) se sigue que la solución general de (2.60) está dada por

$$u(x) = c_1 \cos(\omega x) + c_2 \operatorname{sen}(\omega x) + \frac{1}{\omega} \int_0^x \operatorname{sen}(\omega(x-t)) F(t) dt,$$

que también se puede escribir como

$$u(x) = c_1 \cos(\omega x) + c_2 \operatorname{sen}(\omega x) + \frac{1}{\omega} \int_0^x \operatorname{sen}(\omega s) F(x-s) ds.$$

Supongamos, por ejemplo, que la fuerza externa es de tipo sinusoidal:

$$F(x) = F_0 \operatorname{sen}(\alpha x), \quad \alpha > 0.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_0^x \operatorname{sen}(\omega s) F(x-s) ds &= F_0 \int_0^x \operatorname{sen}(\omega s) \operatorname{sen}(\alpha(x-s)) ds \\ &= \frac{F_0}{2} \int_0^x [\cos((\omega + \alpha)s - \alpha x) - \cos((\omega - \alpha)s + \alpha x)] ds \\ &= \frac{F_0}{2(\omega + \alpha)} (\operatorname{sen}(\omega x) + \operatorname{sen}(\alpha x)) - \frac{F_0}{2} \int_0^x \cos((\omega - \alpha)s + \alpha x) ds. \end{aligned}$$

Si  $\alpha \neq \omega$  (es decir, si la frecuencia de la fuerza externa no es igual a la frecuencia natural del sistema) entonces

$$\int_0^x \cos((\omega - \alpha)s + \alpha x) ds = \frac{1}{\omega - \alpha} [\operatorname{sen}(\omega x) - \operatorname{sen}(\alpha x)].$$

Por tanto la solución general de la ecuación (2.60) es en este caso de la forma

$$u = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \operatorname{sen}(\omega x) + \frac{F_0}{\omega^2 - \alpha^2} \operatorname{sen}(\alpha x),$$

con  $C_1, C_2$  constantes. Todas las soluciones de (2.60), aunque no son periódicas a menos que  $\omega/\alpha \in \mathbb{Q}$ , son en este caso *acotadas*. Por el contrario, si  $\alpha = \omega$  se tiene

$$\int_0^x \cos((\omega - \alpha)s + \alpha x) ds = \int_0^x \cos(\omega x) ds = x \cos(\omega x),$$

y por tanto en este caso la solución de (2.60) es

$$u = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \operatorname{sen}(\omega x) - \frac{F_0}{2\omega} x \cos(\omega x).$$

En particular, en este caso ninguna solución está acotada cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ , debido al último término. Este es el conocido fenómeno de la *resonancia*.



### 2.3.3 Reducción del orden

En general, no es posible calcular un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea (2.52) en forma explícita, es decir, en términos de los coeficientes  $a_i(x)$  y sus primitivas. Sin embargo, en el caso de una ecuación de segundo orden

$$u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u = 0, \quad (2.63)$$

si se conoce una solución no idénticamente nula se puede expresar la solución general mediante cuadraturas. En efecto, si  $\varphi(x)$  es una solución particular no trivial de la ecuación (2.63), y denotamos por  $u(x)$  una solución cualquiera de dicha ecuación, de la fórmula de Abel-Liouville (2.54) se sigue que

$$\varphi(x)u' - \varphi'(x)u = k e^{-\int_{x_0}^x a_1(s) ds},$$

siendo  $k = W[\varphi, u](x_0)$ . Integrando esta ecuación diferencial de primer orden para  $u$  obtenemos fácilmente la siguiente expresión de la solución general de (2.63):

$$u(x) = c\varphi(x) + k\varphi(x) \int_{x_0}^x \frac{e^{-\int_{x_0}^t a_1(s) ds}}{\varphi^2(t)} dt.$$

Por tanto,  $\varphi(x)$  y la nueva solución

$$\psi(x) = \varphi(x) \int_{x_0}^x \frac{e^{-\int_{x_0}^t a_1(s) ds}}{\varphi^2(t)} dt \quad (2.64)$$

forman un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea (2.63), ya que (por construcción)  $W[\varphi, \psi](x_0) = 1 \neq 0$ .

En el caso de la ecuación homogénea (2.52) de orden  $n > 2$ , el conocimiento de una solución particular no trivial  $\varphi(x)$  permite reducir dicha ecuación a otra ecuación lineal homogénea de orden  $n - 1$  mediante el cambio de variable

$$z = \left( \frac{u}{\varphi(x)} \right)'. \quad (2.65)$$

Por ejemplo, supongamos que  $\varphi(x) \neq 0$  es una solución particular de la ecuación de tercer orden

$$u''' + a_2(x)u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u = 0, \quad (2.66)$$

Escribiendo el cambio de variable (2.65) como  $u = \varphi(x) \int^x z$ , obtenemos

$$u' = \varphi'(x) \int^x z + \varphi(x)z,$$

$$u'' = \varphi''(x) \int^x z + 2\varphi'(x)z + \varphi(x)z',$$

$$u''' = \varphi'''(x) \int^x z + 3\varphi''(x)z + 3\varphi'(x)z' + \varphi(x)z''.$$

Sustituyendo estas expresiones en (2.63), y teniendo en cuenta que  $\varphi(x)$  es solución de dicha ecuación, se obtiene la siguiente ecuación de segundo orden para  $z$ :

$$\varphi(x)z'' + [3\varphi'(x) + a_2(x)\varphi(x)]z' + [3\varphi''(x) + 2a_2(x)\varphi'(x) + a_1(x)\varphi(x)]z = 0.$$

En general, se puede probar (ver L. Elsgoltz, *Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional*, Ed. URSS, Moscú, 1994) que si se conocen  $k$  soluciones linealmente independientes de una ecuación lineal homogénea de orden  $n$ , se puede transformar dicha ecuación en una ecuación lineal homogénea de orden  $n - k$  aplicando sucesivamente cambios de variable de la forma (2.65). En particular, si se conocen  $n - 1$  soluciones de la ecuación (2.52), es posible expresar su solución general en términos de cuadraturas tras reducirla a una ecuación lineal de primer orden mediante este procedimiento.

## 2.4 Ecuaciones de orden $n$ con coeficientes constantes

Un caso particular de gran interés práctico para el que es posible encontrar la solución general de la ecuación lineal (2.48) es aquél en que los coeficientes  $a_i(x)$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ , son constantes, es decir,

$$\boxed{u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \dots + a_1u' + a_0u = b(x)}, \quad a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}. \quad (2.67)$$

Consideremos en primer lugar la correspondiente ecuación homogénea

$$\boxed{u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \dots + a_1u' + a_0u = 0}, \quad (2.68)$$

cuya matriz compañera es la matriz constante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (2.69)$$

El polinomio característico de  $A$  se calcula fácilmente desarrollando  $\det(\lambda - A)$  por la última fila, obteniéndose

$$p_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 \equiv p(\lambda). \quad (2.70)$$

El polinomio  $p(\lambda)$  se denomina **polinomio característico** de la ecuación (2.68). Las raíces del polinomio característico  $p(\lambda)$  son por tanto los autovalores de la matriz compañera  $A$ . Se puede probar (cf. Lema 2.44 de la página 66) que para una matriz de la forma (2.69) el índice de cualquier autovalor coincide con su multiplicidad algebraica, y por tanto para cada autovalor hay un sólo bloque de Jordan elemental. Teniendo en cuenta este hecho y utilizando las ecuaciones (2.37) es posible determinar la forma de las soluciones del sistema de primer orden  $y' = Ay$  asociado a la ecuación (2.68), de donde se obtiene fácilmente la solución general de dicha ecuación. Sin embargo, en la práctica resulta más fácil estudiar directamente la ecuación (2.68), como haremos a continuación.

Comencemos escribiendo la ecuación (2.68) en la forma

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0)u \equiv p(D)u = 0, \quad D \equiv \frac{d}{dx}.$$

De la igualdad

$$(D - \lambda)(f(x)e^{\lambda x}) = f'(x)e^{\lambda x},$$

se sigue inmediatamente que

$$(D - \lambda)^k(f(x)e^{\lambda x}) = f^{(k)}(x)e^{\lambda x}. \quad (2.71)$$

Supongamos que el polinomio característico  $p(\lambda)$  se factoriza como

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \dots (\lambda - \lambda_m)^{r_m}, \quad r_1 + \dots + r_m = n,$$

donde las raíces  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , en general complejas, son distintas entre sí. Si  $\lambda_i$  es una de estas raíces podemos por tanto escribir

$$p(\lambda) = q(\lambda)(\lambda - \lambda_i)^{r_i},$$

siendo  $q(\lambda)$  un polinomio de grado  $n - r_i$  con  $q(\lambda_i) \neq 0$ . Luego  $p(D) = q(D)(D - \lambda_i)^{r_i}$ , y de la Ec. (2.71) se sigue entonces que

$$p(D)(x^k e^{\lambda_i x}) = q(D) \left[ e^{\lambda_i x} \frac{d^{r_i}}{dx^{r_i}} x^k \right] = 0, \quad k = 0, 1, \dots, r_i - 1.$$

Esto demuestra que las funciones

$$\boxed{x^k e^{\lambda_i x}, \quad i = 1, \dots, m, \quad k = 0, 1, \dots, r_i - 1}, \quad (2.72)$$

son solución de la ecuación (2.68). Como hay precisamente  $r_1 + \dots + r_m = n$  soluciones de este tipo, para probar que forman un sistema fundamental de soluciones basta comprobar su independencia lineal.

**Lema 2.29.** *Las funciones (2.72) son linealmente independientes.*

*Demostración.* Supongamos que

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{r_i-1} c_{ik} x^k e^{\lambda_i x} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (2.73)$$

donde los coeficientes  $c_{ik}$  son constantes complejas. Podemos reescribir esta igualdad como

$$P_1(x) e^{\lambda_1 x} + \dots + P_m(x) e^{\lambda_m x} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (2.74)$$

siendo  $P_i(x) = \sum_{k=0}^{r_i-1} c_{ik} x^k$  un polinomio de grado menor o igual que  $r_i - 1$ . Para demostrar que todos los coeficientes  $c_{ik}$  de la ecuación (2.73) son nulos, basta probar que los polinomios  $P_i$  se anulan idénticamente. Para establecer este resultado, comencemos multiplicando la ecuación (2.74) por  $e^{-\lambda_1 x}$ , obteniendo

$$P_1(x) + P_2 e^{\mu_2 x} + \dots + P_m(x) e^{\mu_m x} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (2.75)$$

donde los exponentes  $\mu_i \equiv \lambda_i - \lambda_1 \neq 0$  son todos distintos entre sí. Derivando esta ecuación  $r_1$  veces se obtiene

$$Q_2(x) e^{\mu_2 x} + \dots + Q_m(x) e^{\mu_m x} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (2.76)$$

donde  $Q_i$  es un polinomio del mismo grado que  $P_i$ . Repitiendo este procedimiento sucesivas veces se llega finalmente a una ecuación del tipo

$$R_m(x) e^{\nu_m x} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (2.77)$$

donde  $R_m$  es un polinomio del mismo grado que  $P_m$ . De esta condición se sigue inmediatamente que  $R_m \equiv 0$ , lo cual implica que  $P_m \equiv 0$  (al ser  $\deg P_m = \deg R_m$ ). Como el orden de las raíces  $\lambda_i$  es irrelevante para el argumento anterior, concluimos que todos los polinomios  $P_i$  se anulan idénticamente.  $\square$

La discusión anterior y el Lema 2.29 prueban por tanto el siguiente teorema:

**Teorema 2.30.** *Las funciones (2.72), donde  $r_i$  es la multiplicidad de la raíz  $\lambda_i$  del polinomio característico (2.70), constituyen un sistema fundamental de soluciones de la ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes (2.68).*

**Comentario.** Si la raíz  $\lambda_j = a_j + ib_j$  es compleja, podemos sustituir las  $2r_j$  soluciones complejas

$$x^k e^{a_j x} e^{\pm i b_j x}, \quad k = 0, 1, \dots, r_j - 1,$$

asociadas a las raíces  $\lambda_j$  y  $\bar{\lambda}_j$  del polinomio característico por las  $2r_j$  soluciones reales

$$\boxed{x^k e^{a_j x} \cos(b_j x), \quad x^k e^{a_j x} \operatorname{sen}(b_j x) \quad k = 0, 1, \dots, r_j - 1},$$

que se obtienen al considerar la parte real y la parte imaginaria de las soluciones correspondientes a la raíz  $\lambda_j$  (o  $\bar{\lambda}_j$ ).

**Ejemplo 2.31.** Hallemos la solución general de la ecuación de cuarto orden con coeficientes constantes

$$u^{(4)} + u''' + u' + u = 0. \quad (2.78)$$

El polinomio característico asociado a esta ecuación es

$$p(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda + 1 = (\lambda + 1)^2(\lambda^2 - \lambda + 1). \quad (2.79)$$

Las raíces son por tanto  $\lambda_1 = -1$  (de multiplicidad  $r_1 = 2$ ) y las dos raíces de la ecuación

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0,$$

es decir

$$\lambda_{2,3} = \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3}),$$

de multiplicidad  $r_2 = r_3 = 1$ . La solución general de la ecuación (2.78) es por tanto

$$u(x) = e^{-x}(c_1 + c_2 x) + e^{\frac{x}{2}} \left[ c_3 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_4 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right], \quad (2.80)$$

con  $c_1, \dots, c_4$  constantes arbitrarias.

### 2.4.1 Método de los coeficientes indeterminados

Una vez hallado un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea (2.68), se puede calcular la solución general de la ecuación inhomogénea (2.67) para cualquier función  $b(x)$  utilizando el método de variación de constantes (ver la Ec. (2.56)). Sin embargo, para ciertas formas sencillas de la función  $b(x)$  que se presentan frecuentemente en la práctica, el **método de los coeficientes indeterminados** que describiremos a continuación permite calcular una solución particular de (2.67) de manera más rápida. La solución general de (2.67) se halla entonces sumando a esta solución particular la solución general de la correspondiente ecuación homogénea.

Supongamos, en primer lugar, que

$$b(x) = q(x)e^{\mu x}, \quad (2.81)$$

donde  $q(x)$  es un polinomio. Si  $r$  es la multiplicidad de  $\mu$  como raíz del polinomio característico (2.70) de la ecuación homogénea (2.68), entonces

$$p(\lambda) = p_0(\lambda - \mu)^r + p_1(\lambda - \mu)^{r+1} + \dots + p_{n-r-1}(\lambda - \mu)^{n-1} + (\lambda - \mu)^n,$$

con  $p_0, \dots, p_{n-r-1} \in \mathbb{R}$  (ó  $\mathbb{C}$ , si  $\mu$  es complejo) y  $p_0 \neq 0$ . Nótese que esta expresión es válida también si  $\mu$  no es raíz del polinomio característico, siendo en este caso  $r = 0$ . De la expresión anterior y la Ec. (2.71) se sigue que

$$p(D)(f(x)e^{\mu x}) = \left[ p_0 f^{(r)}(x) + p_1 f^{(r+1)}(x) + \dots + p_{n-r-1} f^{(n-1)}(x) + f^{(n)}(x) \right] e^{\mu x}.$$

Esto sugiere probar una solución particular de la forma

$$u_p(x) = x^r Q(x) e^{\mu x}, \quad (2.82)$$

donde

$$Q(x) = Q_0 + Q_1 x + \cdots + Q_d x^d, \quad d = \deg q \quad (2.83)$$

es un polinomio que se determina mediante la condición

$$p_0(x^r Q)^{(r)} + p_1(x^r Q)^{(r+1)} + \cdots + p_{n-r-1}(x^r Q)^{(n-1)} + (x^r Q)^{(n)} = q. \quad (2.84)$$

Puede probarse que la última ecuación proporciona un sistema lineal de  $d + 1$  ecuaciones en los  $d + 1$  coeficientes de  $Q$  que siempre es compatible. Por tanto, la ecuación (2.67) con el término inhomogéneo (2.81) siempre tiene una solución particular de la forma (2.82)-(2.83) (siendo  $r$  la multiplicidad de  $\mu$  como raíz del polinomio característico), donde el polinomio  $Q$  se determina mediante la ecuación (2.84), o bien directamente sustituyendo (2.82)-(2.83) en (2.67).

**Ejemplo 2.32.** Halle una solución particular de la ecuación

$$u^{(4)} + u''' + u' + u = x e^{-x}. \quad (2.85)$$

Aquí  $\mu = -1$  es una raíz del polinomio característico de la ecuación homogénea de multiplicidad 2 (ver la Ec. (2.79) en el Ejemplo 2.31), y  $q(x) = x$  es un polinomio de grado 1. Buscamos por tanto una solución particular de la forma

$$u_p(x) = x^2(a + bx)e^{-x}.$$

Para calcular  $p(D)u_p$  es conveniente desarrollar  $p(D)$  en potencias de  $D + 1$ , ya que en virtud de la Ec. (2.71) se tiene  $(D + 1)^k(f(x)e^{-x}) = f^{(k)}(x)e^{-x}$ . Utilizando la fórmula de Taylor para desarrollar el factor  $\lambda^2 - \lambda + 1$  en potencias de  $\lambda + 1$  obtenemos

$$p(\lambda) = (\lambda + 1)^2[3 - 3(\lambda + 1) + (\lambda + 1)^2].$$

Por tanto

$$p(D)u_p = [3(2a + 6bx) - 3 \cdot 6b]e^{-x} = x e^{-x} \iff 3(2a + 6bx) - 18b = x,$$

lo que conduce a las ecuaciones

$$6a - 18b = 0, \quad 18b = 1.$$

La solución particular buscada es por tanto

$$u_p(x) = \frac{1}{18}(x^3 + 3x^2)e^{-x}. \quad (2.86)$$

La solución general de la ecuación (2.85) es la suma de esta solución particular y la solución general (2.80) de la ecuación homogénea.

**Ejemplo 2.33.** Consideremos ahora la ecuación

$$u^{(4)} + 4u = x(1 + e^x \cos x). \quad (2.87)$$

El polinomio característico de la ecuación homogénea es

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 4,$$

cuyas raíces  $\lambda_k$  son las raíces cuartas de  $-4$ :

$$\lambda_k = \sqrt[4]{2} e^{i(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2})}, \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

es decir,

$$\lambda_0 = 1 + i, \quad \lambda_1 = -1 + i, \quad \lambda_2 = -1 - i, \quad \lambda_3 = 1 - i.$$

Por tanto la solución general de la ecuación homogénea está dada por

$$u_h(x) = e^x(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x) + e^{-x}(c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x), \quad c_i \in \mathbb{R}. \quad (2.88)$$

Aparentemente no se puede aplicar el método de los coeficientes indeterminados a la Ec. (2.87), al no ser el término inhomogéneo de la forma (2.81). Sin embargo, como el miembro derecho de (2.87) es la suma de los términos

$$b_1(x) = x, \quad b_2(x) = xe^x \cos x,$$

la suma de sendas soluciones particulares  $u_i(x)$  de las ecuaciones

$$u^{(4)} + 4u = b_i(x), \quad i = 1, 2, \quad (2.89)$$

es (por linealidad) una solución particular de (2.87). El término inhomogéneo de la primera de estas ecuaciones es directamente de la forma (2.81), con  $q(x) = x$  y  $\mu = 0$ . Como 0 no es una raíz del polinomio característico, buscamos una solución particular de la forma  $u_1(x) = a + bx$ . Sustituyendo en la correspondiente ecuación completa (2.89) obtenemos inmediatamente

$$u_1(x) = \frac{x}{4}.$$

Por otro lado, al ser  $b_2(x) = \operatorname{Re}(xe^{(1+i)x})$ , podemos buscar una solución particular de la segunda ecuación (2.89) de la forma  $u_2(x) = \operatorname{Re} u(x)$ , donde  $u(x)$  es cualquier solución de la ecuación

$$u^{(4)} + 4u = xe^{(1+i)x}. \quad (2.90)$$

El miembro derecho de esta ecuación es de nuevo de la forma (2.81), con  $q(x) = x$  y  $\mu = 1 + i$  raíz simple del polinomio característico, por lo que ensayamos una solución particular de la forma

$$u(x) = x(a + bx)e^{(1+i)x} \equiv f(x)e^{\mu x}.$$

Sustituyendo en (2.90) y utilizando la regla de Leibniz generalizada

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

se obtiene

$$\mu^4 e^{\mu x} f + 4\mu^3 e^{\mu x} f' + 6\mu^2 e^{\mu x} f'' + 4e^{\mu x} f = xe^{\mu x} \iff 4\mu^3(a + 2bx) + 6\mu^2 \cdot 2b = x,$$

donde hemos tenido en cuenta que  $\mu^4 = -4$ . Por tanto

$$\begin{cases} 8\mu^3 b = 1 \\ \mu a + 3b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} b = \frac{1}{8\mu^3} = \frac{\mu}{-32} = -\frac{1}{32}(1+i) \\ a = -\frac{3b}{\mu} = \frac{3}{32} \end{cases}$$

y entonces

$$u(x) = \frac{x}{32} [3 - (1+i)x] e^{(1+i)x}.$$

Tomando la parte real de esta función se obtiene

$$u_2(x) = \frac{x}{32} e^x [(3-x) \cos x + x \operatorname{sen} x].$$

Por tanto la ecuación inhomogénea (2.87) admite la solución particular

$$u_p(x) = u_1(x) + u_2(x) = \frac{x}{4} + \frac{x}{32} e^x [(3-x) \cos x + x \operatorname{sen} x].$$

La solución general de la ecuación (2.87) es la suma de esta solución particular y la solución general (2.88) de la ecuación homogénea.

**Comentario.** En general, el método de los coeficientes indeterminados se puede aplicar a la ecuación (2.67) si el término inhomogéneo es de la forma

$$b(x) = \sum_{i=1}^l b_i(x), \quad (2.91)$$

donde

$$b_i(x) = e^{\alpha_i x} [q_i(x) \cos(\beta_i x) + \tilde{q}_i(x) \operatorname{sen}(\beta_i x)], \quad (2.92)$$

siendo  $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$  ( $\beta_i \geq 0$ ), y  $q_i, \tilde{q}_i$  polinomios. Nótese que si  $\beta_i = 0$  la función  $b_i(x)$  es de la forma (2.81) con  $\mu = \alpha_i$ . Se puede comprobar que la ecuación (2.67) con el término inhomogéneo (2.91)-(2.92) posee una solución particular del tipo

$$u_p(x) = \sum_{i=1}^l u_i(x), \quad (2.93)$$

donde

$$u_i(x) = x^{r_i} e^{\alpha_i x} [Q_i(x) \cos(\beta_i x) + \tilde{Q}_i(x) \operatorname{sen}(\beta_i x)], \quad (2.94)$$

siendo  $r_i$  la multiplicidad de  $\mu_i = \alpha_i + i\beta_i$  como raíz del polinomio característico de la ecuación homogénea, y  $Q_i, \tilde{Q}_i$  polinomios tales que  $\deg Q_i, \deg \tilde{Q}_i \leq \max(\deg q_i, \deg \tilde{q}_i)$ .

## 2.5 Estabilidad

Consideremos el problema de valores iniciales para un sistema (no necesariamente lineal) de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = \eta. \end{cases} \quad (2.95)$$

Supongamos que para  $\eta = y_0$  el problema (2.95) tiene una solución *única* en la semirrecta  $[x_0, \infty)$ , que denotaremos por  $y(x; y_0)$ .

**Definición 2.34.** Diremos que la solución  $y(x; y_0)$  es **estable** si

- i) Existe  $R > 0$  tal que si  $\|\eta - y_0\| < R$  el problema (2.95) tiene una solución única  $y(x; \eta)$  en el intervalo  $[x_0, \infty)$ .

ii) Para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $0 < \delta < R$  tal que

$$\boxed{\|\eta - y_0\| < \delta \implies \|y(x; \eta) - y(x; y_0)\| < \varepsilon, \quad \forall x \geq x_0}. \quad (2.96)$$

Se dice que la solución  $y(x; y_0)$  es **inestable** si no es estable. Por último, diremos que la solución  $y(x; y_0)$  es **asintóticamente estable** si es estable, y además cumple

iii) Existe  $0 < r < R$  tal que

$$\boxed{\|\eta - y_0\| < r \implies \lim_{x \rightarrow \infty} \|y(x; \eta) - y(x; y_0)\| = 0}. \quad (2.97)$$

*Nota.* En general, la condición iii) no basta por si sólo para garantizar la estabilidad asintótica de la solución  $y(x; y_0)$ , ya que dicha condición en general *no* implica ii). Sin embargo, si el sistema (2.95) es lineal, veremos que cualquier solución  $y(x; y_0)$  que cumpla iii) es asintóticamente estable.

**Comentario.** Gráficamente, la estabilidad de la solución  $y(x; y_0)$  significa que para cualquier  $\varepsilon > 0$ , podemos encontrar un  $\delta > 0$  suficientemente pequeño tal que las soluciones que parten de la bola  $B_\delta(y_0)$  en el instante  $x_0$  permanecen en cada instante posterior  $x$  dentro de la bola de radio  $\varepsilon$  centrada en  $y(x; y_0)$  (ver Figura 2.1). Si además existe  $r > 0$  tal que todas las soluciones que parten de  $B_r(y_0)$  para  $x = x_0$  tienden a la solución  $y(x; y_0)$  cuando  $x \rightarrow \infty$  entonces  $y(x; y_0)$  es asintóticamente estable (cf. Fig. 2.1).

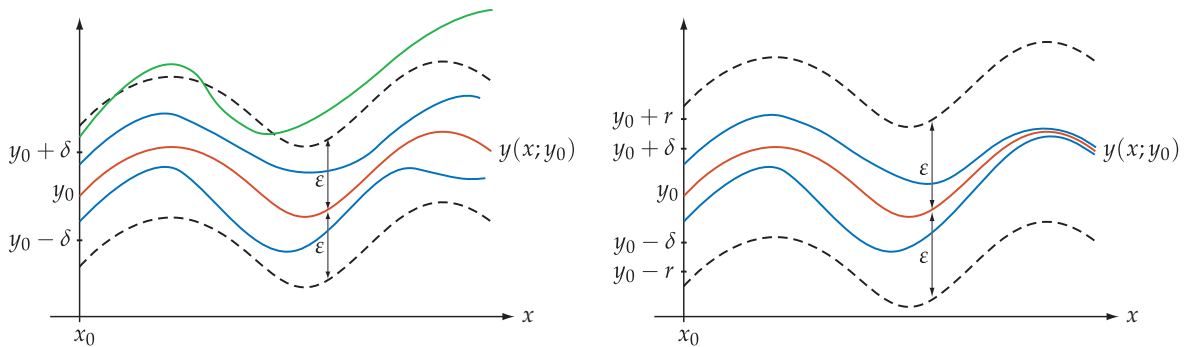


Figura 2.1: Izquierda: solución  $y(x; y_0)$  estable. Derecha: solución  $y(x; y_0)$  asintóticamente estable.

En general, la estabilidad es una propiedad de cada solución  $y(x; y_0)$  del sistema (2.95), es decir, un mismo sistema puede tener a la vez soluciones estables e inestables. Así, en el Ejemplo 1.26 del capítulo anterior (pág. 26), la solución constante  $y = 0$  es asintóticamente estable, mientras que la otra solución constante  $y = 1$  es inestable. A continuación veremos que los sistemas lineales son de nuevo especiales a este respecto, ya que para ellos *todas* las soluciones tienen el mismo tipo de estabilidad.

**Proposición 2.35.** Si  $A : \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  y  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  son continuas en el intervalo  $[x_0, \infty)$ , una solución cualquiera del sistema lineal

$$y' = A(x)y + b(x) \quad (2.98)$$

es estable o asintóticamente estable si y sólo si lo es la solución trivial  $y \equiv 0$  del sistema homogéneo asociado.



*Demostración.* Al ser  $A$  y  $b$  continuas en  $[x_0, \infty)$ , el Teorema 2.2 garantiza que el sistema (2.98) tiene una única solución  $y(x; \eta)$  definida en  $[x_0, \infty)$  que verifica la condición inicial  $y(x_0; \eta) = \eta$ , cualquiera que sea  $\eta \in \mathbb{R}^n$ . Análogamente, el sistema homogéneo  $y' = A(x)y$  tiene una única solución  $y_h(x; \eta)$  en  $[x_0, \infty)$  que cumple  $y_h(x_0; \eta) = \eta$ . Entonces, la función  $y(x; \eta) - y(x; y_0)$  es solución del sistema homogéneo con dato inicial

$$y(x_0; \eta) - y(x_0; y_0) = \eta - y_0.$$

De la unicidad de las soluciones de dicho sistema en el intervalo  $[x_0, \infty)$  se sigue que

$$y(x; \eta) - y(x; y_0) = y_h(x; \eta - y_0).$$

De esta igualdad se obtiene fácilmente el enunciado.  $\square$

Este resultado justifica la siguiente definición:

**Definición 2.36.** Se dice que el sistema lineal (2.98) es **estable** (resp. **asintóticamente estable**) si *todas* sus soluciones son estables (resp. asintóticamente estables), o equivalentemente, si la solución trivial del sistema homogéneo asociado es estable (resp. asintóticamente estable). El sistema (2.98) es **inestable** si no es estable.

**Comentario.** Nótese que el sistema (2.98) tiene el mismo tipo de estabilidad que el sistema homogéneo asociado.

El siguiente resultado relaciona la estabilidad de un sistema homogéneo con la acotación de sus soluciones en el intervalo  $[x_0, \infty)$ .

**Proposición 2.37.** *El sistema lineal homogéneo*

$$y' = A(x)y, \quad (2.99)$$

*con  $A$  continua en  $[x_0, \infty)$ , es estable si y sólo si todas sus soluciones están acotadas en dicho intervalo.*

*Demostración.*

$\Rightarrow$ ) Si el sistema es estable también lo es la solución trivial, y por tanto existe  $\delta > 0$  tal que (por ejemplo)

$$\|\eta\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|y(x; \eta)\| < 1, \quad \forall x \geq x_0.$$

Entonces para todo  $x \geq x_0$  se tiene

$$\|y(x; y_0)\| = \left\| y\left(x; \frac{\delta y_0}{1 + \|y_0\|} \frac{1 + \|y_0\|}{\delta}\right) \right\| = \frac{1 + \|y_0\|}{\delta} \left\| y\left(x; \frac{\delta y_0}{1 + \|y_0\|}\right) \right\| < \frac{1 + \|y_0\|}{\delta}.$$

$\Leftarrow$ ) Si todas las soluciones están acotadas para  $x \geq x_0$  se tiene

$$\|y(x; e_i)\| < M_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Luego

$$\|y(x; \eta)\| = \left\| \sum_{i=1}^n \eta_i y(x; e_i) \right\| \leq \sum_{i=1}^n |\eta_i| M_i \leq \left( \sum_{i=1}^n M_i \right) \|\eta\| \equiv M \|\eta\|, \quad \forall x \geq x_0.$$

Dado  $\varepsilon > 0$  basta tomar  $\delta < \varepsilon/M$  en la definición de estabilidad para comprobar que la solución trivial del sistema, y por tanto el propio sistema, es estable.  $\square$

**Comentario.** Si el sistema homogéneo (2.99) es estable y la función matricial  $A$  es continua en  $\mathbb{R}$ , de modo que las soluciones están definidas en todo  $\mathbb{R}$ , dichas soluciones no tienen por qué estar acotadas en el intervalo  $(-\infty, x_0]$ .

El siguiente resultado caracteriza la estabilidad asintótica de un sistema homogéneo en términos del comportamiento de sus soluciones cuando  $x \rightarrow \infty$ .

**Proposición 2.38.** *El sistema lineal homogéneo (2.99) es asintóticamente estable si y sólo si todas sus soluciones tienden a cero cuando  $x \rightarrow \infty$ .*

*Demostración.*

$\Rightarrow$ ) Si el sistema es asintóticamente estable también lo es la solución trivial, y por tanto existe  $r > 0$  tal que

$$\|\eta\| < r \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y(x; \eta) = 0. \quad (2.100)$$

Dado  $y_0 \in \mathbb{R}^n$ , procediendo como en la proposición anterior se demuestra que

$$y(x; y_0) = \frac{1 + \|y_0\|}{r} y(x; \eta), \quad \eta = \frac{ry_0}{1 + \|y_0\|}.$$

Al ser  $\|\eta\| < r$ , de (2.100) se sigue inmediatamente que  $y(x; y_0) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow \infty$ .

$\Leftarrow$ ) En primer lugar, si todas las soluciones de (2.99) tienden a cero cuando  $x \rightarrow \infty$ , entonces están acotadas en el intervalo  $[x_0, \infty)$ , y por tanto el sistema es estable en virtud de la proposición anterior. Además, la condición  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x; y_0) = 0$  implica que la solución trivial es asintóticamente estable. Por la Proposición 2.35, el sistema es asintóticamente estable.  $\square$

La Proposición 2.37 no es cierta para sistemas más generales, ni siquiera para sistemas lineales inhomogéneos. La siguiente proposición resume la relación entre la acotación de las soluciones y la estabilidad de un sistema lineal inhomogéneo.

**Proposición 2.39.** *Sea el sistema*

$$y' = A(x)y + b(x), \quad (2.101)$$

con  $A : \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  y  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  continuas en  $[x_0, \infty)$ . Entonces:

- i) Si el sistema (2.101) es estable, entonces o bien todas las soluciones están acotadas en  $[x_0, \infty)$ , o bien ninguna lo está.
- ii) Si todas las soluciones de (2.101) están acotadas en  $[x_0, \infty)$ , entonces el sistema es estable.

*Demostración.*

- i) Basta tener en cuenta que  $y(x; y_0) = y_h(x; y_0) + y(x; 0)$  y que  $y_h(x; y_0)$  está acotada en  $[x_0, \infty)$  al ser estable el sistema homogéneo asociado.
- ii) Si todas las soluciones del sistema (2.101) están acotadas en  $[x_0, \infty)$ , entonces también lo están las del sistema homogéneo asociado, ya que cualquier solución de este sistema es la diferencia de dos soluciones del sistema (2.101). Por la proposición anterior el sistema homogéneo es estable, y por tanto también lo es el sistema inhomogéneo.

$\square$

### 2.5.1 Sistemas con coeficientes constantes

Consideremos a continuación el sistema lineal

$$y' = Ay + b(x), \quad A \in M_n(\mathbb{R}), \quad (2.102)$$

con  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua en  $[x_0, \infty)$ , cuya estabilidad es la misma que la del sistema homogéneo asociado

$$y' = Ay. \quad (2.103)$$

En el siguiente teorema caracterizaremos la estabilidad de cualquiera de estos dos sistemas en términos de los autovalores de la matriz  $A$ .

**Teorema 2.40.**

- i) Si todos los autovalores de  $A$  tienen parte real negativa, el sistema (2.102) es asintóticamente estable.
- ii) Si algún autovalor de  $A$  tiene parte real positiva, el sistema (2.102) es inestable.
- iii) Si todos los autovalores de  $A$  tienen parte real no positiva, el sistema (2.102) es estable (pero no asintóticamente estable) si los índices de todos los autovalores con parte real nula son iguales a uno, e inestable en caso contrario.

*Demostración.* Según se vio en la demostración del Teorema 2.12, la solución general de (2.103) se puede escribir en la forma

$$y(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{n_i-1} v_{ik} x^k e^{\lambda_i x}, \quad (2.104)$$

donde  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$  son los autovalores de la matriz  $A$ ,  $n_i$  es el índice del autovalor  $\lambda_i$ , y  $v_{ik} \in \mathbb{C}^n$ . Los vectores  $v_{ik}$  con  $k = 0, \dots, n_i - 1$  son reales si el autovalor  $\lambda_i$  es real, y  $v_{ik} = \bar{v}_{jk}$  para  $k = 0, \dots, n_i - 1 = n_j - 1$  si  $\lambda_i = \bar{\lambda}_j$  es un par de autovalores complejos conjugados. Aplicando la desigualdad triangular de la norma y la identidad  $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$  a (2.104) se obtiene inmediatamente la acotación

$$\|y(x)\| \leq \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{n_i-1} \|v_{ik}\| |x|^k e^{(\operatorname{Re} \lambda_i)x}, \quad (2.105)$$

donde la norma de un vector complejo se define en (2.28).

i) Supongamos, en primer lugar, que  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$  para  $i = 1, \dots, m$ . De la desigualdad anterior se sigue entonces que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \|y(x)\| = 0,$$

y por tanto el sistema (2.102) es asintóticamente estable en virtud de la Proposición 2.38.

ii) Supongamos a continuación que  $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$  para algún  $i = 1, \dots, m$ . Entonces (2.103) tiene una solución no trivial de la forma

$$y(x) = e^{(\operatorname{Re} \lambda_i)x} [\cos(\operatorname{Im} \lambda_i x) \operatorname{Re} v - \operatorname{sen}(\operatorname{Im} \lambda_i x) \operatorname{Im} v],$$

donde  $v \in \mathbb{C}^n$  es un autovector de  $A$  de autovalor  $\lambda_i$ , que no está acotada en ningún intervalo del tipo  $[x_0, \infty)$  al ser  $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$ . Luego el sistema homogéneo (2.103), y por tanto también (2.102), es inestable por la Proposición 2.37.

iii) Supongamos, por último, que  $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$  para  $i = 1, \dots, j$ , y  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$  para  $i = j + 1, \dots, m$ . Si además  $n_i = 1$  para todo  $i = 1, \dots, j$ , entonces la desigualdad (2.105) se reduce a

$$\|y(x)\| \leq \sum_{i=1}^j \|v_{i0}\| + \sum_{i=j+1}^m \sum_{k=0}^{n_i-1} \|v_{ik}\| |x|^k e^{(\operatorname{Re} \lambda_i)x}, \quad (2.106)$$

que está acotada en el intervalo  $[x_0, \infty)$ . Por la Proposición 2.37 el sistema (2.103) es estable. Sin embargo, la Proposición 2.38 implica que dicho sistema no es asintóticamente estable, al poseer soluciones no triviales de la forma

$$y(x) = \cos(\operatorname{Im} \lambda_i x) \operatorname{Re} v - \operatorname{sen}(\operatorname{Im} \lambda_i x) \operatorname{Im} v, \quad i = 1, \dots, j,$$

siendo  $v$  autovector de  $A$  con autovalor  $\lambda_i$ , que no tienden a cero cuando  $x \rightarrow \infty$ . Luego en este caso el sistema inhomogéneo (2.102) es estable pero no asintóticamente estable.

Por último, si  $n_i > 1$  para algún  $i \in \{1, \dots, j\}$ , entonces (2.103) posee soluciones de la forma

$$y(x) = \sum_{l=0}^{n_i-1} \frac{x^l}{l!} [\cos(\operatorname{Im} \lambda_i x) \operatorname{Re} v_{l+1} - \operatorname{sen}(\operatorname{Im} \lambda_i x) \operatorname{Im} v_{l+1}]$$

(cf. Ec. (2.39)) que no están acotadas en  $[x_0, \infty)$ . Luego en este caso el sistema (2.103) (y por tanto también (2.102)) es inestable.  $\square$

**Ejemplo 2.41.** Estudiemos la estabilidad del sistema

$$\begin{cases} y_1' = -y_2 \\ y_2' = y_1 \\ y_3' = -y_4 \\ y_4' = 2y_1 + y_3. \end{cases} \quad (2.107)$$

La matriz de coeficientes es en este caso

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico es

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ -2 & 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 + 1)^2,$$

y por tanto los autovalores son

$$\lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i,$$

ambos de multiplicidad algebraica 2. Por el Teorema 2.40 el sistema (2.107) no puede ser asintóticamente estable, y será estable sólo si el índice de cada uno de los autovalores es 1, es decir, si el polinomio mínimo de  $A$  es

$$\phi_A(t) = (t - i)(t + i) = t^2 + 1. \quad (2.108)$$

Como

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \neq -\mathbb{1},$$

el polinomio mínimo de  $A$  no está dado por (2.108), y por tanto el sistema es inestable.

Otra forma de llegar a este resultado es recordar que el índice de un autovalor es 1 si y sólo la multiplicidad algebraica de dicho autovalor coincide con la geométrica. Comprobemos (por ejemplo) que la multiplicidad geométrica  $s_1$  del autovalor  $\lambda_1 = i$  es menor que su multiplicidad algebraica  $r_1 = 2$ . En efecto, la matriz

$$A - i = \begin{pmatrix} -i & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -i \end{pmatrix}$$

tiene rango 3, ya que (por ejemplo) el menor

$$\begin{vmatrix} 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

es no nulo. Por tanto

$$s_1 = \dim \ker(A - i) = 4 - \text{rank}(A - i) = 1 < 2,$$

como habíamos afirmado.

## 2.5.2 Ecuaciones de orden $n$

La estabilidad de las soluciones de una ecuación diferencial ordinaria de orden  $n$

$$u^{(n)} = F(x, u, u', \dots, u^{(n-1)}) \quad (2.109)$$

se define en términos de la estabilidad de las soluciones del sistema de primer orden asociado

$$y' = f(x, y), \quad (2.110)$$

donde

$$y \equiv (y_1, y_2, \dots, y_n) = (u, u', \dots, u^{(n-1)}), \quad f(x, y) = (y_2, \dots, y_n, F(x, y)).$$

Más concretamente:

**Definición 2.42.** Se dice que una solución  $u(x)$  de la ecuación diferencial de orden  $n$  (2.109) es **estable** (respectivamente **asintóticamente estable**) si lo es la correspondiente solución  $y(x) = (u(x), u'(x), \dots, u^{(n-1)}(x))$  del sistema de primer orden asociado (2.110).

En particular, para una ecuación lineal

$$u^{(n)} + a_{n-1}(x)u^{(n-1)} + \dots + a_1(x)u' + a_0(x)u = b(x), \quad (2.111)$$

donde las funciones  $a_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 0, \dots, n-1$ ) y  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  son continuas en el intervalo  $[x_0, \infty)$ , utilizando la Proposición 2.35 se obtiene el siguiente resultado:

**Proposición 2.43.** *Una solución cualquiera de la ecuación lineal de orden  $n$  (2.111) es estable o asintóticamente estable si y sólo si lo es la solución trivial  $u \equiv 0$  de la ecuación homogénea asociada.*

**Comentario.** Por la proposición anterior, todas las soluciones de la ecuación lineal (2.111) tienen el mismo tipo de estabilidad, y por tanto tiene sentido decir que dicha ecuación es estable, asintóticamente estable o inestable. Además, al igual que para los sistemas lineales de primer orden, la ecuación (2.111) tiene el mismo tipo de estabilidad que la ecuación homogénea asociada.

A continuación discutiremos la estabilidad de las ecuaciones lineales con coeficientes constantes, de la forma

$$u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + a_1u' + a_0u = b(x), \quad a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}. \quad (2.112)$$

Para ello utilizaremos el siguiente lema, que ya habíamos enunciado en la página 54:

**Lema 2.44.** *El índice de cualquier autovalor de la matriz compañera (2.69) de la ecuación homogénea (2.68) coincide con la multiplicidad algebraica de dicho autovalor.*

*Demostración.* Si  $\lambda_i$  es un autovalor de la matriz  $A$  dada en (2.69), hay que probar que  $n_i = r_i$ , es decir, que  $s_i = \dim \ker(A - \lambda_i) = 1$ . En efecto, un cálculo elemental muestra que

$$\ker(A - \lambda_i) = \text{lin}\{(1, \lambda_i, \dots, \lambda_i^{n-1})\}.$$

□

Utilizando el Teorema 2.40 y el lema anterior, se obtiene inmediatamente el siguiente resultado:

**Teorema 2.45.** *Sea  $p(\lambda)$  el polinomio característico de la ecuación lineal con coeficientes constantes (2.112). Entonces:*

- i) Si todas las raíces de  $p$  tienen parte real negativa, la ecuación es asintóticamente estable.*
- ii) Si alguna raíz de  $p$  tiene parte real positiva, la ecuación es inestable.*
- iii) Si todas las raíces de  $p$  tienen parte real no positiva, la ecuación es estable (pero no asintóticamente estable) si todas las raíces con parte real nula son simples, e inestable en caso contrario.*

### 2.5.3 Criterio de Routh–Hurwitz

El criterio de estabilidad de un sistema o ecuación lineal con coeficientes constantes que acabamos de deducir requiere conocer las raíces del polinomio característico del sistema o ecuación considerado. Aunque el cálculo *aproximado* de estas raíces no presenta ningún problema, el cálculo exacto es difícil para polinomios de grado 3 y 4, y en general imposible para polinomios de grado superior. Sería por tanto deseable disponer de algún criterio de estabilidad formulado exclusivamente en términos de los *coeficientes* del sistema o ecuación, particularmente cuando dichos coeficientes dependen de *parámetros*. El caso más interesante en la práctica, y por tanto el más estudiado, es el de estabilidad asintótica. Esto motiva la siguiente definición:

**Definición 2.46.** Se dice que un polinomio es **estable** si todas sus raíces tienen parte real negativa.

**Comentario.** Nótese, por tanto, que si el polinomio característico de una ecuación o sistema con coeficientes constantes es estable, dicha ecuación o sistema es *asintóticamente estable*.

En lo que sigue sólo consideraremos polinomios mónicos con coeficientes reales

$$p(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1t + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad (2.113)$$

de la misma forma que el polinomio característico de un sistema o ecuación real con coeficientes constantes. Una condición *necesaria* para que un polinomio sea estable es que todos sus coeficientes sean positivos:

**Proposición 2.47.** *Si el polinomio (2.113) es estable, entonces  $a_i > 0$  para  $i = 0, \dots, n-1$ .*

*Demostración.* En efecto, si las raíces (no necesariamente distintas) de  $p$  son  $-\mu_1, \dots, -\mu_r$  y  $-\alpha_1 \pm i\beta_1, \dots, -\alpha_s \pm i\beta_s$  con  $\mu_i, \alpha_i, \beta_i > 0$  y  $r + 2s = n$ , entonces dicho polinomio se puede escribir como

$$\begin{aligned} p(t) &= (t + \mu_1) \cdots (t + \mu_r) [(t + \alpha_1)^2 + \beta_1^2] \cdots [(t + \alpha_s)^2 + \beta_s^2] \\ &= (t + \mu_1) \cdots (t + \mu_r) (t^2 + 2\alpha_1t + \alpha_1^2 + \beta_1^2) \cdots (t^2 + 2\alpha_st + \alpha_s^2 + \beta_s^2). \end{aligned} \quad (2.114)$$

Es evidente de esta fórmula que todos los coeficientes de  $p$  son estrictamente positivos.  $\square$

La condición anterior, aunque muy sencilla, no es general suficiente a menos que el polinomio  $p$  sea de segundo grado. El siguiente criterio, que no demostraremos, proporciona una condición necesaria y suficiente para la estabilidad del polinomio (2.113):

**Criterio de Routh–Hurwitz.** *Una condición necesaria y suficiente para que el polinomio (2.113) sea estable es que todos los menores principales del determinante*

$$\begin{vmatrix} a_{n-1} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_0 \end{vmatrix} \quad (2.115)$$

sean positivos. Además, si alguno de dichos menores es negativo el polinomio (2.113) tiene alguna raíz con parte real positiva.

**Comentario.** Nótese que el criterio de Routh–Hurwitz proporciona también una condición *suficiente* de inestabilidad de un sistema o ecuación con coeficientes constantes, cuando alguno de los menores del determinante (2.115) correspondiente a su polinomio característico es negativo.

Utilizando el criterio de Routh–Hurwitz se obtienen condiciones necesarias y suficientes de estabilidad asintótica muy sencillas para valores pequeños de  $n$ , que discutiremos a continuación.

- $n = 2$ . En este caso las condiciones de Routh–Hurwitz son:

$$a_1 > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_0 \end{vmatrix} = a_0 a_1 > 0,$$

es decir

$$\boxed{a_0 > 0, \quad a_1 > 0}.$$

- $n = 3$ . El determinante (2.115) es en este caso

$$\begin{vmatrix} a_2 & 1 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0 \end{vmatrix},$$

y por tanto el criterio de Routh–Hurwitz proporciona las condiciones

$$a_2 > 0, \quad a_1 a_2 - a_0 > 0, \quad a_0(a_1 a_2 - a_0) > 0,$$

o bien

$$\boxed{a_0 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_1 a_2 - a_0 > 0}. \quad (2.116)$$

Nótese que estas condiciones implican que  $a_1 > 0$ .

- $n = 4$ . El determinante de Routh–Hurwitz es en este caso

$$\begin{vmatrix} a_3 & 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 \end{vmatrix},$$

y por tanto las condiciones del criterio son:

$$a_3 > 0, \quad a_2 a_3 - a_1 > 0, \quad H \equiv a_1(a_2 a_3 - a_1) - a_0 a_3^2 > 0, \quad a_0 H > 0,$$

es decir,

$$a_0 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_2 a_3 - a_1 > 0, \quad a_1 a_2 a_3 - a_1^2 - a_0 a_3^2 > 0.$$

De nuevo, es fácil ver que estas condiciones implican que  $a_1, a_2 > 0$ . También es inmediato comprobar que dichas condiciones son equivalentes a

$$\boxed{a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_1 a_2 a_3 - a_1^2 - a_0 a_3^2 > 0}.$$

**Ejemplo 2.48.** Discutamos la estabilidad del sistema lineal inhomogéneo

$$y' = Ay + b, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.117)$$

en función de los valores del parámetro  $a \in \mathbb{R}$ . En primer lugar, recordemos que la estabilidad de (2.117) es la misma que la del sistema homogéneo asociado  $y' = Ay$ . El polinomio característico de la matriz  $A$  es

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -4 & -1 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 2 & 0 & \lambda - a \end{vmatrix} = \lambda^3 - a\lambda^2 + 2\lambda + 8.$$

Las condiciones (2.116) se reducen en este caso a

$$-a > 0, \quad -2a - 8 > 0,$$

y por tanto el sistema (2.117) es asintóticamente estable si y sólo si  $a < -4$ . Además, si  $a > -4$  el sistema es inestable, ya que entonces el determinante de la matriz de Routh–Hurwitz es negativo. Sólo queda por determinar la estabilidad del sistema en el caso  $a = -4$ , en que el polinomio característico está dado por

$$p_A(\lambda) = \lambda^3 + 4\lambda^2 + 2\lambda + 8. \quad (2.118)$$

En este caso es posible encontrar una raíz entera (divisor de 8), concretamente  $\lambda_1 = -4$ , y determinar así las dos raíces restantes  $\lambda_{2,3} = \pm\sqrt{2}i$ . Como todas las raíces del polinomio característico tienen parte real negativa o nula, y las que tienen parte real nula tienen índice uno (al ser simples), el sistema es estable pero no asintóticamente estable cuando  $a = -4$ .



Veamos a continuación cómo podríamos razonar que el polinomio (2.118) tiene una raíz real negativa y dos raíces complejas conjugadas con parte real nula, sin necesidad de determinar explícitamente dichas raíces. En primer lugar, si  $a = -4$  todas las raíces del polinomio  $p_A$  son simples, ya que las raíces de

$$p'_A(\lambda) = 3\lambda^2 + 8\lambda + 2$$

son

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{3} (-4 \pm \sqrt{10}),$$

mientras que

$$p_A(\lambda_{\pm}) = \frac{4}{27} (68 \mp 5\sqrt{10}) \neq 0.$$

Cuando una raíz de un polinomio es simple, puede probarse que dicha raíz es función continua de los coeficientes del polinomio. De este hecho se sigue que  $p_A$  debe tener al menos una raíz con parte real nula. En efecto, ninguna raíz puede tener parte real positiva, pues todas ellas tienen parte real negativa para  $a < -4$  y son funciones continuas de  $a$  por el comentario anterior. Tampoco es posible que todas las raíces tengan parte real negativa, ya que en ese caso se violaría el criterio de Routh–Hurwitz. Como evidentemente  $\lambda = 0$  no es raíz de  $p_A$  y dicho polinomio es de grado 3, de lo anterior se deduce que  $p_A$  tiene dos raíces complejas conjugadas con parte real 0 y una raíz real negativa, como ya sabíamos.



## Capítulo 3

# Soluciones en forma de serie

### 3.1 Puntos regulares. Ecuaciones de Hermite y Legendre

Nos dedicaremos en este capítulo al estudio de la ecuación lineal homogénea de segundo orden

$$\boxed{u'' + a_1(x) u' + a_0(x) u = 0}, \quad (3.1)$$

aunque los métodos que vamos a introducir a continuación se generalizan sin dificultad a ecuaciones lineales homogéneas de orden  $n > 2$ . En general, salvo en casos muy particulares (por ejemplo, si los coeficientes  $a_i$  son constantes), es imposible resolver exactamente la ecuación (3.1), es decir expresar su solución general en términos de sus coeficientes y las primitivas de dichos coeficientes. El interés de las ecuaciones de la forma (3.1) se debe a su aparición en numerosos problemas de gran interés en Física.

**Ejemplo 3.1.** La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para una partícula cuántica unidimensional de masa  $m$  sometida a un potencial  $V(s)$  en un estado estacionario de energía  $E$  es

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m} \psi''(s) + (V(s) - E) \psi(s) = 0}, \quad (3.2)$$

siendo  $\hbar \approx 1,055 \cdot 10^{-34}$  J s la constante de Planck reducida y  $\psi(s)$  la amplitud de la *densidad de probabilidad* (en general compleja) de la partícula. En otras palabras, la probabilidad de encontrar la partícula en el intervalo  $[a, b]$  es  $\int_a^b |\psi(s)|^2 ds$ . La ecuación anterior es una ecuación lineal homogénea de segundo orden, que se puede escribir en la forma reducida

$$\psi''(s) + (\varepsilon - U(s)) \psi(s) = 0, \quad (3.3)$$

siendo

$$\varepsilon = \frac{2mE}{\hbar^2}, \quad U(s) = \frac{2m}{\hbar^2} V(s). \quad (3.4)$$

Supongamos, en primer lugar, que la partícula se mueve en un campo de fuerzas constante  $F > 0$ . Entonces  $V(s) = -Fs$ , y por tanto

$$U(s) = -U_0 s, \quad U_0 = \frac{2mF}{\hbar^2} > 0.$$

Efectuando el cambio de variable

$$x = -U_0^{-2/3}(\varepsilon + U_0 s), \quad u(x) = \psi(s)$$

(el signo menos se debe a razones históricas) se obtiene la *ecuación de Airy*

$$\boxed{u'' - x u = 0}. \quad (3.5)$$

Esta ecuación no se puede resolver en términos de funciones elementales. De hecho, su solución general se expresa en términos de funciones de Airy (que a su vez se pueden escribir en términos de funciones de Bessel).

Consideremos ahora el oscilador armónico cuántico, para el cual el potencial es

$$V(s) = \frac{1}{2} m \omega^2 s^2. \quad (3.6)$$

La ecuación de Schrödinger reducida es por tanto

$$\psi'' + \left[ \varepsilon - \left( \frac{m\omega}{\hbar} \right)^2 s^2 \right] \psi = 0.$$

Efectuando el cambio

$$x = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} s, \quad u(x) = \psi(s)$$

se obtiene la *ecuación de Weber*

$$\boxed{u'' + (\lambda - x^2)u = 0}, \quad (3.7)$$

siendo

$$\lambda = \frac{\hbar \varepsilon}{m\omega} = \frac{2E}{\hbar\omega}$$

una constante adimensional. De nuevo, para valores arbitrarios de  $\lambda$  la solución general de la ecuación anterior no es expresable en términos de funciones elementales, sino a través de funciones parabólicas cilíndricas. Sin embargo, si  $\lambda = 2n + 1$  con  $n = 0, 1, 2, \dots$  entonces la ecuación (3.7) tiene una solución particular de la forma

$$u(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x),$$

siendo  $H_n$  el *polinomio de Hermite* de grado  $n$ . Para estos valores de  $\lambda$ , la energía correspondiente es

$$E = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega. \quad (3.8)$$

Se puede probar (ver págs. 80–81) que éstos son los únicos valores de  $E$  para los cuales la ecuación de Schrödinger (3.2) con el potencial armónico (3.6) admite alguna solución *normalizable*, es decir tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(s)|^2 ds < \infty.$$

Por tanto, las energías de los *estados ligados* (con energía bien definida) del oscilador armónico cuántico están dadas por la expresión (3.8). En particular, a diferencia de lo que ocurre en mecánica clásica, las energías de un oscilador cuántico están cuantizadas.

### 3.1.1 Puntos regulares

En esta sección veremos que cuando los coeficientes de la ecuación (3.1) son suficientemente regulares, la solución general de dicha ecuación se puede expresar mediante desarrollos en series de potencias. Antes de abordar este problema, repasaremos brevemente algunos conceptos sobre funciones analíticas de variable real que serán de utilidad en lo que sigue.

**Definición 3.2.** Una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es **analítica** en el punto  $x_0 \in \mathbb{R}$  si existe  $r > 0$  tal que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k, \quad |x - x_0| < r. \quad (3.9)$$

En lo que sigue utilizaremos las siguientes propiedades bien conocidas de las series de potencias:

- Existe  $R \in (0, \infty]$  tal que la serie (3.9) converge si  $|x - x_0| < R$  y diverge si  $|x - x_0| > R$  (en particular,  $R = \infty$  si (3.9) converge en todo  $\mathbb{R}$ ). Dicho  $R$  se denomina *radio de convergencia* de la serie (3.9). La serie converge *absolutamente* en el *intervalo de convergencia*  $(x_0 - R, x_0 + R)$ , siendo además *uniformemente convergente* en cualquier subintervalo compacto del intervalo de convergencia.
- La función analítica (3.9) es *infinitas veces derivable* en su intervalo de convergencia, y sus derivadas se pueden calcular derivando término a término la serie que la define, es decir,

$$f^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{\infty} c_k k(k-1) \cdots (k-j+1)(x-x_0)^{k-j}.$$

Luego

$$c_j = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}, \quad j = 0, 1, \dots, \quad (3.10)$$

y por tanto en el intervalo de convergencia  $f$  se puede representar mediante su *serie de Taylor* centrada en  $x_0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad |x - x_0| < R. \quad (3.11)$$

- De la propiedad anterior se sigue inmediatamente que una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es analítica en  $x_0$  si es  $C^\infty$  en  $x_0$ , y la serie de Taylor de  $f$  centrada en  $x_0$  converge a  $f$  en un entorno de dicho punto.
- Si  $f$  es analítica en  $x_0$ , entonces  $f$  es analítica en todo punto del intervalo de convergencia  $(x_0 - R, x_0 + R)$ .
- Si  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  son analíticas en  $x_0$ , las funciones  $\lambda f + \mu g$  (con  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ) y  $f/g$  son analíticas en  $x_0$ . Si, además,  $g(x_0) \neq 0$ , el cociente  $f/g$  es analítico en  $x_0$ .

**Ejemplo 3.3.** La función  $f(x) = x^\alpha$  (con  $\alpha \in \mathbb{R}$ ) sólo es analítica en  $x = 0$  si  $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . En efecto, para cualquier otro valor de  $\alpha$  las derivadas de la función de orden mayor que  $\alpha$  son singulares en el origen. De hecho  $f$  ni siquiera está bien definida para  $x < 0$ , salvo si  $\alpha$  es un racional  $p/q$  con  $p, q \in \mathbb{Z}$  primos entre sí y  $q$  impar. La función  $g(x) = |x|^\alpha$  está definida en toda la recta real para  $\alpha \geq 0$ , pero no es  $C^\infty$  (y por tanto tampoco analítica) en  $x = 0$  a menos que  $\alpha$  sea un entero no negativo par.

**Ejemplo 3.4.** Existen funciones  $C^\infty$  que no son analíticas. Por ejemplo, la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

es  $C^\infty$  en  $\mathbb{R}$ , pero no es analítica en el origen ya que todas sus derivadas se anulan en dicho punto.

**Definición 3.5.** Se dice que  $x_0 \in \mathbb{R}$  es un **punto regular** (u **ordinario**) de la ecuación (3.1) si los coeficientes  $a_0(x)$  y  $a_1(x)$  son funciones *analíticas* en  $x_0$ . El punto  $x_0$  se dice **singular** si no es regular, es decir, si  $a_0(x)$  ó  $a_1(x)$  no son analíticas en dicho punto.

En otras palabras, si  $x_0$  es un punto regular de la ecuación (3.1) entonces tanto  $a_0$  como  $a_1$  admiten sendos desarrollos en serie de potencias de  $x - x_0$

$$a_i(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{i,k} (x - x_0)^k, \quad i = 0, 1,$$

con *radios de convergencia* positivos  $R_0$  y  $R_1$ , respectivamente. Por tanto ambas series convergen *simultáneamente* si  $|x - x_0| < R \equiv \min(R_0, R_1) > 0$ .

**Ejemplo 3.6.** Si los coeficientes de la ecuación (3.1) son polinomios en la variable independiente todo punto es regular para dicha ecuación. Esto es lo que ocurre, por ejemplo, para las ecuaciones de Airy y de Weber.

**Ejemplo 3.7.** Estudiemos cuáles son los puntos regulares de la ecuación lineal homogénea de segundo orden

$$(e^x - 1)u'' + x^2u' + \operatorname{sen} x u = 0. \quad (3.12)$$

Para ello, debemos primero escribir la ecuación en la forma (3.1), es decir

$$u'' + \frac{x^2}{e^x - 1} u' + \frac{\operatorname{sen} x}{e^x - 1} u = 0, \quad x \neq 0.$$

Los coeficientes de la ecuación son por tanto

$$a_0(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{e^x - 1}, \quad a_1(x) = \frac{x^2}{e^x - 1} \quad (x \neq 0).$$

El numerador y el denominador de las fracciones que definen a  $a_0$  y  $a_1$  son funciones analíticas en todo punto. Además, el denominador  $e^x - 1$  sólo se anula en  $x = 0$ . Como el cociente de funciones analíticas es una función analítica en los puntos donde no se anula el denominador, concluimos que  $a_0$  y  $a_1$  son analíticas en cualquier punto  $x_0 \neq 0$ . Por tanto todo punto  $x_0 \neq 0$  es un punto regular de la ecuación (3.12).

En cuanto al punto  $x_0 = 0$ , aunque el denominador  $e^x - 1$  se anula en este punto, ocurre lo mismo con los numeradores  $\operatorname{sen} x$  y  $x^2$ . De hecho, definiendo

$$a_0(0) = \lim_{x \rightarrow 0} a_0(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{e^x - 1} = 1, \quad a_1(0) = \lim_{x \rightarrow 0} a_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^x - 1} = 0,$$

los coeficientes  $a_k$  son funciones analíticas en  $x = 0$ . En efecto,

$$a_0(x) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!}} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}}{\sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{(l+1)!}},$$

siendo tanto el numerador como el denominador funciones analíticas en  $\mathbb{R}$  (series convergentes de potencias de  $x$  con radio de convergencia infinito; aplíquese, por ejemplo, el criterio del cociente). Como la serie en el denominador no se anula (vale 1) para  $x = 0$ , el cociente  $a_0(x)$  es analítico en  $x = 0$ . Análogamente,

$$a_1(x) = \frac{x^2}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}} = \frac{x}{\sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{(l+1)!}}$$

es de nuevo el cociente de dos series de potencias de  $x$  convergentes en toda la recta real, con denominador distinto de cero en el origen. Luego también el origen es un punto regular de la ecuación (3.12), y por tanto todos los puntos son regulares para esta ecuación.

¿Cuál es el radio de convergencia de las series de Taylor de  $a_0$  y  $a_1$  centradas en el punto  $x_0$ ? En principio parece difícil responder a esta pregunta, ya que no es fácil obtener la expresión general de los coeficientes en estos desarrollos. Sin embargo, para calcular el radio de convergencia lo mejor es extender las funciones  $a_0$  y  $a_1$  al plano complejo, es decir considerar

$$a_0(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{e^z - 1}, \quad a_1(z) = \frac{z^2}{e^z - 1}, \quad z \in \mathbb{C},$$

donde (al igual que antes) se define  $a_0(0) = 1$  y  $a_1(0) = 0$ . En efecto, puede probarse que el radio de convergencia de una serie de potencias en la variable  $x \in \mathbb{R}$  no varía cuando se extiende dicha serie al plano complejo. Las funciones  $a_0$  y  $a_1$  (con  $a_0(0)$  y  $a_1(0)$  definidos como antes) son analíticas en todo el plano complejo excepto en los puntos

$$z_k = 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z} - \{0\},$$

pues en estos puntos se anula el denominador en las expresiones que definen  $a_0$  y  $a_1$ , mientras que el numerador es distinto de cero (recuérdese que  $\operatorname{sen}(2k\pi i) = i \operatorname{senh}(2k\pi) \neq 0$  si  $k \neq 0$ ). El radio de convergencia de las series de Taylor complejas

$$a_i(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{i,k} (z - z_0)^k, \quad i = 0, 1, \quad z_0 \in \mathbb{C},$$

es igual a la distancia de  $z_0$  a la singularidad más próxima de la función  $a_i$  (ya que dicha función no está acotada en un entorno de la singularidad). En particular, si  $z_0 = x_0 \in \mathbb{R}$  obtenemos las fórmulas

$$R_0 = R_1 = \sqrt{4\pi^2 + x_0^2},$$

ya que las singularidades de las funciones  $a_0$  ó  $a_1$  más próximas a un punto del eje real están en  $\pm 2\pi i$ . En particular, si  $x_0 = 0$  entonces  $R_0 = R_1 = 2\pi$ .

**Teorema 3.8.** *Sea  $x_0$  un punto regular de la ecuación (3.1), y sean  $R_0$  y  $R_1$  los radios de convergencia de las series de Taylor centradas en  $x_0$  de  $a_0(x)$  y  $a_1(x)$ , respectivamente. Entonces toda solución  $u$  de la ecuación (3.1) es analítica en  $x_0$ , es decir, se puede representar mediante la serie de potencias*

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k, \quad (3.13)$$

*siendo el radio de convergencia de esta serie mayor o igual que  $R = \min(R_0, R_1)$ .*

**Comentario.** Si  $x_0$  es un punto regular de la ecuación (3.1), las soluciones  $u_0, u_1$  (analíticas en  $x_0$ , como toda solución) que verifican las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} u_0(x_0) &= 1, & u_0'(x_0) &= 0; \\ u_1(x_0) &= 0, & u_1'(x_0) &= 1, \end{aligned} \quad (3.14)$$

forman un sistema fundamental de soluciones, ya que su wronskiano vale 1 en  $x_0$ . Como la solución (3.13) verifica  $u(x_0) = c_0$  y  $u'(x_0) = c_1$ , dicha solución se expresa en términos de este sistema fundamental como

$$u(x) = c_0 u_0(x) + c_1 u_1(x).$$

**Comentario.** Los coeficientes  $c_k \in \mathbb{R}$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) del desarrollo (3.13) se calculan sustituyendo la serie anterior en la ecuación diferencial (3.1) e igualando a cero los coeficientes de las distintas potencias de  $x - x_0$  en la expresión resultante. Nótese que, por las propiedades de las series de potencias, para calcular  $u''$  y  $u'$  podemos derivar la serie (3.13) término a término.

**Ejemplo 3.9.** El Teorema (3.8) permite asegurar que las soluciones de la ecuación (3.12) son analíticas en el origen con radio de convergencia mayor o igual que  $2\pi$ , es decir pueden representarse por una serie de Maclaurin

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad (3.15)$$

convergente para  $|x| < 2\pi$ .

**Ejemplo 3.10.** Consideremos la ecuación con coeficientes constantes

$$u'' - u = 0. \quad (3.16)$$

Como el polinomio característico es  $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$ , la solución general de esta ecuación es (cf. Teorema 2.30)

$$u(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (3.17)$$

En este caso todo punto  $x_0 \in \mathbb{R}$  es regular, con  $R \equiv \min(R_0, R_1) = \infty$  (ya que los coeficientes de la ecuación son constantes). Por tanto las soluciones de esta ecuación son funciones analíticas en todo  $\mathbb{R}$  (con radio de convergencia infinito). Desarrollemos, por ejemplo, alrededor de  $x_0 = 0$ . Sustituyendo la serie (3.15) en la ecuación (3.16) obtenemos

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{l=0}^{\infty} [(l+2)(l+1)c_{l+2} - c_l] x^l = 0.$$

Igualando a cero el coeficiente de  $x^l$  en esta expresión obtenemos la siguiente *relación de recurrencia* que han de satisfacer los coeficientes  $c_l$ :

$$(l+2)(l+1)c_{l+2} = c_l, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (3.18)$$

La relación anterior determina los coeficientes pares en términos de  $c_0$  y los impares en términos de  $c_1$ , ya que relaciona  $c_l$  con  $c_{l+2}$  (nótese que el coeficiente de  $c_{l+2}$  en (3.18) no se anula para ningún  $l = 0, 1, \dots$ ). Los coeficientes  $c_0 = u(0)$  y  $c_1 = u'(0)$  quedan indeterminados por la relación de recurrencia (3.18), lo cual es razonable, dado que la ecuación (3.16) debe tener una solución para todo valor de las condiciones iniciales  $u(0) = c_0$  y  $u'(0) = c_1$ . La relación de recurrencia (3.18) se resuelve fácilmente. En efecto, si  $c_0 \neq 0$  podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{c_{2k}}{c_0} &= \frac{c_{2k}}{c_{2k-2}} \frac{c_{2k-2}}{c_{2k-4}} \dots \frac{c_2}{c_0} = \frac{1}{2k(2k-1)} \frac{1}{(2k-2)(2k-3)} \dots \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{(2k)!} \\ \implies & \boxed{c_{2k} = \frac{c_0}{(2k)!}}, \end{aligned}$$

expresión que es obviamente válida también si  $c_0 = 0$ . Análogamente, si  $c_1 \neq 0$  entonces

$$\begin{aligned} \frac{c_{2k+1}}{c_1} &= \frac{c_{2k+1}}{c_{2k-1}} \frac{c_{2k-1}}{c_{2k-3}} \dots \frac{c_3}{c_1} = \frac{1}{(2k+1)(2k)} \frac{1}{(2k-1)(2k-2)} \dots \frac{1}{3 \cdot 2} = \frac{1}{(2k+1)!} \\ \implies & \boxed{c_{2k+1} = \frac{c_1}{(2k+1)!}}, \end{aligned}$$



que de nuevo vale también para  $c_1 = 0$  en virtud de (3.18). La solución general de la ecuación (3.18) es por tanto

$$u(x) = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = c_0 \cosh x + c_1 \sinh x.$$

Esta expresión de la solución general de (3.16) es equivalente a (3.17) con  $\alpha = (c_0 + c_1)/2$  y  $\beta = (c_0 - c_1)/2$ .

**Ejemplo 3.11.** Consideremos a continuación la ecuación de Airy (3.5), para la cual todos los puntos son regulares con  $R = \infty$  (pues los coeficientes son polinomios). Desarrollando de nuevo alrededor de  $x_0 = 0$  obtenemos la expresión

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+1} = 2c_2 + \sum_{l=1}^{\infty} [(l+2)(l+1)c_{l+2} - c_{l-1}] x^l = 0.$$

Igualando a cero los coeficientes de las potencias de  $x$  obtenemos

$$c_2 = 0 \tag{3.19}$$

junto con la relación de recurrencia

$$(l+2)(l+1)c_{l+2} = c_{l-1}, \quad l = 1, 2, \dots \tag{3.20}$$

Nótese que ahora la relación de recurrencia relaciona  $c_l$  con  $c_{l+3}$ . De esta propiedad y la ecuación (3.19) se sigue que

$$\boxed{c_{3k+2} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots} \tag{3.21}$$

Ahora  $c_0$  determina todos los coeficientes de índice múltiplo de 3, mientras que  $c_1$  determina los coeficientes  $c_{3k+1}$  con  $k = 1, 2, \dots$ . Más concretamente, para calcular  $c_{3k}$  reescribamos la relación de recurrencia (3.20) en la forma

$$3k(3k-1)c_{3k} = c_{3k-3}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Si  $c_0 \neq 0$  se tiene

$$\begin{aligned} \frac{c_{3k}}{c_0} &= \frac{c_{3k}}{c_{3k-3}} \frac{c_{3k-3}}{c_{3k-6}} \dots \frac{c_3}{c_0} = \frac{1}{3 \cdot k \cdot (3k-1)} \frac{1}{3 \cdot (k-1) \cdot (3k-4)} \dots \frac{1}{3 \cdot 1 \cdot 2} \\ \implies &\boxed{c_{3k} = \frac{c_0}{3^k k! 2 \cdot 5 \dots (3k-1)}}, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

relación válida también para  $c_0 = 0$ . Nótese que la expresión anterior es también cierta para  $k = 0$ , ya que en este caso el producto  $2 \cdot 5 \dots (3k-1)$  tiene cero factores, y por convenio un producto con cero factores se define como 1. Análogamente, de (3.20) se sigue que

$$3k(3k+1)c_{3k+1} = c_{3k-2}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

y por tanto si  $c_1 \neq 0$  se verifica

$$\begin{aligned} \frac{c_{3k+1}}{c_1} &= \frac{c_{3k+1}}{c_{3k-2}} \frac{c_{3k-2}}{c_{3k-5}} \dots \frac{c_4}{c_1} = \frac{1}{3 \cdot k \cdot (3k+1)} \frac{1}{3 \cdot (k-1) \cdot (3k-2)} \dots \frac{1}{3 \cdot 1 \cdot 4} \\ \implies &\boxed{c_{3k+1} = \frac{c_1}{3^k k! 4 \cdot 7 \dots (3k+1)}}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Al igual que antes, esta relación es válida también para  $k = 0$ . Por consiguiente la solución general de la ecuación de Airy está dada por

$$u(x) = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k}}{3^k k! 2 \cdot 5 \cdots (3k-1)} + c_1 x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k}}{3^k k! 4 \cdot 7 \cdots (3k+1)}. \quad (3.22)$$

Como los coeficientes de la ecuación de Airy son polinomios, el radio de convergencia de las series (3.22) que definen a  $u(x)$  es infinito.

### 3.1.2 La ecuación de Hermite

Si en la ecuación de Weber

$$\phi'' + (\lambda - x^2) \phi = 0 \quad (3.23)$$

efectuamos el cambio de variable dependiente

$$\phi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} u(x)$$

obtenemos la ecuación de Hermite

$$u'' - 2x u' + 2\mu u = 0, \quad 2\mu \equiv \lambda - 1 \in \mathbb{R}. \quad (3.24)$$

Como los coeficientes de esta ecuación son polinomios, todo punto es regular, y el radio de convergencia de la serie de Taylor centrada en cualquier punto de las soluciones de la ecuación es infinito. Si desarrollamos alrededor del origen, sustituyendo

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

en la ecuación obtenemos la identidad

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^k + 2\mu \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0$$

que podemos reescribir como sigue:

$$\sum_{l=0}^{\infty} [(l+2)(l+1) c_{l+2} + 2(\mu-l) c_l] x^l = 0.$$

De esta ecuación se obtiene la relación de recurrencia

$$(l+2)(l+1) c_{l+2} = -2(\mu-l) c_l, \quad l = 0, 1, \dots \quad (3.25)$$

Como el coeficiente de  $c_{l+2}$  no se anula para ningún  $l = 0, 1, \dots$ , la relación anterior determina todos los coeficientes pares (impares) en términos de  $c_0$  ( $c_1$ ). Para calcular los coeficientes pares escribimos (3.25) para  $l = 2k - 2$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), obteniendo

$$2k(2k-1) c_{2k} = -2(\mu-2k+2) c_{2k-2}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.26)$$

Por tanto (suponiendo que  $c_0 \neq 0$ , ya que si  $c_0 = 0$  todos los coeficientes pares se anulan)

$$\begin{aligned} \frac{c_{2k}}{c_0} &= \frac{c_{2k}}{c_{2k-2}} \frac{c_{2k-2}}{c_{2k-4}} \cdots \frac{c_2}{c_0} = \frac{-2(\mu-2k+2)}{2k(2k-1)} \frac{-2(\mu-2k+4)}{(2k-2)(2k-3)} \cdots \frac{-2\mu}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{(-2)^k}{(2k)!} \mu(\mu-2) \cdots (\mu-2k+2) \end{aligned}$$

y entonces

$$c_{2k} = \frac{(-2)^k}{(2k)!} \mu(\mu-2) \cdots (\mu-2k+2) c_0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.27)$$

Análogamente, para los coeficientes impares  $c_{2k+1}$  la relación de recurrencia se escribe

$$(2k+1)(2k) c_{2k+1} = -2(\mu-2k+1) c_{2k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.28)$$

por lo que (si  $c_1 \neq 0$ )

$$\begin{aligned} \frac{c_{2k+1}}{c_1} &= \frac{c_{2k+1}}{c_{2k-1}} \frac{c_{2k-1}}{c_{2k-3}} \cdots \frac{c_3}{c_1} = \frac{-2(\mu-2k+1)}{(2k+1)(2k)} \frac{-2(\mu-2k+3)}{(2k-1)(2k-2)} \cdots \frac{-2(\mu-1)}{3 \cdot 2} \\ &= \frac{(-2)^k}{(2k+1)!} (\mu-1)(\mu-3) \cdots (\mu-2k+1). \end{aligned}$$

Por tanto

$$c_{2k+1} = \frac{(-2)^k}{(2k+1)!} (\mu-1)(\mu-3) \cdots (\mu-2k+1) c_1, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.29)$$

expresión obviamente válida también si  $c_1 = 0$ . Por tanto la solución general de la ecuación de Hermite (3.24) es

$$u(x) = c_0 u_0(x) + c_1 u_1(x),$$

donde

$$u_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(\mu-2) \cdots (\mu-2k+2) \frac{(-2)^k}{(2k)!} x^{2k} \quad (3.30)$$

y

$$u_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (\mu-1)(\mu-3) \cdots (\mu-2k+1) \frac{(-2)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad (3.31)$$

siendo ambas series convergentes para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Las funciones  $u_i(x)$  ( $i = 0, 1$ ) son ambas soluciones de la ecuación de Hermite (3.24), siendo  $u_0$  una función par y  $u_1$  impar, es decir

$$u_i(-x) = (-1)^i u_i(x), \quad i = 0, 1. \quad (3.32)$$

Nótese que de las expresiones (3.30)-(3.31) se deduce que las funciones  $u_i(x)$  satisfacen las condiciones iniciales (3.14) en  $x_0 = 0$ .

Las funciones  $u_0$  y  $u_1$ , que como hemos visto anteriormente forman un sistema fundamental de soluciones de la ecuación de Hermite, se reducen a *polinomios* para ciertos valores del parámetro  $\mu$  que aparece en la ecuación. En efecto, la solución par  $u_0(x)$  se reduce a un polinomio si se anula el coeficiente  $c_{2k}$  para algún valor de  $k = 1, 2, \dots$ , es decir si

$$\mu(\mu-2) \cdots (\mu-2k+2) = 0$$

para algún  $k$ . Esto sólo es posible si  $\mu = 2n$  con  $n = 0, 1, \dots$ . En tal caso  $c_{2n+2}$  se anula en virtud de (3.27), lo cual implica que  $c_{2k+2} = 0$  si  $k \geq n$  por la relación de recurrencia (3.26). En definitiva, si  $\mu = 2n$  la solución  $u_0$  en (3.30) se reduce al polinomio

$$P_{2n}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} \frac{(2x)^{2k}}{(2k)!},$$

donde hemos tenido en cuenta la identidad

$$2n(2n-2)\cdots(2n-2k+2) = 2^k n(n-1)\cdots(n-k+1) = 2^k \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Por el contrario, la solución impar  $u_1$  no es polinómica cuando  $\mu = 2n$ , ya que

$$(2n-1)(2n-3)\cdots(2n-2k+1) \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

La solución  $u_1$  será sin embargo polinómica si  $\mu = 2n+1$  con  $n = 0, 1, \dots$ , ya que entonces  $c_{2n+3} = 0$  debido a la Ec. (3.29), lo cual implica (por la relación de recurrencia) que  $c_{2k+3} = 0$  para  $k \geq n$ . En este caso la solución  $u_1$  se reduce al polinomio

$$P_{2n+1}(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} \frac{(2x)^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

De nuevo, para estos valores de  $\mu$  la solución par  $u_0$  no se reduce a un polinomio.

Cuando la solución  $u_i$  ( $i = 0, 1$ ) no se reduce a un polinomio (en particular, si  $\mu \neq 0, 1, 2, \dots$ ), entonces la correspondiente solución  $\phi_i(x) = e^{-x^2/2} u_i(x)$  de la ecuación de Weber (3.23) no es normalizable.

En efecto, supongamos que la solución  $u_i(x)$  ( $i = 0, 1$ ) no se reduce a un polinomio, y por tanto  $\mu \neq 2k+i$  para todo  $k = 0, 1, \dots$ . Si escribimos el desarrollo de  $u_i(x)$  como

$$u_i(x) = x^i \sum_{k=0}^{\infty} b_k^i x^{2k} \quad (i = 0, 1),$$

entonces de las Ecs. (3.26) y (3.28) se sigue que

$$\frac{b_{k+1}^i}{b_k^i} = \frac{c_{2k+2+i}}{c_{2k+i}} = \frac{2k+i-\mu}{(k+1)(2k+2i+1)} \neq 0, \quad \forall k = 0, 1, \dots \quad (3.33)$$

Por otra parte, si  $\alpha \in \mathbb{R}$  entonces

$$e^{\alpha x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k}, \quad a_k \equiv \frac{\alpha^k}{k!},$$

y por tanto

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\alpha}{k+1}. \quad (3.34)$$

Si  $0 < \alpha < 1$ , de las expresiones (3.33) y (3.34) se sigue que existe  $N \in \mathbb{N}$  suficientemente grande tal que

$$\frac{b_{k+1}^i}{b_k^i} > \frac{a_{k+1}}{a_k} > 0, \quad \forall k \geq N.$$

Luego, si  $k > N$ ,

$$\frac{b_k^i}{b_N^i} = \frac{b_k^i}{b_{k-1}^i} \cdots \frac{b_{N+1}^i}{b_N^i} > \frac{a_k}{a_{k-1}} \cdots \frac{a_{N+1}}{a_N} = \frac{a_k}{a_N}.$$

De esta desigualdad se sigue inmediatamente que

$$\frac{1}{b_N^i} (x^{-i} u_i(x) - p_N^i(x)) > \frac{1}{a_N} (e^{\alpha x^2} - q_N(x)),$$

donde

$$p_N^i(x) = \sum_{k=0}^N b_k^i x^{2k}, \quad q_N(x) = \sum_{k=0}^N a_k x^{2k}$$

son polinomio de grado  $2N$ . Por tanto, si  $|x| \gg 1$  se tiene

$$\frac{x^{-i} u_i(x)}{b_N^i} > \frac{e^{\alpha x^2}}{2a_N},$$

de donde se deduce que

$$|u_i(x)| > \frac{|b_N^i|}{2a_N} |x|^i e^{\alpha x^2}, \quad |x| \gg 1.$$

Por tanto, la correspondiente solución  $\phi_i$  de la ecuación de Weber verifica

$$|\phi_i(x)| > \frac{|b_N^i|}{2a_N} |x|^i e^{(\alpha - \frac{1}{2})x^2}, \quad |x| \gg 1. \quad (3.35)$$

De esta expresión con  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$  se sigue que la función  $\phi_i(x)$  no está acotada cuando  $|x| \rightarrow \infty$ , y por tanto no es normalizable.

De la discusión anterior se deduce que si  $\mu = n \equiv 2k + i$ , con  $k = 0, 1, 2, \dots$ , entonces la ecuación de Weber (3.23) tiene una única solución linealmente independiente normalizable (proporcional a  $\phi_i$ ), de energía

$$E = \frac{\hbar\omega}{2} \lambda = \frac{\hbar\omega}{2} (2\mu + 1) = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.36)$$

Por otra parte, si  $\mu \neq 0, 1, \dots$ , entonces la expresión (3.35) se cumple para  $i = 0, 1$  simultáneamente, de modo que ninguna solución  $\phi(x) = c_0 \phi_0(x) + c_1 \phi_1(x)$  de la ecuación de Weber es normalizable en este caso. Esto demuestra que las energías de los estados ligados del oscilador armónico cuántico están dadas por la expresión (3.36). Dicha expresión fue deducida empíricamente por Planck en 1900 para explicar la distribución de frecuencias del espectro de radiación de un cuerpo negro, y con ella puede decirse que comenzó la Mecánica Cuántica.

Los **polinomios de Hermite**  $H_k(x)$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) son proporcionales a los polinomios  $P_k(x)$  que acabamos de introducir. Más precisamente, los polinomios de Hermite se suelen definir mediante las fórmulas

$$\begin{aligned} H_{2n}(x) &= (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} P_{2n}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{k+n} \frac{(2n)!}{(2k)!(n-k)!} (2x)^{2k} \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{(2n)!}{i!(2n-2i)!} (2x)^{2n-2i}, \\ H_{2n+1}(x) &= 2(-1)^n \frac{(2n+1)!}{n!} P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{k+n} \frac{(2n+1)!}{(2k+1)!(n-k)!} (2x)^{2k+1} \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{(2n+1)!}{i!(2n+1-2i)!} (2x)^{2n+1-2i}. \end{aligned}$$

Ambas fórmulas se pueden englobar en la siguiente:

$$H_k(x) = \sum_{i=0}^{[k/2]} \frac{(-1)^i k!}{i!(k-2i)!} (2x)^{k-2i}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.37)$$

donde  $[x]$  denota la parte entera de  $x$  (mayor entero menor ó igual que  $x$ ). Al ser  $H_k$  proporcional a  $P_k$  para todo  $k = 0, 1, \dots$ ,  $H_k$  es solución de la ecuación de Hermite (3.24) con  $\mu = k$ , es decir,

$$H_k'' - 2x H_k' + 2k H_k = 0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.38)$$

Los primeros polinomios de Hermite son:

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= 2x \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2 \\ H_3(x) &= 8x^3 - 12x \\ H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12. \end{aligned}$$

La **función generatriz**  $F(x, z)$  de los polinomios de Hermite se define como

$$F(x, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_k(x)}{k!} z^k. \quad (3.39)$$

Procediendo formalmente se obtiene

$$\begin{aligned} F(x, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{(-1)^i}{i! (k-2i)!} (2x)^{k-2i} z^k = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i! j!} (2x)^j z^{j+2i} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2xz)^j}{j!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-z^2)^i}{i!} = e^{2xz} e^{-z^2} = \boxed{e^{2xz-z^2}}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Por otra parte, de la definición de  $F$  se sigue que

$$H_k(x) = \left. \frac{\partial^k}{\partial z^k} F(x, z) \right|_{z=0}. \quad (3.41)$$

Combinando (3.40) y (3.41) se obtiene

$$\begin{aligned} H_k(x) &= \left. \frac{\partial^k}{\partial z^k} \left[ e^{-(z-x)^2} e^{x^2} \right] \right|_{z=0} = e^{x^2} \left. \frac{\partial^k}{\partial z^k} e^{-(z-x)^2} \right|_{z=0} = e^{x^2} \left. \frac{d^k}{dw^k} e^{-w^2} \right|_{w=-x} \\ &= (-1)^k e^{x^2} \left. \frac{d^k}{ds^k} e^{-s^2} \right|_{s=x}, \end{aligned}$$

es decir

$$H_k(x) = (-1)^k e^{x^2} \frac{d^k}{dx^k} e^{-x^2}. \quad (3.42)$$

La identidad anterior es la llamada *fórmula de Rodrigues* para los polinomios de Hermite.

Derivando la definición (3.39) de la función generatriz respecto de  $z$  y  $x$  y utilizando (3.40) se obtienen propiedades importantes de los polinomios de Hermite. En efecto, derivando parcialmente respecto de  $z$  se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} e^{2xz-z^2} &= 2(x-z) e^{2xz-z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2x H_k(x)}{k!} z^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 H_k(x)}{k!} z^{k+1} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} [2x H_j(x) - 2j H_{j-1}(x)] \frac{z^j}{j!}, \end{aligned}$$

que por (3.39) ha de ser igual a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_k(x)}{(k-1)!} z^{k-1} = \sum_{j=0}^{\infty} H_{j+1}(x) \frac{z^j}{j!}.$$

Igualando los coeficientes de  $z^j$  en ambas expresiones se obtiene la identidad

$$\boxed{H_{j+1}(x) = 2x H_j(x) - 2j H_{j-1}(x)}, \quad j = 0, 1, \dots, \quad (3.43)$$

que puede ser utilizada para calcular recursivamente los polinomios de Hermite a partir de  $H_0(x) = 1$ . Análogamente, derivando la función generatriz respecto de  $x$  se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial x} e^{2xz-z^2} = 2z e^{2xz-z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 H_k(x)}{k!} z^{k+1} = \sum_{j=0}^{\infty} 2j H_{j-1}(x) \frac{z^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} H'_j(x) \frac{z^j}{j!},$$

de donde se deduce la relación

$$\boxed{H'_j(x) = 2j H_{j-1}(x)}, \quad j = 0, 1, \dots \quad (3.44)$$

Nótese que combinando las relaciones (3.43) y (3.44) se deduce fácilmente que el polinomio  $H_j$  es solución de la ecuación de Hermite con  $\mu = j$ , ya que

$$\begin{aligned} H''_j(x) - 2j H'_{j-1}(x) &= \frac{d}{dx} [2x H_j(x) - H_{j+1}(x)] = 2x H'_j(x) + 2H_j(x) - H'_{j+1}(x) \\ &= 2x H'_j(x) + 2H_j(x) - 2(j+1) H_j(x) = 2x H'_j(x) - 2j H_j(x). \end{aligned}$$

Otra de las propiedades importantes de los polinomios de Hermite es su **ortogonalidad** en la recta real respecto de la función peso  $e^{-x^2}$ , es decir

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = 0, \quad m \neq n}. \quad (3.45)$$

Para probar esta relación, basta recordar que las funciones  $\varphi_k(x) = H_k(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$  verifican la ecuación de Weber con  $\lambda = 2k + 1$ , es decir

$$\varphi''_k(x) + (2k + 1 - x^2) \varphi_k(x) = 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

De esta ecuación se deduce que

$$0 = \varphi_n [\varphi''_m + (2m + 1 - x^2) \varphi_m] - \varphi_m [\varphi''_n + (2n + 1 - x^2) \varphi_n] = \varphi_n \varphi''_m - \varphi_m \varphi''_n - 2(n - m) \varphi_n \varphi_m,$$

y por tanto

$$\frac{d}{dx} (\varphi_n \varphi'_m - \varphi_m \varphi'_n) = 2(n - m) \varphi_n \varphi_m.$$

Integrando esta igualdad entre  $-\infty$  y  $+\infty$  se obtiene (3.45), ya que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi_n(x) \varphi'_m(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (H'_m(x) - x H_m(x)) H_n(x) e^{-x^2} = 0.$$

En Mecánica Cuántica es también de gran interés el cálculo de la integral (3.45) para  $m = n$ . Para evaluar dicha integral, multipliquemos (3.43) por  $H_{j+1} e^{-x^2}$  e integremos entre  $-\infty$  y  $+\infty$ . Aplicando las relaciones de ortogonalidad (3.45) se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} H_{j+1}^2(x) e^{-x^2} dx &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} (e^{-x^2}) H_j(x) H_{j+1}(x) dx \\ &= - \left[ e^{-x^2} H_j(x) H_{j+1}(x) \right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \frac{d}{dx} [H_j(x) H_{j+1}(x)] dx. \end{aligned}$$

Utilizando de nuevo las relaciones de ortogonalidad (3.45) y la identidad (3.44) queda

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} H_{j+1}^2(x) e^{-x^2} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} [H_j'(x) H_{j+1}(x) + H_j(x) H_{j+1}'(x)] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [2j H_{j-1}(x) H_{j+1}(x) + 2(j+1) H_j^2(x)] e^{-x^2} dx \\ &= 2(j+1) \int_{-\infty}^{\infty} H_j^2(x) e^{-x^2} dx, \quad j = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

De esta igualdad se deduce fácilmente que

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n^2(x) e^{-x^2} dx = 2^n n! \int_{-\infty}^{\infty} H_0^2(x) e^{-x^2} dx = 2^n n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Como la última integral es igual a  $\sqrt{\pi}$ , se tiene finalmente

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} H_n^2(x) e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi}}. \quad (3.46)$$

*Ejercicio.*

1. Probar que si  $a_0$  es una función par y  $a_1$  es impar (y ambas son continuas), entonces  $u(-x)$  es solución de la ecuación (3.1) si  $u(x)$  es solución.
2. Deducir que las soluciones  $u_i(x)$  de la ecuación (3.1) definidas por las condiciones iniciales (3.14) con  $x_0 = 0$  tienen la paridad de  $(-1)^i$ , es decir satisfacen (3.32).
3. Concluir que si el punto  $x_0 = 0$  es regular y  $u(x)$  es solución de la ecuación (3.1) con las condiciones iniciales  $u(0) = c_0$ ,  $u'(0) = c_1$ , entonces  $u$  admite un desarrollo en serie de potencias de la forma

$$u(x) = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^{2k} + c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k x^{2k+1}.$$

### 3.1.3 La ecuación de Legendre

Uno de los métodos más usuales para resolver la ecuación de Laplace  $\Delta \Psi = 0$  en un sistema de coordenadas ortogonales es el llamado *método de separación de variables*. En coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$ , el método consiste en buscar soluciones de la forma

$$\Psi(r, \theta, \phi) = \frac{R(r)}{r} P(\theta) Q(\phi).$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} = 0$$

se obtienen las tres ecuaciones diferenciales ordinarias siguientes:

$$R''(r) - \frac{\alpha(\alpha+1)}{r^2} R(r) = 0, \quad (3.47a)$$

$$Q''(\phi) + m^2 Q(\phi) = 0, \quad (3.47b)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta P'(\theta) \right) + \left[ \alpha(\alpha+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] P(\theta) = 0. \quad (3.47c)$$



En las ecuaciones anteriores,  $m$  y  $\alpha$  son dos constantes de separación, y sin pérdida de generalidad puede suponerse que  $\alpha \geq -\frac{1}{2}$ , ya que  $\alpha(\alpha+1) = (\alpha + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$ . Si en la Ec. (3.47c) con  $m = 0$  hacemos el cambio  $x = \cos \theta$ , llamando  $u(x) = P(\theta)$  obtenemos inmediatamente la **ecuación de Legendre**

$$\boxed{(1-x^2)u'' - 2xu' + \alpha(\alpha+1)u = 0}. \quad (3.48)$$

Los coeficientes de esta ecuación

$$a_1(x) = -\frac{2x}{1-x^2}, \quad a_0(x) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{1-x^2}; \quad x \neq \pm 1, \quad (3.49)$$

son funciones analíticas en  $x_0 = 0$ , siendo los radios de convergencia de sus desarrollos de Taylor centrados en dicho punto  $R_0 = R_1 = 1$ . Por el Teorema 3.8, la solución general de la ecuación de Legendre se puede expresar mediante la serie de potencias

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad (3.50)$$

con radio de convergencia mayor o igual que 1. Sustituyendo la serie (3.50) en la ecuación de Legendre obtenemos

$$\begin{aligned} (1-x^2) \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^k + \alpha(\alpha+1) \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \\ = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} [k(k-1) + 2k - \alpha(\alpha+1)] c_k x^k \\ = \sum_{l=0}^{\infty} [(l+2)(l+1)c_{l+2} - (l(l+1) - \alpha(\alpha+1))c_l] x^l = 0. \end{aligned}$$

Igualando a cero el coeficiente de  $x^l$  en la expresión anterior se llega a la relación de recurrencia

$$(l+2)(l+1)c_{l+2} = (l(l+1) - \alpha(\alpha+1))c_l, \quad l = 0, 1, \dots,$$

o equivalentemente,

$$c_{l+2} = -\frac{(\alpha-l)(\alpha+l+1)}{(l+2)(l+1)} c_l, \quad l = 0, 1, \dots \quad (3.51)$$

La relación anterior determina todos los coeficientes  $c_{2k}$  (respectivamente  $c_{2k+1}$ ) en términos de  $c_0$  (respectivamente  $c_1$ ). Por ejemplo, los coeficientes de las potencias pares están dados por

$$\begin{aligned} c_{2k} &= \frac{-(\alpha-2k+2)(\alpha+2k-1)}{2k(2k-1)} \cdot \frac{-(\alpha-2k+4)(\alpha+2k-3)}{(2k-2)(2k-3)} \cdots \frac{-(\alpha-2)(\alpha+3)}{4 \cdot 3} \cdot \frac{-\alpha(\alpha+1)}{2 \cdot 1} c_0 \\ &= \frac{(-1)^k}{(2k)!} \alpha(\alpha-2) \cdots (\alpha-2k+2)(\alpha+1)(\alpha+3) \cdots (\alpha+2k-1) c_0, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (3.52)$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} c_{2k+1} &= \frac{-(\alpha-2k+1)(\alpha+2k)}{(2k+1)2k} \cdot \frac{-(\alpha-2k+3)(\alpha+2k-2)}{(2k-1)(2k-2)} \cdots \frac{-(\alpha-1)(\alpha+2)}{3 \cdot 2} c_1 \\ &= \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (\alpha-1)(\alpha-3) \cdots (\alpha-2k+1)(\alpha+2)(\alpha+4) \cdots (\alpha+2k) c_1, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (3.53)$$

Por tanto, la solución general de la ecuación de Legendre se puede expresar como

$$u(x) = c_0 u_0(x) + c_1 u_1(x),$$

donde las soluciones  $u_0$  y  $u_1$  verifican las condiciones (3.32) y están dadas por

$$u_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \alpha(\alpha-2) \cdots (\alpha-2k+2)(\alpha+1)(\alpha+3) \cdots (\alpha+2k-1) x^{2k} \quad (3.54)$$

y

$$u_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (\alpha-1)(\alpha-3) \cdots (\alpha-2k+1)(\alpha+2)(\alpha+4) \cdots (\alpha+2k) x^{2k+1}, \quad (3.55)$$

siendo ambas series convergentes para  $|x| < 1$ . Para  $x = \pm 1$  (es decir,  $\theta = 0, \pi$ ), no está garantizada la convergencia de las series anteriores. De hecho, puede probarse que dichas series divergen en  $x = \pm 1$ , salvo para aquellos valores de  $\alpha$  para los que se reducen a un polinomio. Al ser  $\alpha \geq -\frac{1}{2}$ , de las expresiones (3.54) y (3.55) se deduce que la solución  $u_0$  es un polinomio si  $\alpha = 2n$ , con  $n = 0, 1, \dots$ , mientras que la solución  $u_1$  es polinómica para  $\alpha = 2n + 1$ , con  $n = 0, 1, \dots$ . Dichas soluciones polinómicas son proporcionales a los **polinomios de Legendre**, definidos por

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k} \sum_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} (-1)^i \binom{k}{i} \binom{2k-2i}{k} x^{k-2i}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.56)$$

En efecto, si  $\alpha = 2n$  entonces es fácil comprobar que

$$P_{2n}(x) = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \binom{2n}{n} u_0(x),$$

mientras que si  $\alpha = 2n + 1$  entonces

$$P_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} (n+1) \binom{2n+1}{n} u_1(x).$$

Los polinomios de Legendre de grado más bajo se calculan fácilmente utilizando (3.56):

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2} (3x^2 - 1) \\ P_3(x) &= \frac{1}{2} (5x^3 - 3x) \\ P_4(x) &= \frac{1}{8} (35x^4 - 30x^2 + 3). \end{aligned}$$

Al ser  $P_k$  proporcional a  $u_0$  (si  $\alpha = k$  es par) o a  $u_1$  (si  $\alpha = k$  es impar), dicho polinomio es solución de la ecuación de Legendre (3.48) con  $\alpha = k$ , es decir,

$$(1-x^2)P_k'' - 2xP_k' + k(k+1)P_k = 0. \quad (3.57)$$

Los polinomios de Legendre satisfacen propiedades análogas a los de Hermite, que enunciaremos sin demostración:

- Función generatriz:

$$F(x, z) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(z) z^k.$$

- Fórmula de Rodrigues:

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^k.$$

- Relación de recurrencia:

$$(k+1)P_{k+1}(x) - (2k+1)xP_k(x) + kP_{k-1}(x) = 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

- Relación de ortogonalidad en el intervalo  $[-1, 1]$ :

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}.$$

### 3.2 Puntos singulares regulares

Estudiaremos a continuación el comportamiento de las soluciones de la ecuación lineal homogénea de segundo orden (3.1) en las proximidades de un punto singular  $x_0 \in \mathbb{R}$ , es decir tal que al menos uno de los dos coeficientes  $a_i(x)$  de la ecuación no es analítico en  $x_0$ .

**Ejemplo 3.12.** Posiblemente la ecuación más sencilla de la forma (3.1) que es resoluble elementalmente y tiene un punto singular es la **ecuación de Euler** de segundo orden

$$x^2 u'' + p_0 x u' + q_0 u = 0, \quad p_0, q_0 \in \mathbb{R}. \quad (3.58)$$

En efecto, es claro que si  $p_0$  y  $q_0$  no son ambos nulos entonces el origen es un punto singular de (3.58). Por otra parte, la ecuación se resuelve fácilmente mediante el cambio de variable dependiente

$$t = \log |x|, \quad x \neq 0,$$

ya que si

$$y(t) = u(x)$$

entonces  $\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dt}{dx}\right)^{-1} = x$ , por lo que

$$\frac{dy}{dt} = u'(x) \frac{dx}{dt} = x u'(x), \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = x^2 u''(x) + x u'(x).$$

Por tanto  $y(t)$  satisface la ecuación lineal homogénea de coeficientes *constantes*

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + (p_0 - 1) \frac{dy}{dt} + q_0 y = 0, \quad (3.59)$$

cuyo polinomio característico es

$$p(r) = r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = r(r - 1) + p_0 r + q_0. \quad (3.60)$$

Si  $r_i$  ( $i = 1, 2$ ) son las dos raíces (posiblemente complejas) de (3.60), la solución general de la ecuación (3.59) está dada por

$$y(t) = \begin{cases} c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, & \text{si } r_1 \neq r_2, r_1, r_2 \in \mathbb{R} \\ (c_1 + c_2 t) e^{rt}, & \text{si } r_1 = r_2 \equiv r \in \mathbb{R} \\ (c_1 \cos(\beta t) + c_2 \operatorname{sen}(\beta t)) e^{\alpha t}, & \text{si } r_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

Por tanto, la solución general de la ecuación de Euler (3.58) es

$$u(x) = \begin{cases} c_1 |x|^{r_1} + c_2 |x|^{r_2}, & \text{si } r_1 \neq r_2, r_1, r_2 \in \mathbb{R} \\ (c_1 + c_2 \log |x|) |x|^r, & \text{si } r_1 = r_2 \equiv r \in \mathbb{R} \\ [c_1 \cos(\beta \log |x|) + c_2 \operatorname{sen}(\beta \log |x|)] |x|^\alpha, & \text{si } r_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}. \end{cases} \quad (3.61)$$

Obsérvese que para ciertos valores de las raíces  $r_1$  y  $r_2$  (o, lo que es lo mismo, de los coeficientes  $p_0$  y  $q_0$ ), algunas o incluso todas las soluciones de la ecuación de Euler (3.58) pueden ser analíticas en  $x = 0$ , aunque los coeficientes de la ecuación no lo sean. Más concretamente, si  $r_1 \neq r_2$  son enteros no negativos entonces todas las soluciones son analíticas en  $x = 0$ , mientras que si  $r_1 = r_2 \equiv r$  es un entero no negativo entonces hay una sólo solución linealmente independiente analítica en  $x = 0$ , a saber  $u(x) = x^r$ . (¿Por qué se puede sustituir  $|x|^{r_i}$  por  $x^{r_i}$  en (3.61) si  $r_i$  es un entero impar?)

A pesar de que la ecuación de Euler (3.58) no admite en general una solución analítica en el punto singular  $x = 0$ , es evidente que siempre posee al menos una solución de la forma

$$u(x) = |x|^r,$$

siendo  $r$  una de las raíces del polinomio característico (3.60) (evidentemente, si  $r_{1,2}$  son complejas entonces esta solución es también compleja). Podría pensarse que si  $x_0$  es un punto singular de la ecuación (3.1) entonces dicha ecuación admite siempre alguna solución no trivial de la forma

$$u(x) = |x - x_0|^r v(x), \quad (3.62)$$

con  $v$  analítica en  $x_0$ . El ejemplo siguiente demuestra que esto *no* es cierto en general:

**Ejemplo 3.13.** Consideremos la ecuación

$$x^2 u'' + u' - \frac{3}{4} u = 0, \quad (3.63)$$

que evidentemente tiene un punto singular en  $x = 0$ . Supongamos que la ecuación admitiera una solución de la forma

$$u(x) = |x|^r v(x),$$

con

$$v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

analítica en  $x = 0$ . Nótese que podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $c_0 \neq 0$ , ya que en caso contrario bastaría redefinir adecuadamente  $r$ . Si  $x > 0$ , podemos expresar la solución anterior mediante la serie

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{r+k}, \quad x > 0. \quad (3.64)$$

Sustituyendo en la ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (r+k)(r+k-1)c_k x^{r+k} + \sum_{k=0}^{\infty} (r+k)c_k x^{r+k-1} - \frac{3}{4} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{r+k} \\ = rc_0 x^{r-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \left( (r+k)(r+k-1) - \frac{3}{4} \right) c_k + (r+k+1)c_{k+1} \right] x^{r+k} = 0. \end{aligned}$$

Igualando a cero el coeficiente del término en  $x^{r-1}$  se obtiene la condición  $r = 0$ . El coeficiente del término general  $x^{r+k} \equiv x^k$  con  $k = 0, 1, \dots$  proporciona entonces la relación de recurrencia

$$(k+1)c_{k+1} = - \left( k + \frac{1}{2} \right) \left( k - \frac{3}{2} \right) c_k, \quad k = 0, 1, \dots$$

La ecuación anterior determina todos los coeficientes  $c_k$  con  $k > 0$ , ya que  $k+1 \neq 0$  para  $k = 0, 1, \dots$ . Además, al ser  $(k + \frac{1}{2})(k - \frac{3}{2}) \neq 0$  para  $k = 0, 1, \dots$ , todos los coeficientes  $c_k$  son no nulos, por lo que (3.64) es una serie infinita. Por el criterio del cociente, el radio de convergencia de dicha serie está dado por

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{(k + \frac{1}{2})(k - \frac{3}{2})} = 0.$$

Luego la serie (3.64) sólo converge en  $x = 0$ , y por tanto la ecuación (3.63) no tiene ninguna solución de la forma (3.62) con  $v$  analítica en  $x = 0$ .

Supongamos que  $x_0$  es un punto singular de la ecuación (3.1), de modo que no es aplicable el Teorema 3.8. Veremos más adelante que la ecuación (3.1) admite al menos una solución no trivial de la forma (3.62), con  $v$  analítica en  $x_0$ , siempre que sus coeficientes  $a_i(x)$  ( $i = 0, 1$ ) sean de la forma

$$\boxed{a_1(x) = \frac{p(x)}{x - x_0}, \quad a_0(x) = \frac{q(x)}{(x - x_0)^2}, \quad x \neq x_0,} \quad (3.65)$$

con  $p$  y  $q$  funciones *analíticas* en  $x_0$ .

**Definición 3.14.** Diremos que un punto singular  $x_0$  de la ecuación (3.1) es un punto **singular regular** de dicha ecuación si sus coeficientes son de la forma (3.65), siendo  $p$  y  $q$  funciones analíticas en  $x_0$ .

En otras palabras, para que una singularidad  $x_0$  sea un punto singular regular de la ecuación (3.1) las funciones  $p$  y  $q$  definidas por

$$\boxed{p(x) = (x - x_0) a_1(x), \quad q(x) = (x - x_0)^2 a_0(x)} \quad (3.66)$$

para  $x \neq x_0$  y

$$p(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} [(x - x_0) a_1(x)] \equiv p_0, \quad q(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} [(x - x_0)^2 a_0(x)] \equiv q_0$$

han de ser analíticas en  $x_0$ . Por ejemplo, es inmediato comprobar que  $x_0 = 0$  es un punto singular regular de la ecuación de Euler (3.58), con  $p(x) = p_0$  y  $q(x) = q_0$  funciones constantes. Por analogía con la ecuación de Euler (3.58) (cf. la Ec. (3.60)), si  $x_0$  es un punto singular regular de la Ec. (3.1) se define su **polinomio indicial** mediante

$$\boxed{F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0}, \quad (3.67)$$

con  $p_0$  y  $q_0$  dados por la fórmula anterior.

**Ejemplo 3.15.** Consideremos la ecuación

$$x u'' + u' + \log |x| u = 0. \quad (3.68)$$

Todo punto  $x_0 \neq 0$  es un punto regular, ya que los coeficientes de la ecuación

$$a_1(x) = \frac{1}{x}, \quad a_0(x) = \frac{\log |x|}{x}, \quad x \neq 0,$$

son funciones analíticas en  $x_0 \neq 0$ . En efecto,  $1/x$  es el cociente de las funciones analíticas  $1$  y  $x$ , siendo el denominador no nulo en  $x_0$ . De hecho, la serie de Taylor centrada en  $x_0$  de  $1/x$  se puede calcular por métodos elementales:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{(x-x_0) + x_0} = \frac{1}{x_0} \frac{1}{1 + \frac{x-x_0}{x_0}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x_0^{k+1}} (x-x_0)^k, \quad |x-x_0| < |x_0|.$$

Por otra parte,  $\frac{\log |x|}{x}$  es analítica en  $x_0 \neq 0$ , al ser el producto de dos funciones analíticas en  $x_0$  ( $1/x$  y  $\log |x|$ ). Recuérdese que  $\log |x|$  es analítica en todo punto  $x_0 \neq 0$ , ya que

$$\begin{aligned} \log |x| &= \log |x_0| + \log \left| 1 + \frac{x-x_0}{x_0} \right| \stackrel{|x-x_0| < |x_0|}{=} \log |x_0| + \log \left( 1 + \frac{x-x_0}{x_0} \right) \\ &= \log |x_0| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k x_0^k} (x-x_0)^k, \quad |x-x_0| < |x_0|. \end{aligned}$$

El punto  $x_0 = 0$  es un punto singular de la ecuación (3.68), ya que es singularidad de ambos coeficientes de la ecuación. Para que dicho punto sea un punto singular regular, las funciones

$$p(x) = x a_1(x) = 1, \quad q(x) = x^2 a_0(x) = x \log |x| \quad (x \neq 0),$$

han de ser analíticas en 0. Pero esto es falso, ya que aunque  $p$  es analítica (constante) en  $\mathbb{R}$ , y existe

$$\lim_{x \rightarrow 0} q(x) = 0,$$

$q$  no es ni siquiera una vez derivable en el origen. Por tanto, 0 es un punto singular *irregular* de la ecuación (3.68).

El siguiente teorema, debido a G. Frobenius (1874), es de gran importancia práctica, ya que describe con gran precisión el comportamiento de las soluciones de la ecuación lineal homogénea (3.1) en las proximidades de un punto singular regular  $x_0$ . Por sencillez, supondremos que  $x_0 = 0$  (lo que siempre puede conseguirse con el cambio de variable independiente  $t = x - x_0$ ), y por tanto escribiremos la ecuación (3.1) en la forma

$$\boxed{x^2 u'' + x p(x) u' + q(x) u = 0}, \quad (3.69)$$

con

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k, \quad q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k, \quad |x| < R. \quad (3.70)$$

**Teorema de Frobenius.** Sean  $r_1$  y  $r_2$  las raíces del polinomio indicial (3.67) de (3.69), numeradas de forma que

$$\operatorname{Re} r_1 \geq \operatorname{Re} r_2. \quad (3.71)$$

Entonces se tiene:

1. Si  $r_1 \neq r_2$  y  $r_1 - r_2 \notin \mathbb{N}$ , la ecuación (3.69) tiene un sistema fundamental de soluciones de la forma

$$u_i(x) = |x|^{r_i} v_i(x), \quad i = 1, 2, \quad (3.72)$$

con  $v_i$  analítica en 0 y  $v_i(0) = 1$ .

2. Si  $r_1 = r_2 \equiv r$ , (3.69) admite el sistema fundamental de soluciones

$$u_1(x) = |x|^r v_1(x), \quad u_2(x) = u_1(x) \log |x| + |x|^r v_2(x), \quad (3.73)$$

con  $v_i$  analítica en 0,  $v_1(0) = 1$  y  $v_2(0) = 0$ .

3. Si  $r_1 - r_2 \equiv n \in \mathbb{N}$ , (3.69) posee el sistema fundamental de soluciones

$$u_1(x) = |x|^{r_1} v_1(x), \quad u_2(x) = (\operatorname{sgn} x)^n c u_1(x) \log |x| + |x|^{r_2} v_2(x), \quad (3.74)$$

con  $v_i$  analítica en 0,  $v_i(0) = 1$  y  $c \in \mathbb{R}$  constante (posiblemente nula).

En todos los casos, el radio de convergencia de la serie de Taylor centrada en 0 de  $v_i$  ( $i = 1, 2$ ) es mayor o igual que  $R$ .

Nótese que en el caso i) las raíces pueden ser complejas, es decir  $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ . En tal caso es conveniente reemplazar las soluciones complejas (3.72) por el sistema fundamental de soluciones reales

$$\begin{aligned} & |x|^\alpha \left[ w_1(x) \cos(\beta \log |x|) + x w_2(x) \operatorname{sen}(\beta \log |x|) \right], \\ & |x|^\alpha \left[ w_1(x) \operatorname{sen}(\beta \log |x|) - x w_2(x) \cos(\beta \log |x|) \right], \end{aligned} \quad (3.75)$$

donde de nuevo  $w_i$  es (real) y analítica con radio de convergencia al menos  $R$  en 0, y  $w_1(0) = 1$ .

*Demostración.* Nos limitaremos a dar a continuación una justificación heurística del teorema de Frobenius, evitando entrar en detalles técnicos como, por ejemplo, la verificación de la convergencia de las series que utilizaremos. La idea de la prueba es ensayar una solución del tipo

$$u(x) = |x|^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad \text{con } c_0 \neq 0, \quad (3.76)$$

e intentar calcular el exponente  $r$  y los coeficientes  $c_i$  sustituyendo (3.76) en la ecuación (3.69). Para fijar ideas, supondremos en lo que sigue que  $x > 0$ . Sustituyendo entonces (3.76) en (3.69) se obtiene

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} (k+r)(k+r-1) c_k x^{k+r} + \left( \sum_{j=0}^{\infty} p_j x^j \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} (k+r) c_k x^{k+r} \right) + \left( \sum_{j=0}^{\infty} q_j x^j \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+r} \right) \\ & = \sum_{l=0}^{\infty} \left[ (l+r)(l+r-1) c_l + \sum_{k=0}^l ((k+r) p_{l-k} + q_{l-k}) c_k \right] x^{l+r} = 0. \end{aligned}$$

Igualando a cero los coeficientes de las potencias de  $x$  se obtiene

$$(l+r)(l+r-1) c_l + \sum_{k=0}^l [(k+r) p_{l-k} + q_{l-k}] c_k = 0, \quad l = 0, 1, \dots \quad (3.77)$$

Haciendo  $l = 0$  queda

$$[r(r-1) + p_0r + q_0]c_0 \equiv F(r)c_0 = 0,$$

y por tanto

$$\boxed{F(r) = 0}. \quad (3.78)$$

La ecuación (3.78) implica que  $r$  sólo puede ser igual a una de las dos raíces  $r_{1,2}$  del polinomio indicial. Si  $l = 1, 2, \dots$  reescribimos (3.77) como

$$[(l+r)(l+r-1) + (l+r)p_0 + q_0]c_l = - \sum_{k=0}^{l-1} [(k+r)p_{l-k} + q_{l-k}]c_k, \quad l = 1, 2, \dots$$

Teniendo en cuenta la definición del polinomio indicial (3.67) se obtiene finalmente la relación de recurrencia

$$\boxed{F(r+l)c_l = - \sum_{k=0}^{l-1} [(k+r)p_{l-k} + q_{l-k}]c_k, \quad l = 1, 2, \dots}. \quad (3.79)$$

Si  $r = r_1$ , es fácil ver que la ecuación anterior determina todos los coeficientes  $c_l$  con  $l = 1, 2, \dots$  en términos de  $c_0$ . En efecto, la condición necesaria y suficiente para que esto ocurra es que  $c_l$  se pueda despejar de (3.79) en términos de  $c_0, \dots, c_{l-1}$  para todo  $l = 1, 2, \dots$ . A su vez, esto es equivalente a que

$$F(r_1 + l) \neq 0, \quad l = 1, 2, \dots$$

Si esto no se cumpliera para algún  $l = 1, 2, \dots$  entonces  $F$  tendría la raíz  $r_2 = r_1 + l$  con  $\operatorname{Re} r_2 = \operatorname{Re} r_1 + l > \operatorname{Re} r_1$ , en contra de la definición (3.71) de  $r_1$ . Esto demuestra que la ecuación (3.69) siempre posee una solución no trivial de la forma

$$u_1(x) = x^{r_1} v_1(x) \quad (x > 0) \quad (3.80)$$

con

$$v_1(x) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l x^l,$$

donde los coeficientes  $c_l$  se determinan en función de  $c_0$  mediante la relación de recurrencia (3.79). Se demuestra que la serie de potencias que define a  $v_1$  tiene radio de convergencia mayor o igual que  $R$ , y que por tanto  $v_1$  es analítica en 0. Además, podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $c_0 = 1$ , es decir  $v_1(0) = 1$ . Nótese que si  $r_1 - r_2 \notin \mathbb{N}$ , se cumple también la condición

$$F(r_2 + l) \neq 0, \quad l = 1, 2, \dots$$

Por tanto en este caso la ecuación (3.69) posee también una segunda solución de la forma

$$u_2(x) = x^{r_2} v_2(x) \quad (x > 0)$$

con  $v_2$  analítica en 0 y  $v_2(0) = 1$ . Si  $r_2 \neq r_1$  es obvio que esta solución es linealmente independiente de la anterior, ya que el cociente de ambas soluciones no es constante (es de la forma  $x^{r_2-r_1}$  por una función analítica que vale 1 en el origen). Con esto queda por tanto probado el primer apartado del teorema.

Supongamos a continuación que

$$r_1 - r_2 = n \quad \text{con } n = 0, 1, \dots$$



Utilizando la solución (3.80) podemos construir una segunda solución linealmente independiente de la ecuación aplicando la fórmula (2.64), es decir

$$u_2(x) = u_1(x) \int^x \frac{t^{-2r_1}}{v_1^2(t)} e^{-\int^t a_1(s) ds} dt. \quad (3.81)$$

Al ser el origen un punto singular regular de la ecuación (3.69) se tiene

$$\int^t a_1(s) ds = \int^t \frac{p(s)}{s} ds = p_0 \log t + \varphi(t)$$

siendo

$$\varphi(t) = \int^t \sum_{k=1}^{\infty} p_k s^{k-1} ds = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{k} t^k.$$

Se demuestra que  $\varphi(t)$  es una función analítica en el origen, con  $\varphi(0) = 0$ . Sustituyendo en la fórmula (3.81) se obtiene

$$u_2(x) = u_1(x) \int^x t^{-p_0-2r_1} \frac{e^{-\varphi(t)}}{v_1^2(t)} dt \equiv u_1(x) \int^x t^{-p_0-2r_1} \psi(t) dt, \quad (3.82)$$

con

$$\psi(t) = \frac{e^{-\varphi(t)}}{v_1^2(t)} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$$

analítica en el origen (cociente de dos funciones analíticas con denominador no nulo en 0) y

$$b_0 = \psi(0) = \frac{e^{-\varphi(0)}}{v_1^2(0)} = 1 \neq 0.$$

De la definición (3.67) del polinomio indicial  $F(r)$  se sigue que

$$r_1 + r_2 = 1 - p_0 \implies -p_0 - 2r_1 = r_2 - r_1 - 1 = -n - 1.$$

De (3.82) se deduce por tanto que

$$\begin{aligned} u_2(x) &= u_1(x) \int^x t^{-n-1} \psi(t) dt = u_1(x) \int^x \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^{k-n-1} dt \\ &= b_n u_1(x) \log x + u_1(x) \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{b_k}{k-n} x^{k-n} \equiv b_n u_1(x) \log x + x^{r_2} w(x), \end{aligned} \quad (3.83)$$

con

$$w(x) = v_1(x) \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{b_k}{k-n} x^k.$$

De nuevo, se demuestra que  $w$  es analítica en el origen, siendo

$$w(0) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ -\frac{b_0}{n} = -\frac{1}{n} \neq 0, & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Esto demuestra los dos últimos apartados del teorema de Frobenius, ya que si  $n = 0$  el coeficiente del término  $u_1(x) \log x$  es  $b_0 = 1$ .  $\square$

Igual que en un punto regular, los coeficientes de las funciones analíticas  $v_i$  que aparecen en el teorema de Frobenius se obtienen sustituyendo en la ecuación diferencial (3.69) las expresiones (3.72)–(3.74). Sin embargo, si las raíces de la ecuación indicial difieren en un entero aparece la dificultad adicional de la posible presencia de un término logarítmico, que sólo es *segura* si la ecuación indicial tiene una raíz doble.

Si  $r_1 - r_2 = n \in \mathbb{N}$ , para determinar si aparece o no un término logarítmico en la segunda solución  $u_2(x)$  lo más eficiente es empezar asumiendo que dicho término no aparece, y buscar por tanto una solución del tipo

$$x^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad (x > 0) \quad (3.84)$$

con  $c_0 \neq 0$ . Como  $F(r_2 + l) \neq 0$  para  $l = 1, 2, \dots, n-1$ , la relación de recurrencia (3.79) determina los coeficientes  $c_1, \dots, c_{n-1}$  en función de  $c_0$ . Para  $l = n$ , sin embargo,  $F(r_2 + n) = F(r_1) = 0$ , y por tanto la relación de recurrencia se reduce a la ecuación

$$\sum_{k=0}^{n-1} [(k + r_2)p_{n-k} + q_{n-k}] c_k = 0. \quad (3.85)$$

Si los coeficientes  $c_0, \dots, c_{n-1}$  calculados precedentemente no verifican la ecuación anterior, hemos llegado a una contradicción, y por tanto ha de haber necesariamente un término logarítmico en la segunda solución (es decir,  $c \neq 0$  en (3.74)). Por el contrario, si se cumple (3.85) la relación de recurrencia permite calcular  $c_l$  con  $l > n$ , ya que  $F(r_2 + l) \neq 0$  para  $l > n$ . Nótese que el coeficiente  $c_n$  es arbitrario. Pero esto es lógico, ya que  $c_n$  multiplica a  $x^{r_2+n} = x^{r_1}$ , y el coeficiente de este término se puede asignar a voluntad añadiendo un múltiplo adecuado de la primera solución (3.80). En definitiva, *la condición necesaria y suficiente para que haya una segunda solución de (3.69) del tipo (3.84), es decir sin término logarítmico, es que se cumpla (3.85)*.

Supongamos a continuación que  $r_1 = r_2 \equiv r$ , por lo que la presencia del término logarítmico está garantizada. Para calcular la segunda solución en este caso, sean  $c_l(s)$  ( $l = 1, 2, \dots$ ) los coeficientes determinados por la relación de recurrencia (3.79) con  $r = s$ , es decir

$$F(s + l) c_l(s) = - \sum_{k=0}^{l-1} [(k + s)p_{l-k} + q_{l-k}] c_k(s), \quad l = 1, 2, \dots, \quad (3.86)$$

junto con la condición  $c_0 = 1$ . Nótese que esta relación determina todos los coeficientes  $c_l(s)$  si  $r - s \notin \mathbb{N}$ , ya que  $F$  sólo se anula en  $r$ ; en particular, los coeficientes están definidos para  $|s - r| < 1$ . Si se cumple esta condición  $s$  no es una raíz del polinomio indicial, y por tanto la función

$$u(x, s) = x^s \sum_{k=0}^{\infty} c_k(s) x^k \quad (x > 0)$$

no es solución de la ecuación (3.69). Más precisamente, teniendo en cuenta la forma en que se obtuvo la relación de recurrencia (3.79) es fácil ver que

$$L[u(x, s)] \equiv x^2 u'' + xp(x)u' + q(x)u = F(s)x^s.$$

Derivando esta ecuación respecto de  $s$  y haciendo  $s = r$  se obtiene:

$$\left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=r} L[u(x, s)] = L \left[ \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=r} u(x, s) \right] = F'(r)x^r + F(r)x^r \log x = 0,$$

ya que  $r$  es por hipótesis raíz doble de  $F$ . Esto prueba que la función

$$\left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=r} u(x, s) = u(x, r) \log x + x^r \sum_{k=0}^{\infty} c'_k(r) x^k \equiv \boxed{u_1(x) \log x + x^r \sum_{k=0}^{\infty} c'_k(r) x^k}$$

es solución de la ecuación lineal homogénea (3.69) si  $r$  es una raíz doble del polinomio indicial (3.60).

### 3.2.1 La ecuación de Bessel

La ecuación

$$\boxed{x^2 u'' + x u' + (x^2 - \nu^2) u = 0}, \quad x > 0, \quad (3.87)$$

donde  $\nu \geq 0$  es un parámetro real, recibe el nombre de **ecuación de Bessel**. Esta ecuación es de gran importancia en Física, ya que se obtiene al separar variables en la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas (donde  $x$  representa la coordenada radial). El origen es un punto singular de la ecuación de Bessel, ya que  $a_1(x) = 1/x$  no es analítica en  $x = 0$  (tampoco lo es  $a_0(x) = 1 - (\nu/x)^2$ , si  $\nu > 0$ ). De hecho, este punto es singular regular, ya que (3.87) es de la forma (3.69) con

$$p(x) = 1, \quad q(x) = x^2 - \nu^2 \quad (3.88)$$

funciones analíticas en 0 (polinomios). Como

$$p_0 = 1, \quad q_0 = -\nu^2, \quad (3.89)$$

el polinomio indicial es

$$F(r) = r(r-1) + r - \nu^2 = r^2 - \nu^2. \quad (3.90)$$

Las raíces del polinomio indicial son por tanto

$$r_1 = \nu, \quad r_2 = -\nu \quad (3.91)$$

(recuérdese que  $r_1$  siempre designa a la raíz de parte real mayor), siendo su diferencia

$$r_1 - r_2 = 2\nu. \quad (3.92)$$

Busquemos, en primer lugar, la solución del tipo (3.76), que en este caso será de la forma

$$u_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\nu} \quad (x > 0).$$

Sustituyendo en la ecuación de Bessel se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} [(k+\nu)(k+\nu-1) + (k+\nu) - \nu^2] c_k x^{k+\nu} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\nu+2} \\ = (1+2\nu)c_1 x^{\nu+1} + \sum_{l=2}^{\infty} [l(l+2\nu)c_l + c_{l-2}] x^{l+\nu} = 0. \end{aligned}$$

Igualando a cero los coeficientes de las potencias de  $x$  en el miembro derecho de esta expresión obtenemos la condición

$$c_1 = 0, \quad (3.93)$$

junto con la relación de recurrencia

$$\boxed{l(l+2\nu)c_l = -c_{l-2}, \quad l = 2, 3, \dots}. \quad (3.94)$$

Como (3.94) relaciona el coeficiente  $c_l$  con  $c_{l-2}$ , los coeficientes pares (impares) son proporcionales a  $c_0$  ( $c_1$ ), de donde se deduce que

$$\boxed{c_{2k+1} = 0, \quad k = 0, 1, \dots}. \quad (3.95)$$

Llamando

$$c_{2k} = b_k, \quad k = 0, 1, \dots,$$

la relación de recurrencia (3.94) se transforma en

$$\boxed{4k(k+\nu)b_k = -b_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots}. \quad (3.96)$$

Como el coeficiente de  $b_k$  en esta relación no se anula para ningún  $k > 0$  (ya que  $\nu \geq 0$ ), (3.96) determina todos los coeficientes  $b_k$  con  $k = 1, 2, \dots$  en términos de  $b_0$ . Más concretamente, de (3.96) se obtiene fácilmente

$$\boxed{b_k = \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! (\nu+k)(\nu+k-1) \cdots (\nu+1)} b_0, \quad k = 1, 2, \dots}. \quad (3.97)$$

Tomando  $b_0 = 2^{-\nu}$  obtenemos la siguiente solución de la ecuación de Bessel:

$$u_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(\nu+k) \cdots (\nu+2)(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}. \quad (3.98)$$

Por el teorema de Frobenius, la serie que define esta función es convergente para todo  $x \in \mathbb{R}$ , ya que los coeficientes  $p$  y  $q$  son polinomios. (Esto también se puede comprobar directamente en este caso utilizando el criterio del cociente.)

Para simplificar los coeficientes en la fórmula anterior utilizaremos algunas propiedades de la **función gamma de Euler**, definida por

$$\boxed{\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt}, \quad \operatorname{Re} z > 0. \quad (3.99)$$

La integral converge absolutamente si  $z = x + iy$  con  $x > 0$ , ya que

$$\int_0^{\infty} |t^{z-1}| e^{-t} dt = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt + \int_1^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \equiv I_1 + I_2,$$

siendo  $I_1$  e  $I_2$  convergentes. En efecto,  $I_1$  converge por tener el mismo carácter que  $\int_0^1 t^{x-1} dt$ , mientras que  $I_2$  lo hace al ser  $\int_1^{\infty} e^{-t/2} dt$  convergente y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{x-1} e^{-t}}{e^{-t/2}} = 0.$$

Se demuestra que la función  $\Gamma$  definida por (3.99) es analítica en el semiplano  $\operatorname{Re} z > 0$ . Integrando por partes se prueba fácilmente que  $\Gamma$  satisface la relación funcional fundamental

$$\boxed{\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)}. \quad (3.100)$$

Como

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1,$$

de la relación funcional se deduce inmediatamente que

$$\boxed{\Gamma(n+1) = n!} \quad n = 0, 1, \dots$$

Por tanto la función  $\Gamma$  es una generalización del factorial. Por ejemplo, para  $x = \frac{1}{2}$  el valor de esta función es

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt \stackrel{t=x^2}{=} 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad (3.101)$$

La función  $\Gamma$  se extiende fácilmente al semiplano izquierdo utilizando la relación funcional (3.100). Por ejemplo, si  $-1 < \operatorname{Re} z \leq 0$  entonces se define

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z},$$

donde el miembro derecho está bien definido y es analítico para  $z \neq 0$ . De esta forma se obtiene una función analítica en todo el plano complejo, excepto en los puntos  $z = -k$  con  $k = 0, 1, 2, \dots$ , donde se prueba que  $\Gamma$  tiene polos simples (es decir, diverge como  $(z+k)^{-1}$  cuando  $z \rightarrow -k$ ). Por último, se demuestra que la función  $\Gamma$  no tiene ceros en el plano complejo. Por tanto, la función  $1/\Gamma$  es entera (analítica en todo el plano complejo), y se anula sólo en los enteros negativos y en el origen.

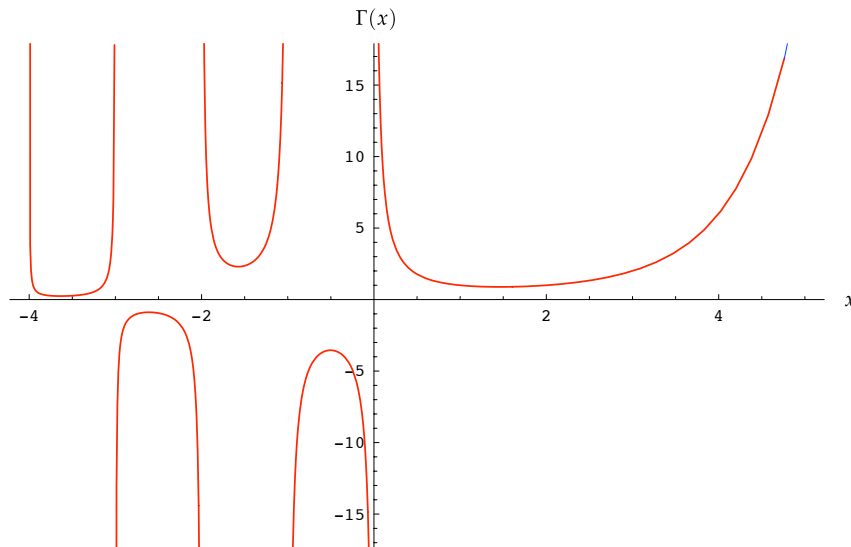


Figura 3.1: Gráfica de la función  $\Gamma(x)$ . Nótese, en particular, las asíntotas verticales en los puntos  $x = 0, -1, -2, \dots$

Utilizando la relación funcional (3.100) repetidamente se obtiene

$$\Gamma(\nu + k + 1) = (\nu + k) \cdots (\nu + 2)(\nu + 1)\Gamma(\nu + 1).$$

Multiplicando la solución  $u_1(x)$  por la constante  $1/\Gamma(\nu + 1)$  (no nula, ya que  $\nu \geq 0$ ) se llega a la siguiente solución de la ecuación de Bessel (3.87)

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}, \quad x > 0, \quad (3.102)$$

que se denomina **función de Bessel de primera especie y orden  $\nu$** . Nótese que  $J_0(0) = 1$ , mientras que para  $\nu > 0$  la función  $J_\nu(x)$  se anula en el origen (véase la Fig. 3.2):

$$J_\nu(0) = 0, \quad \nu > 0.$$

Sin embargo,  $J_\nu$  sólo es analítica en  $x = 0$  si  $\nu = 0, 1, \dots$ , ya que  $x^\nu$  sólo es analítica en el origen para estos valores de  $\nu$ .

Hallemos, a continuación, la segunda solución. Si

$$2\nu \neq 0, 1, \dots, \quad (3.103)$$

por el teorema de Frobenius la segunda solución de la ecuación de Bessel es de la forma

$$u_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k-\nu}.$$

Repetiendo el cálculo anterior con  $\nu$  reemplazado por  $-\nu$  se obtiene la solución de la ecuación de Bessel dada por

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k - \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}, \quad x > 0, \quad (3.104)$$

linealmente independiente de (3.102). Por tanto, si  $2\nu \neq 0, 1, \dots$  la solución general de la ecuación de Bessel es

$$u(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x), \quad (3.105)$$

con  $C_1$  y  $C_2$  constantes arbitrarias.

De hecho, la función  $J_{-\nu}$  definida por la Ec. (3.104) tiene sentido para cualquier valor de  $\nu > 0$ . Si  $\nu \neq 1, 2, \dots$  entonces  $1/\Gamma(1 - \nu) \neq 0$ , y por tanto  $J_{-\nu}(x)$  diverge cuando  $x \rightarrow 0$  si  $\nu \neq 0, 1, \dots$  (véase la Fig. 3.2):

$$J_{-\nu}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{2^\nu}{\Gamma(1 - \nu)} x^{-\nu} \quad (\nu \neq 0, 1, \dots). \quad (3.106)$$

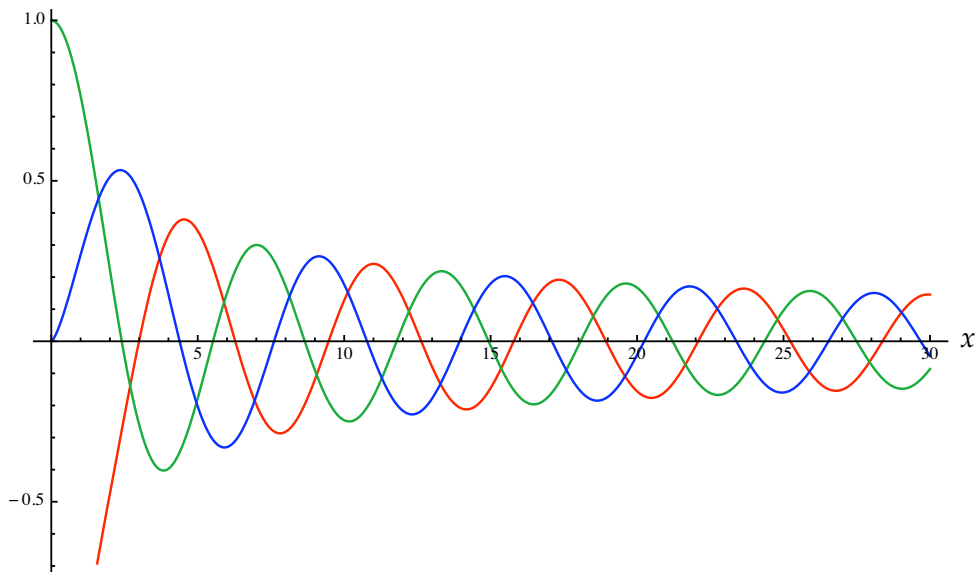


Figura 3.2: Gráfica de las funciones  $J_0(x)$  (verde),  $J_{\sqrt{2}}(x)$  (azul) y  $J_{-\sqrt{2}}(x)$  (rojo).

Determinemos ahora la segunda solución cuando

$$2\nu = 0, 1, \dots,$$

Nótese que si  $\nu = 0$  el teorema de Frobenius implica que dicha solución tiene un término logarítmico, que puede no aparecer si  $2\nu = 1, 2, \dots$ . Distinguiremos dos subcasos, según  $\nu$  sea semientero o entero.

En primer lugar, si

$$\nu = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$$

no hay término logarítmico. Esto se podría comprobar estudiando la relación de recurrencia para la segunda raíz  $(-\nu)$  de la ecuación indicial, o más fácilmente observando que en este caso  $J_{-\nu}$  sigue siendo solución de la ecuación de Bessel (ya que dicha ecuación no cambia si se sustituye  $\nu$  por  $-\nu$ ), y no es proporcional a  $J_\nu(x)$ . En efecto,  $J_\nu$  se anula en el origen para  $\nu > 0$ , mientras que la solución  $J_{-\nu}$  diverge en 0 como  $x^{-\nu}$  para  $\nu = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$  (véase la Ec. (3.106)). De hecho, se puede probar que si  $m \in \mathbb{Z}$  entonces

$$J_{m+\frac{1}{2}}(x) = A_m \left( \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \cos x + B_m \left( \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \sin x, \quad (3.107)$$

con  $A_m$  y  $B_m$  polinomios. (Se puede probar  $J_\nu$  sólo es una función elemental si  $\nu$  es semientero.) Por ejemplo, si  $m = 0$  entonces

$$\Gamma\left(k + \frac{3}{2}\right) = \left(k + \frac{1}{2}\right)\left(k - \frac{1}{2}\right) \cdots \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{k+1}} (2k+1)(2k-1) \cdots 3 \cdot 1 \cdot \sqrt{\pi} = \frac{(2k+1)!}{2^{2k+1} k!} \sqrt{\pi},$$

donde hemos utilizado las identidades (3.100) y (3.101). Sustituyendo esta expresión en la definición (3.102) de  $J_\nu$  (con  $\nu = \frac{1}{2}$ ) se obtiene fácilmente

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \quad (3.108a)$$

Análogamente se demuestra que

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x. \quad (3.108b)$$

En definitiva, la solución general de la ecuación de Bessel para  $\nu$  semientero sigue estando dada por la Ec. (3.105).

Veamos a continuación que si

$$\nu = 1, 2, \dots$$

entonces la segunda solución de la ecuación de Bessel contiene un término logarítmico. Una indicación de este hecho es que si  $\nu \in \mathbb{N}$  la función  $J_{-\nu}$  es proporcional a  $J_\nu$ . En efecto, en este caso

$$\frac{1}{\Gamma(k - \nu + 1)} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \nu - 1.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} J_{-\nu}(x) &= \sum_{k=\nu}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k - \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+\nu}}{(l+\nu)! \Gamma(l+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l+\nu} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+\nu}}{\Gamma(l+\nu+1) l!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l+\nu} = (-1)^\nu J_\nu(x), \quad \nu = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Para probar que en este caso ( $\nu \in \mathbb{N}$ ) hay un término logarítmico, nótese que la relación de recurrencia para la hipotética solución

$$u_2(x) = x^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

es simplemente (3.93) y (3.94) con  $\nu$  reemplazado por  $-\nu$ , es decir

$$c_1 = 0; \quad l(l - 2\nu) c_l = -c_{l-2}, \quad l = 2, 3, \dots$$

De nuevo, todos los coeficientes impares son cero, y los coeficientes pares  $b_k = c_{2k}$  se determinan por

$$4k(k - \nu) b_k = -b_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Esta relación determina  $b_1, \dots, b_{\nu-1}$  en términos de  $b_0$ , siendo todos estos coeficientes no nulos si  $b_0 \neq 0$ . Sin embargo, en este caso la relación que debería determinar  $b_\nu$  se reduce a

$$0 = -b_{\nu-1},$$

que es contradictoria, ya que  $b_{\nu-1} \neq 0$  si  $b_0 \neq 0$ .

Como ya se ha mencionado, si  $\nu = 0$  en la segunda solución de la ecuación de Bessel aparece un término logarítmico. De acuerdo con el teorema de Frobenius, dicha solución es de la forma

$$u_2(x) = J_0(x) \log x + v_2(x) \equiv J_0(x) \log x + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad \text{con } c_0 = 0.$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación de Bessel para  $\nu = 0$  se obtiene

$$(x J_0'' + J_0' + x J_0) \log x + 2 J_0' + x v_2'' + v_2' + x v_2 = 0,$$

o bien, ya que  $J_0$  es solución de la ecuación de Bessel para  $\nu = 0$ ,

$$\boxed{x v_2'' + v_2' + x v_2 + 2 J_0' = 0}. \quad (3.109)$$

Nótese que en esta expresión no aparece ya ningún término logarítmico, lo que ocurre también en el caso general. Sustituyendo el desarrollo en serie de potencias de  $v_2$  en esta última ecuación multiplicada por  $x$  se obtiene

$$\sum_{k=0}^{\infty} [k(k-1) + k] c_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+2} + 2x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{k!^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1} = 0,$$

es decir

$$c_1 x + \sum_{l=2}^{\infty} (l^2 c_l + c_{l-2}) x^l + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{4^k k!^2} x^{2k} = 0. \quad (3.110)$$

De esta relación se deduce en primer lugar que  $c_1 = 0$ . Como la última serie no contiene más que potencias pares, la relación de recurrencia para las potencias impares

$$(2k+1)^2 c_{2k+1} = -c_{2k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

implica que todos los coeficientes impares son nulos:

$$c_{2k+1} = 0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.111)$$

Definiendo  $b_k = c_{2k}$  e igualando a cero el coeficiente de  $x^{2k}$  en (3.110) se obtiene la relación de recurrencia para los coeficientes pares:

$$\boxed{-k^2 b_k = \frac{1}{4} b_{k-1} + \frac{k}{(-4)^k k!^2}}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.112)$$



Multiplicando ambos miembros de esta relación por  $(-4)^k(k-1)!$  y llamando  $\beta_k = -(-4)^k k!^2 b_k$  se obtiene

$$\beta_k = \beta_{k-1} + \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

La solución de esta relación de recurrencia es inmediata:

$$\beta_k = \frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + \dots + 1 + \beta_0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Al ser  $\beta_0 = -b_0 = -c_0 = 0$  se tiene finalmente

$$b_k = \frac{(-1)^{k+1}}{4^k k!^2} \sum_{l=1}^k \frac{1}{l}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Hemos probado por tanto que una segunda solución linealmente independiente de la ecuación de Bessel de orden 0 está dada por

$$N_0(x) = J_0(x) \log x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!^2} \left( \sum_{l=1}^k \frac{1}{l} \right) \left( \frac{x}{2} \right)^{2k}. \quad (3.113)$$

La función  $N_0$  se denomina **función de Neumann de orden cero**. Nótese que la función  $N_0$ , a diferencia de la otra solución  $J_0$ , no es analítica en el origen, donde se comporta como  $\log x$ :

$$N_0(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \log x.$$

En la práctica, en lugar de la función de Neumann  $N_0$  se suele escoger como segunda solución linealmente independiente la combinación lineal de  $J_0$  y  $N_0$  dada por

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} [N_0(x) - (\log 2 - \gamma)J_0(x)],$$

donde

$$\gamma = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sum_{l=1}^k \frac{1}{l} - \log k \right) = 0,5772156649 \dots$$

es la llamada *constante de Euler-Mascheroni*<sup>1</sup>. La función  $Y_0$  (que también diverge logarítmicamente en el origen) se suele denominar **función de Bessel de segunda especie de orden cero**. La solución general de la ecuación de Bessel de orden 0 es por tanto

$$u(x) = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x),$$

con  $C_1$  y  $C_2$  constantes reales.

Para  $\nu \equiv n = 1, 2, \dots$ , un cálculo parecido al anterior pero algo más complicado demuestra que una segunda solución de la ecuación de Bessel de orden  $n$  linealmente independiente de  $J_n$  está dada por la **función de Neumann de orden  $n$**

$$N_n(x) = J_n(x) \log x - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left( \frac{x}{2} \right)^{2k-n} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left( \sum_{l=1}^k \frac{1}{l} + \sum_{l=1}^{k+n} \frac{1}{l} \right) \left( \frac{x}{2} \right)^{2k+n} \quad (3.114)$$

<sup>1</sup>Uno de los problemas abiertos más importantes de la teoría de números es determinar si la constante de Euler-Mascheroni es o no racional. De hecho, se sabe que si fuera  $\gamma = p/q$  con  $p, q \in \mathbb{N}$  primos entre sí, entonces necesariamente  $q > 10^{242080}$ .

(donde se sobreentiende que la suma  $\sum_{l=1}^k \frac{1}{l}$  no aparece si  $k = 0$ ). De nuevo, es más habitual usar como segunda solución de la ecuación de Bessel de orden  $n$  la **función de Bessel de segunda especie y orden  $n$**  definida por

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi} [N_n(x) - (\log 2 - \gamma)J_n(x)],$$

en términos de la cual la solución general de la ecuación de Bessel de orden  $n = 0, 1, \dots$  está dada por

$$u(x) = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

**Comentario.** Si se define

$$Y_\nu(x) = \frac{\cos(\nu\pi) J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}, \quad \nu \neq 0, 1, \dots,$$

entonces  $J_\nu$  e  $Y_\nu$  forman un sistema fundamental de soluciones de la ecuación de Bessel de orden  $\nu$  también para  $\nu \neq 0, 1, \dots$ . Se demuestra que

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(x), \quad n = 0, 1, \dots,$$

lo que explica la elección de las constantes en la definición de  $Y_n$ .

El comportamiento asintótico (para  $x \rightarrow \infty$ ) de las funciones de Bessel de primera y segunda especie está dado por la fórmula

$$J_\nu(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$Y_\nu(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

En particular, las funciones de Bessel de primera y segunda especie tienen infinitos ceros en el eje real positivo, y presentan un comportamiento oscilatorio amortiguado para  $x \rightarrow \infty$ .

Las funciones de Bessel satisfacen ciertas relaciones de recurrencia, que se pueden deducir de las dos identidades

$$(x^\nu J_\nu)' = x^\nu J_{\nu-1} \tag{3.115}$$

$$(x^{-\nu} J_\nu)' = -x^{-\nu} J_{\nu+1}. \tag{3.116}$$

Para probar la primera de estas identidades basta utilizar el desarrollo en serie (3.102) de  $J_\nu$ , que proporciona

$$(x^\nu J_\nu)' = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^\nu}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(k+\nu)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^\nu (k + \nu)}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2\nu-1} = x^\nu J_{\nu-1}.$$

La identidad (3.116) se prueba de forma semejante. Las funciones de Bessel de segunda especie  $Y_\nu$  satisfacen también las identidades (3.115)–(3.116), aunque aquí no demostraremos este resultado. Sumando y restando las identidades (3.115)–(3.116) multiplicadas por  $x^{-\nu}$  y  $x^\nu$ , respectivamente, se obtienen las siguientes relaciones entre funciones de Bessel de distintos índices y sus derivadas:

$$J_{\nu-1} - J_{\nu+1} = 2J'_\nu \tag{3.117}$$

$$J_{\nu-1} + J_{\nu+1} = \frac{2\nu}{x} J_\nu. \tag{3.118}$$

La segunda de estas identidades se puede utilizar para calcular de forma recursiva las funciones de Bessel de índice  $\nu + k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) a partir de  $J_\nu$  y  $J_{\nu-1}$ . Por ejemplo, las funciones de Bessel de índice entero positivo se pueden expresar en términos de  $J_0$  y  $J_1$ . Del mismo modo, la expresión (3.107) para las funciones de Bessel de orden semientero se deduce fácilmente de la relación (3.118) y las ecuaciones (3.108). Nótese, por último, que las funciones de Bessel de segunda especie también satisfacen las relaciones (3.117)–(3.118), ya que éstas son consecuencia de (3.115)–(3.116).



## Capítulo 4

# Sistemas dinámicos en el plano

### 4.1 Resultados generales

En este capítulo estudiaremos un tipo importante de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en que no aparece explícitamente la variable independiente, que en las aplicaciones representa normalmente el **tiempo**. Denotaremos por ello dicha variable como  $t$ , mientras que  $x = (x_1, \dots, x_n)$  será utilizado frecuentemente para designar la variable independiente. Utilizaremos también la notación usual  $\dot{x}$  para la derivada temporal  $\frac{dx}{dt}$ .

**Definición 4.1.** Un **sistema dinámico** (o **autónomo**) en  $\mathbb{R}^n$  es un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma

$$\boxed{\dot{x} = f(x)}, \quad (4.1)$$

donde la función vectorial  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  no depende del tiempo  $t$ .

**Comentario.** Un sistema arbitrario (es decir, no necesariamente autónomo)

$$\frac{dy}{dt} = g(t, y) \quad (4.2)$$

puede convertirse fácilmente en un sistema dinámico. En efecto, si  $y(t)$  es una solución de (4.2), entonces  $x(s) \equiv (s, y(s))$  es solución del sistema dinámico

$$\frac{dx}{ds} = f(x), \quad f(x) = (1, g(x)).$$

Recíprocamente, las soluciones de este sistema con la condición inicial  $t(0) = 0$  son de la forma  $(t, y(t))$ , con  $y(t)$  solución de (4.2).

Supondremos en lo que sigue que la función  $f$  es de clase  $C^1$  en un abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Por tanto  $f$ , considerada como función de  $\mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  independiente de la variable  $t$ , es de clase  $C^1$ . Por el Corolario 1.22, dado cualquier dato inicial  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times U$  localmente hay una única solución  $x(t; t_0, x_0)$  del sistema dinámico que satisface la condición inicial

$$x(t_0; t_0, x_0) = x_0.$$

Si  $t_0 = 0$ , escribiremos normalmente  $x(t; x_0)$  en lugar de  $x(t; 0, x_0)$ .

**Ejemplo 4.2.** Uno de los ejemplos más sencillos y a la vez importantes de sistema dinámico son las ecuaciones de Newton

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}), \quad \mathbf{r} \equiv (x_1, x_2, x_3), \quad (4.3)$$

que describen el movimiento de una partícula de masa unidad sometida a una fuerza externa  $\mathbf{F}$  independiente del tiempo. Introduciendo las componentes de la velocidad  $v_i = \dot{x}_i$  y llamando

$$x = (x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^6,$$

las ecuaciones (4.3) se convierten en el sistema dinámico (4.1) con  $f : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$  dada por

$$f(x) = (v_1, v_2, v_3, F_1(x), F_2(x), F_3(x)).$$

**Definición 4.3.** Una **trayectoria** del sistema dinámico (4.1) es la gráfica  $(t, x(t))$  de cualquier solución  $x(t)$ , donde  $t$  pertenece a un intervalo  $I$ .

Nótese por tanto que las trayectorias son curvas en  $\mathbb{R} \times U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , parametrizadas además de una forma especial (es decir, utilizando la primera coordenada como parámetro de la curva).

**Definición 4.4.** Una **órbita** del sistema dinámico (4.1) es una curva  $\gamma \subset U \subset \mathbb{R}^n$  (considerada como *conjunto de puntos*) que se puede parametrizar con una solución  $x(t)$  del sistema (4.1), es decir tal que

$$\boxed{\gamma = \{x(t) : t \in I\}}, \quad (4.4)$$

para alguna solución  $x(t)$  del sistema.

Por lo tanto, la proyección de una trayectoria  $(t, x(t)) \in \mathbb{R} \times U$  sobre  $U \subset \mathbb{R}^n$  es una órbita, y recíprocamente toda órbita se puede parametrizar de modo que sea la proyección sobre  $U$  de una trayectoria (ver Fig. 4.1).

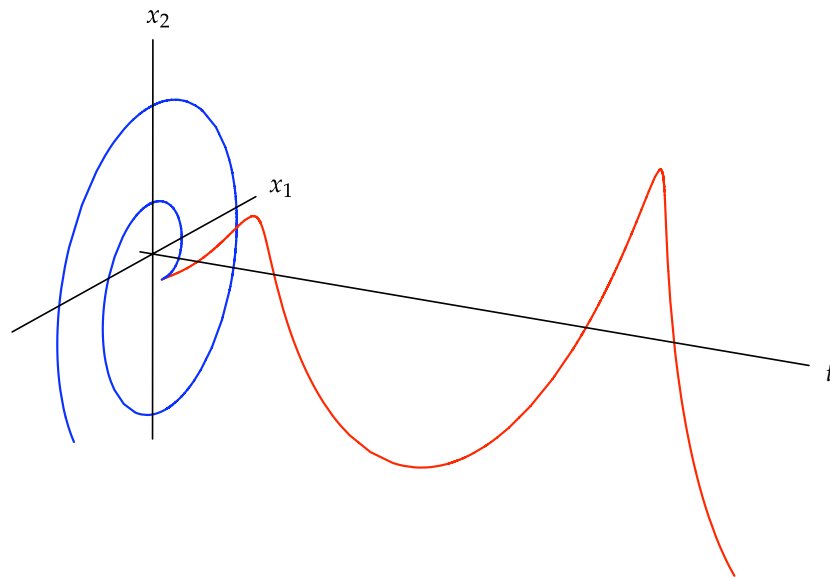


Figura 4.1: Trayectoria de un sistema dinámico en dos dimensiones (en rojo) y su correspondiente órbita (en azul).

**Definición 4.5.** Se llama **espacio de fases** del sistema dinámico  $n$ -dimensional (4.1) al abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$  en que  $f$  está definida (y es de clase  $C^1$ ), mientras que el cilindro  $\mathbb{R} \times U \subset \mathbb{R}^{n+1}$  se denomina **espacio de fases ampliado**. Llamaremos también **mapa de fases** del sistema dinámico (4.1) al conjunto de todas sus órbitas.

**Ejemplo 4.6.** La ecuación del oscilador armónico (con frecuencia  $\omega = 1$ )

$$\ddot{u} + u = 0$$

puede escribirse como el sistema dinámico plano (es decir, con  $n = 2$ )

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1, \end{cases} \quad (4.5)$$

siendo  $x_1 = u$  y  $x_2 = \dot{u}$ . El sistema (4.5) es de hecho un sistema lineal homogéneo con coeficientes constantes  $\dot{x} = Ax$ , donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo visto en el Capítulo 2, la solución general del sistema es

$$x(t) = e^{tA}x_0 = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cos t + \beta \sin t \\ -\alpha \sin t + \beta \cos t \end{pmatrix},$$

con  $x_0 = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ . Las trayectorias del sistema son por tanto las *hélices*

$$t \mapsto (t, \alpha \cos t + \beta \sin t, -\alpha \sin t + \beta \cos t) \in \mathbb{R}^3, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Nótese que las trayectorias son curvas en  $\mathbb{R}^3$ . Las órbitas del sistema son las proyecciones de las hélices anteriores sobre las dos últimas coordenadas, es decir las curvas *planas* parametrizadas por

$$t \mapsto (\alpha \cos t + \beta \sin t, -\alpha \sin t + \beta \cos t).$$

Las *ecuaciones paramétricas* de las órbitas son por tanto

$$x_1 = \alpha \cos t + \beta \sin t, \quad x_2 = -\alpha \sin t + \beta \cos t.$$

Eliminando el parámetro  $t$  obtenemos la *ecuación implícita* de las órbitas

$$x_1^2 + x_2^2 = \alpha^2 + \beta^2,$$

que representa una familia de circunferencias de centro el origen y radio  $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ .

La siguiente proposición pone de manifiesto la propiedad fundamental de los sistemas autónomos:

**Proposición 4.7.** Si  $x(t)$  es solución del sistema dinámico (4.1) y  $c \in \mathbb{R}$ , entonces  $x(t+c)$  es también solución de dicho sistema.

*Demostración.* Si  $y(t) = x(t+c)$  entonces

$$\dot{y}(t) = \dot{x}(t+c) = f(x(t+c)) = f(y(t)).$$

□

Por el teorema de unicidad, al ser  $f \in C^1(U)$  dos trayectorias del sistema no se pueden cortar, ya que en caso contrario las soluciones correspondientes a dichas trayectorias tendrían ambas el mismo dato inicial (el punto de corte). Este resultado es cierto también para sistemas no autónomos. Sin embargo, los sistemas autónomos satisfacen una condición más fuerte:

**Proposición 4.8.** Las órbitas del sistema dinámico (4.1) no se cortan.

*Demostración.* Supongamos, en efecto, que dos órbitas distintas  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  se cortaran en el punto  $x_0 \in U$ . Sean  $x^1(t)$  y  $x^2(t)$  las soluciones del sistema correspondientes a dichas órbitas. Por hipótesis, existen dos tiempos  $t_1$  y  $t_2$  tales que

$$x^1(t_1) = x^2(t_2) = x_0. \quad (4.6)$$

Por el resultado anterior, las funciones  $y^1(t) = x^1(t + t_1)$  e  $y^2(t) = x^2(t + t_2)$  son ambas solución del sistema, y por (4.6) satisfacen la condición inicial

$$y^1(0) = y^2(0) = x_0.$$

Por el teorema de unicidad,  $y^1(t) = y^2(t)$  en un entorno de  $t = 0$ , y por tanto las funciones  $x^1$  y  $x^2$  parametrizan la misma curva en un entorno de  $x_0$  (pues  $x^1(t) = x^2(t + t_2 - t_1)$  en un entorno de  $t = t_1$ ).  $\square$

De la demostración anterior también se sigue que si  $\gamma$  es una órbita de (4.1) y  $x(t)$  es una solución del sistema que parametriza  $\gamma$ , entonces las únicas soluciones del sistema que parametrizan dicha órbita son de la forma  $x(t + c)$  con  $c \in \mathbb{R}$  constante. En otras palabras, *la parametrización de cualquier órbita de un sistema dinámico está determinada salvo por una traslación temporal.* (En lo anterior se sobreentiende que nos referimos a parametrizaciones de las órbitas con soluciones del sistema.) En particular, el *sentido de recorrido (orientación)* de las órbitas está bien determinado, ya que  $x(t)$  y  $x(t + c)$  determinan la misma orientación.

De la Proposición 4.8 se sigue también que las órbitas *cerradas* de un sistema autónomo (de clase  $C^1$ ) han de ser necesariamente curvas cerradas *simples* (sin autointersecciones). En efecto, si una órbita cerrada del sistema (4.1) se autointersecara en un punto  $x_0$  entonces por dicho punto pasarían en realidad *dos* órbitas distintas del sistema.

**Comentario.** Geométricamente, el sistema dinámico (4.1) admite la siguiente interpretación sencilla. La función  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  que define el sistema es un **campo de vectores** en  $U \subset \mathbb{R}^n$ , que a cada punto  $x$  de  $U$  le asigna el vector  $f(x) \in \mathbb{R}^n$  (piénsese, por ejemplo, en el caso  $n = 3$ ). Si  $\gamma$  es una órbita del sistema y  $x_0$  es un punto cualquiera de  $\gamma$ , el vector  $f(x_0)$  es *tangente a  $\gamma$  en  $x_0$* , y su *sentido* coincide con la *orientación* de  $\gamma$  (véase la Fig. 4.2). En efecto, si  $x(t)$  es una solución de (4.1) que parametriza a  $\gamma$  entonces  $x_0 = x(t_0)$  para algún  $t_0$ , y por tanto (al ser  $x(t)$  solución del sistema)  $\dot{x}(t_0) = f(x(t_0)) = f(x_0)$  es tangente a la curva  $t \mapsto x(t)$ , es decir a  $\gamma$ , en el punto  $x(t_0) = x_0$ .

**Proposición 4.9.** Una órbita del sistema (4.1) es cerrada si y sólo si las soluciones del sistema que la parametrizan son funciones periódicas.

*Demostración.* En primer lugar, nótese que la condición del enunciado tiene sentido, ya que acabamos de ver que las soluciones que parametrizan una órbita difieren en una traslación en el tiempo. Si  $x(t)$  es una solución de (4.1) de período  $T > 0$ , la órbita

$$\gamma = \{x(t) : t_0 \leq t < t_0 + T\}$$

parametrizada por dicha solución es obviamente cerrada, ya que  $x(t_0) = x(t_0 + T)$ . Recíprocamente, supongamos que  $\gamma$  es una órbita cerrada del sistema, y sea  $x(t)$  una solución que parametrice  $\gamma$ . Si la órbita se reduce a un punto, entonces  $x(t)$  es constante y por tanto periódica. En caso contrario, si  $x(a)$  es un punto de  $\gamma$  entonces existe un mínimo valor de  $b > a$  tal que  $x(a) = x(b)$ , por ser la curva  $\gamma$  cerrada. Esto implica que  $x(t)$  y  $x(t + b - a)$  son dos soluciones del sistema que verifican la misma condición inicial en  $t = a$ . Por el teorema de unicidad,  $x(t) = x(t + b - a)$  para todo  $t$ , y por tanto la solución  $x(t)$  tiene período  $b - a$ .  $\square$



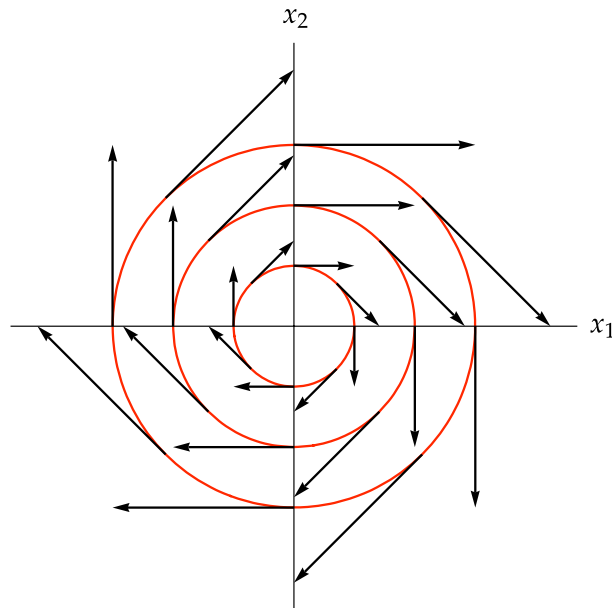


Figura 4.2: Campo de vectores y órbitas (en rojo) del sistema lineal (4.5).

Por definición, el **período** de una órbita cerrada del sistema (4.1) es el (menor) período de cualquier solución del sistema que parametrize dicha curva.

**Ejemplo 4.10.** Las curvas del sistema dinámico (4.5) se pueden escribir como sigue:

$$x(t) = r(\cos(t - t_0), -\sin(t - t_0))$$

siendo  $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$  y

$$\alpha = r \cos t_0, \quad \beta = r \sin t_0.$$

Otra parametrización de la misma órbita es  $x(t) = r(\cos t, -\sin t)$ . Las órbitas son, por tanto, circunferencias centradas en el origen y orientadas en sentido *horario*. En este caso, *todas* las órbitas del sistema son cerradas y tienen el mismo período ( $2\pi$ ). En general, sin embargo, dos órbitas cerradas distintas de un sistema dinámico tienen períodos distintos.

Es posible encontrar la ecuación cartesiana (o implícita) de las órbitas de un sistema sin hallar antes sus soluciones. Para ello parametrizamos la órbita  $\gamma$  utilizando como parámetro una de las coordenadas, por ejemplo la primera. Por el teorema de la función inversa, esto podremos hacerlo localmente en un entorno de cualquier punto en que  $\dot{x}_1 \neq 0$ , es decir en que  $f_1(x) \neq 0$ . La órbita vendrá por tanto descrita localmente con una parametrización de la forma  $x_1 \mapsto (x_1, x_2(x_1), \dots, x_n(x_1))$ . Para determinar las funciones  $x_i(x_1)$  ( $2 \leq i \leq n$ ), obsérvese que

$$\frac{dx_i}{dx_1} = \frac{\dot{x}_i}{\dot{x}_1} = \frac{f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}{f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}, \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

La ecuación diferencial de las órbitas en esta parametrización es por tanto el siguiente sistema, en general *no autónomo*, de orden  $n - 1$ :

$$\boxed{\frac{dx_i}{dx_1} = \frac{f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}{f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}, \quad i = 2, 3, \dots, n.} \quad (4.7)$$

Obsérvese que esta parametrización sólo tiene sentido en puntos en que  $f_1(x) \neq 0$ . Por ejemplo, en el caso de un sistema plano, que normalmente escribiremos

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases} \quad (4.8)$$

las ecuaciones diferenciales de las órbitas son

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}, \quad \text{si } f(x, y) \neq 0, \quad (4.9)$$

o bien

$$\frac{dx}{dy} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}, \quad \text{si } g(x, y) \neq 0. \quad (4.10)$$

Por ejemplo, para el sistema lineal

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

estudiado anteriormente, la ecuación de las órbitas tomando  $x$  como variable independiente es

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad y \neq 0,$$

que es de variables separadas y se integra fácilmente:

$$x^2 + y^2 = c, \quad c \geq 0 \in \mathbb{R}.$$

Como ya vimos anteriormente, las órbitas son circunferencias centradas en el origen.

Los únicos puntos del espacio de fases en que no es posible parametrizar las órbitas tomando como parámetro alguna de las coordenadas son los puntos en que *todas* las funciones  $f_i$  se anulan simultáneamente. Estos puntos, de importancia fundamental para entender el comportamiento cualitativo del sistema dinámico correspondiente, reciben el nombre de puntos críticos o equilibrios del sistema:

**Definición 4.11.** Un punto  $x_0 \in U$  es un **punto crítico** del sistema dinámico (4.1) si  $f(x_0) = 0$ .

Si  $x_0$  es un punto crítico del sistema (4.1), dicho sistema posee obviamente la solución *constante*  $x(t) = x_0$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Esta es la razón por la cual a los puntos críticos de un sistema dinámico se les llama también **equilibrios**. Visto de otra forma, un punto crítico es una órbita del sistema dinámico (4.1) que se reduce a un punto. Por la Proposición 4.8, ninguna órbita del sistema puede contener a un punto crítico  $x_0$ . Obsérvese, sin embargo, que una órbita  $x(t)$  puede “entrar” en un equilibrio  $x_0$  (si  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0$ ) o “salir” de él (si  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = x_0$ ).

En un sistema dinámico, los equilibrios son los puntos más interesantes. En efecto, si  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  *no* es un equilibrio (es decir, si  $f(x_0) \neq 0$ ) se puede probar que es posible realizar un cambio de variables local  $y = Y(x)$  de forma que en la variable  $y$  el sistema dinámico (4.1) se escriba

$$\dot{y}_1 = 1, \quad \dot{y}_2 = \dots = \dot{y}_n = 0.$$

En las nuevas coordenadas  $y_1, \dots, y_n$ , las órbitas del sistema en las proximidades del punto  $y_0 = Y(x_0)$  son simplemente rectas paralelas al eje  $y_1$ .

**Definición 4.12.** Sea  $x_0$  un punto crítico del sistema dinámico (4.1). Entonces:

- i)  $x_0$  es un punto crítico **aislado** si el sistema no tiene ningún punto crítico en un entorno perforado  $0 < \|x - x_0\| < \varepsilon$ , con  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño.
- ii)  $x_0$  es un punto crítico **elemental** (también llamado *simple* o *no degenerado*) si  $\det Df(x_0) \neq 0$ .
- iii)  $x_0$  es un punto crítico **hiperbólico** si todos los autovalores de  $Df(x_0)$  tienen parte real no nula.

**Proposición 4.13.**  $x_0$  punto crítico hiperbólico  $\implies x_0$  punto crítico elemental  $\implies x_0$  punto crítico aislado.

*Demostración.* La primera implicación es trivial, ya que si  $\det Df(x_0) = 0$  algún autovalor de  $Df(x_0)$  es igual a cero, y por tanto  $x_0$  no es un punto crítico hiperbólico. En cuanto a la segunda, por el teorema de la función inversa existe un entorno  $V = B_\varepsilon(x_0)$  de  $x_0$  en que  $f$  es invertible. Por tanto, si  $x \in V$  y  $f(x) = 0 = f(x_0)$  entonces  $x = x_0$ .  $\square$

**Ejemplo 4.14.** Estudiemos cómo son los puntos críticos del sistema dinámico *lineal*

$$\dot{x} = Ax \tag{4.11}$$

en términos de la matriz  $A$ . En primer lugar,  $x_0$  es un punto crítico de (4.11) si y sólo si  $Ax_0 = 0$ . Hay por tanto dos posibilidades:

- i)  $\det A \neq 0$ . En este caso el único punto crítico es  $x_0 = 0$ , que es por tanto aislado. De hecho es elemental, ya que al ser  $f(x) = Ax$  lineal se tiene  $Df(x_0) = A$  para todo  $x_0$ . Por último,  $x_0 = 0$  es un punto crítico hiperbólico si y sólo si todos los autovalores de  $A$  tienen parte real no nula.
- ii)  $\det A = 0$ . Ahora las soluciones de  $Ax_0 = 0$  forman un subespacio lineal (el núcleo de la matriz  $A$ ) no nulo, y por tanto hay infinitos puntos críticos no aislados.

La importancia de los sistemas dinámicos lineales estriba en que un sistema dinámico arbitrario se puede aproximar por un sistema lineal apropiado en las proximidades de cualquier equilibrio  $x_0$ . En efecto, por definición de derivada

$$f(x) = f(x_0) + Df(x_0) \cdot (x - x_0) + \varepsilon(x) = Df(x_0) \cdot (x - x_0) + \varepsilon(x),$$

siendo  $\|\varepsilon(x)\|$  “muy pequeño” frente a  $\|x - x_0\|$ , es decir tal que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|\varepsilon(x)\|}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Es razonable por tanto pensar que el sistema dinámico (4.1) se pueda “aproximar” (en un sentido que precisaremos a continuación) en las proximidades del equilibrio  $x_0$  por el sistema lineal

$$\boxed{\dot{y} = Df(x_0) \cdot y}, \tag{4.12}$$

siendo  $y = x - x_0$  la **desviación del equilibrio**. Diremos que (4.12) es la **aproximación lineal** de (4.1) en el punto crítico  $x_0$ . El mapa de fases de (4.1) en un entorno de  $x_0$  y el de su aproximación lineal (4.12) en un entorno del origen deberían ser cualitativamente semejantes. En general, sin embargo, esto sólo es cierto si el punto crítico  $x_0$  es hiperbólico<sup>1</sup>. Por ejemplo, puede probarse que si  $x_0$  es un punto crítico hiperbólico de (4.1) su estabilidad puede determinarse estudiando la estabilidad de la aproximación lineal en  $x_0$ :

<sup>1</sup>Intuitivamente, esto se debe a que si el punto crítico es hiperbólico una pequeña perturbación del sistema lo transformará en un punto crítico hiperbólico. La hiperbolicidad de un punto crítico es por tanto *genérica*.

**Teorema 4.15.** Si  $x_0$  es un punto crítico hiperbólico del sistema dinámico (4.1), entonces la solución constante  $x_0$  tiene el mismo tipo de estabilidad para (4.1) que la solución trivial para su aproximación lineal en  $x_0$  (4.12).

En otras palabras,  $x_0$  es *asintóticamente estable* si todos los autovalores de  $Df(x_0)$  tienen parte real *negativa*, e *inestable* si algún autovalor de  $Df(x_0)$  tiene parte real *positiva*.

## 4.2 Sistemas lineales

En esta sección nos centraremos en el estudio de sistemas dinámicos lineales en el plano, de la forma

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}). \quad (4.13)$$

Sean

$$\tau \equiv \operatorname{tr} A = a + d, \quad \delta \equiv \det A = ad - bc \quad (4.14)$$

los invariantes de la matriz  $A$ . Discutiremos únicamente el caso más interesante en que la matriz  $A$  es no degenerada, es decir  $\delta \neq 0$ , y por tanto el origen es un punto crítico elemental del sistema lineal (4.13). El polinomio característico de  $A$  es

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - \tau\lambda + \delta, \quad (4.15)$$

con discriminante  $\tau^2 - 4\delta$ . Sea  $X = (x, y)$ , y efectuemos un cambio de variables dependientes real

$$X = PZ, \quad \text{con } P \in M_2(\mathbb{R}) \text{ tal que } \det P \neq 0.$$

Entonces

$$\dot{X} = P\dot{Z} = AX \implies \dot{Z} = P^{-1}AX = (P^{-1}AP)Z$$

y por tanto  $Z(t)$  es solución del sistema lineal

$$\dot{Z} = (P^{-1}AP)Z. \quad (4.16)$$

Nótese que los mapas de fases de (4.13) y (4.16) son *linealmente equivalentes*, ya que se pasa de uno al otro mediante el cambio de variable lineal  $X = PZ$ . Se pueden dar los siguientes casos, dependiendo de cómo sean los autovalores de la matriz  $A$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(I) reales} \\ \text{(II) complejos conjugados} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{(I.a) de distinto signo} \\ \text{(I.b) del mismo signo} \\ \text{(II.a) parte real no nula} \\ \text{(II.b) parte real nula} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{(I.b.1) distintos} \\ \text{(I.b.2) iguales, con } A = \lambda \mathbb{1} \\ \text{(I.b.3) iguales, con } A \neq \lambda \mathbb{1} \end{array} \right.$$

(I) *Autovalores reales*  $\iff \tau^2 - 4\delta \geq 0$

En este caso se puede escoger la matriz  $P$  de modo que sus columnas formen una base de Jordan de  $A$ . Entonces

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \varepsilon & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad (4.17)$$

siendo  $\lambda_1 \leq \lambda_2$  los dos autovalores de  $A$ , con  $\varepsilon = 0$  si  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  o si  $A$  es proporcional a la identidad, y  $\varepsilon = 1$  en caso contrario. Obsérvese que, por la invariancia de la traza y el determinante bajo transformaciones de semejanza,

$$\tau = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \delta = \lambda_1 \lambda_2. \quad (4.18)$$

(I.a) *Autovalores de signos opuestos*  $\iff \delta < 0$

Nótese que  $\delta < 0 \implies \tau^2 - 4\delta > 0$ . Si  $Z = (z_1, z_2)$ , la solución general del sistema en  $Z$  es

$$z_1 = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad z_2 = c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (4.19)$$

con  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$  y  $c_1, c_2$  constantes arbitrarias. La ecuación cartesiana de las órbitas se deduce fácilmente de la anterior:

$$z_2 = c |z_1|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, \quad c \in \mathbb{R}, \quad (4.20)$$

junto con  $z_1 = 0$  (en realidad, se trata de las dos órbitas  $\{z_1 = 0, z_2 > 0\}$  y  $\{z_1 = 0, z_2 < 0\}$ , junto con el origen). Nótese que las dos soluciones

$$Z(t) = \pm(1, 0)e^{\lambda_1 t}$$

parametrizan el eje  $z_1$  (menos el origen) y “entran” en el punto crítico (el origen), al ser  $\lambda_1$  negativo, mientras que las soluciones

$$Z(t) = \pm(0, 1)e^{\lambda_2 t}$$

parametrizan el eje  $z_2$  y “salen” del origen (al ser  $\lambda_2 > 0$ ). Si efectuamos la transformación lineal  $X = PZ$  para pasar a las variables originales  $X = (x, y)$ , el mapa de fases es semejante. En particular, los ejes  $z_1$  y  $z_2$  se transforman en dos rectas dirigidas en la dirección de los dos autovectores linealmente independientes de la matriz  $A$ . En este caso se dice que el origen es un **punto de silla** del sistema (4.13) (véase la Fig. 4.3).

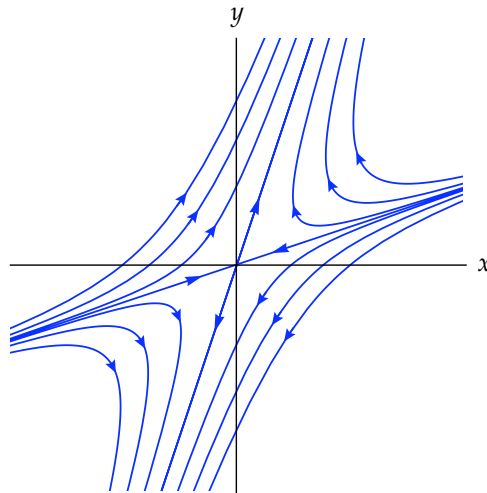


Figura 4.3: Mapa de fases de un sistema lineal con un punto de silla en el origen.

(I.b) *Autovalores del mismo signo*  $\iff \tau^2 - 4\delta \geq 0, \delta > 0$

Nótese que las desigualdades  $\delta > 0$  y  $\tau^2 - 4\delta \geq 0$  implican que  $\tau \neq 0$ . Por (4.18) los dos autovalores tienen el mismo signo que  $\tau$ . Es conveniente distinguir los siguientes subcasos:

(I.b.1) *Autovalores distintos*  $\iff \tau^2 - 4\delta > 0, \delta > 0$

La solución del sistema y la ecuación de las órbitas todavía están dados por (4.19) y (4.20), respectivamente. Sin embargo, al ser los dos autovalores de igual signo, todas las soluciones tienden al origen para  $t \rightarrow \infty$  si  $\tau < 0$  (es decir, si  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ ), o para  $t \rightarrow -\infty$  si  $\tau > 0$  ( $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ ). Nótese además que si  $\tau > 0$  y  $c_1 \neq 0$  entonces

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\dot{z}_2(t)}{\dot{z}_1(t)} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\lambda_2 c_2}{\lambda_1 c_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} = 0.$$

Por tanto si  $\tau > 0$  todas las órbitas excepto la recta  $z_1 = 0$  salen del origen con pendiente cero. Análogamente, si  $\tau < 0$  y  $c_2 \neq 0$  todas las órbitas excepto  $z_2 = 0$  entran en el origen tangentes al eje  $z_2$ .

En las coordenadas originales  $X = (x, y)$ , todas las órbitas entran o salen del origen según sea  $\tau < 0$  ó  $\tau > 0$ . Dichas órbitas entran o salen del origen tangentes a la recta paralela al autovector correspondiente al menor autovalor en valor absoluto, excepto la recta paralela al otro autovector. Diremos que el origen es un **nodo estable** si  $\tau < 0$ , y un **nodo inestable** si  $\tau > 0$  (véase la Fig. 4.4).

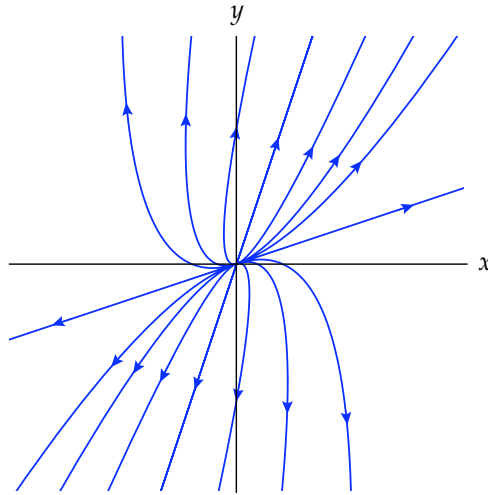


Figura 4.4: Mapa de fases de un sistema lineal con un nodo inestable en el origen.

(I.b.2) *Autovalores iguales* ( $\iff \tau^2 - 4\delta = 0$ ),  $A = \lambda \mathbb{1}$

Nótese que la condición  $\tau^2 - 4\delta = 0$  implica que  $\delta > 0$ , ya que estamos suponiendo que  $\delta \neq 0$ . Las soluciones son las rectas  $X = ve^{\lambda t}$ , con  $v \in \mathbb{R}^2$  arbitrario y  $\lambda = \tau/2$ . De nuevo, si  $\tau > 0$  las órbitas salen del origen, y entran en el origen si  $\tau < 0$ . Se dice en este caso que el origen es un **nodo propio** o **estelar** (estable si  $\tau < 0$ , inestable si  $\tau > 0$ ).

(I.b.3) *Autovalores iguales* ( $\iff \tau^2 - 4\delta = 0$ ),  $A \neq \lambda \mathbb{1}$

En este caso la forma canónica de Jordan de  $A$  es

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda = \frac{\tau}{2}.$$

Nótese que la matriz  $A$  tiene un sólo autovector linealmente independiente, que está dado por la segunda columna de  $P$ . La solución del sistema (4.16) es ahora

$$z_1 = c_1 e^{\lambda t}, \quad z_2 = (c_1 t + c_2) e^{\lambda t} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

La ecuación de las órbitas es

$$z_2 = z_1 \left( \frac{1}{\lambda} \log |z_1| + c \right), \quad c \in \mathbb{R},$$

junto con  $z_1 = 0$ . (Nótese que  $\lambda \neq 0$ , ya que  $\delta = \lambda^2 \neq 0$ .) De nuevo, todas las órbitas entran en el origen (resp. salen del origen) si  $\tau < 0$  (resp.  $\tau > 0$ ). Además, si  $c_1 \neq 0$  entonces

$$\frac{\dot{z}_2(t)}{\dot{z}_1(t)} = \frac{\lambda c_1 t + (c_1 + \lambda c_2)}{\lambda c_1} = t + \left( \frac{c_2}{c_1} + \frac{1}{\lambda} \right) \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} \pm\infty,$$

por lo que todas las órbitas entran o salen del origen tangentes al eje  $z_2$ . En las coordenadas de partida  $(x, y)$ , las órbitas entran o salen del origen (según sea  $\tau < 0$  ó  $\tau > 0$ ) tangentes a la recta determinada por el autovector de la matriz  $A$ . Se dice en este caso que el origen es un **nodo de una tangente**, estable si  $\tau < 0$  e inestable si  $\tau > 0$  (véase la Fig. 4.5).

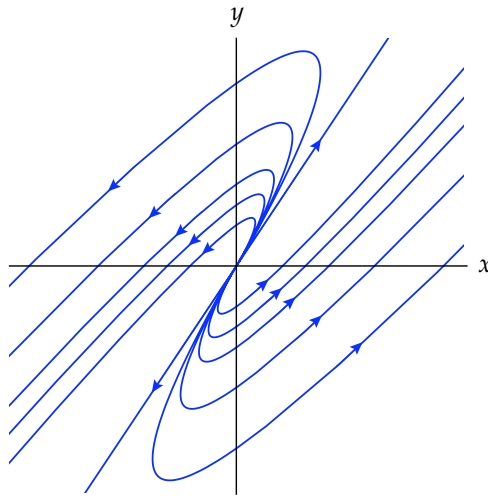


Figura 4.5: Mapa de fases de un sistema lineal con un nodo inestable de una tangente en el origen.

(II) *Autovalores complejos conjugados*  $\iff \tau^2 - 4\delta < 0$

En este caso los autovalores son  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ , con  $\beta > 0$ . Existe por tanto un vector no nulo  $w = u + iv \in \mathbb{C}^2$  tal que

$$Aw = (\alpha + i\beta)w. \quad (4.21)$$

De hecho,  $u$  y  $v$  son linealmente independientes, ya que si por ejemplo  $v = cu$ , entonces  $w = (1 + ic)u$  implicaría que  $u$  es un autovector real de la matriz real  $A$  con autovalor  $\alpha + i\beta$  complejo, lo cual no es posible. Tomando la parte real e imaginaria de (4.21) obtenemos las dos igualdades reales

$$Au = \alpha u - \beta v, \quad Av = \beta u + \alpha v.$$

Por tanto, si  $P = (u \ v)$ , entonces  $P$  es invertible y

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

De la invariancia de la traza y el determinante bajo transformaciones lineales se sigue que

$$\tau = 2\alpha, \quad \delta = \alpha^2 + \beta^2. \quad (4.22)$$

Efectuando el cambio  $X = PZ$  obtenemos el sistema lineal en  $Z$

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= \alpha z_1 + \beta z_2 \\ \dot{z}_2 &= -\beta z_1 + \alpha z_2.\end{aligned}\tag{4.23}$$

Introduciendo las coordenadas polares

$$z_1 = r \cos \theta, \quad z_2 = r \operatorname{sen} \theta$$

se tiene

$$\begin{aligned}r^2 = z_1^2 + z_2^2 &\implies r \dot{r} = z_1 \dot{z}_1 + z_2 \dot{z}_2 = \alpha r^2 \implies \dot{r} = \alpha r \\ \dot{z}_1 = \alpha z_1 + \beta z_2 = \dot{r} \cos \theta - (r \operatorname{sen} \theta) \dot{\theta} &= \alpha z_1 - z_2 \dot{\theta} \implies \dot{\theta} = -\beta.\end{aligned}$$

Por tanto en coordenadas polares el sistema (4.23) se escribe como

$$\dot{r} = \alpha r, \quad \dot{\theta} = -\beta,\tag{4.24}$$

cuya solución general es

$$r = r_0 e^{\alpha t}, \quad \theta = \theta_0 - \beta t, \quad r_0, \theta_0 \in \mathbb{R}.\tag{4.25}$$

La ecuación de las órbitas es por tanto

$$r = r_0 e^{-\frac{\alpha}{\beta}(\theta - \theta_0)}.\tag{4.26}$$

Hay dos posibilidades, según  $\alpha$  (ó  $\tau$ , por la ecuación (4.22)) se anule o no:

(II.a) *Autovalores complejos con parte real no nula*  $\iff \tau^2 - 4\delta < 0, \tau \neq 0$

En este caso  $\alpha \neq 0$ , y por tanto las órbitas (4.26) son espirales logarítmicas, y lo siguen siendo en las coordenadas originales  $X = PZ$  (véase la Fig. 4.6). Se dice que el origen es un **foco**, *estable* para  $\tau < 0$  e *inestable* para  $\tau > 0$ , ya que cuando  $\tau < 0$  las espirales tienden al origen para  $t \rightarrow \infty$ , mientras que si  $\tau > 0$  esto ocurre para  $t \rightarrow -\infty$ . El sentido de giro alrededor del origen de las órbitas se determina fácilmente observando cuál es la dirección del vector velocidad  $AX$  cuando dichas órbitas cortan a uno de los ejes. Por ejemplo, la componente  $x$  del vector velocidad para  $x = 0$  es  $f(0, y) = by$ . Por tanto, el sentido de giro es horario si  $b > 0$  y antihorario si  $b < 0$ . Del mismo modo, como  $g(x, 0) = cx$  el sentido de giro es horario si  $c < 0$  y antihorario si  $c > 0$ . Nótese que

$$\tau^2 - 4\delta = (a + d)^2 - 4(ad - bc) = (a - d)^2 + 4bc < 0 \implies bc < 0,$$

y por tanto  $b$  y  $c$  tienen signos opuestos en este caso.

(II.b) *Autovalores imaginarios puros*  $\iff \tau = 0, \delta > 0$

Ahora  $\alpha = 0$  y por tanto las órbitas (4.26) son una familia de circunferencias centradas en el origen, que en las coordenadas originales  $(x, y)$  se transforman en una familia de elipses centradas en el origen (véase la Fig. 4.6). Se dice que el origen es un **centro** del sistema dinámico (4.13). El sentido de giro alrededor del origen de las órbitas se determina como en el caso (II.a).



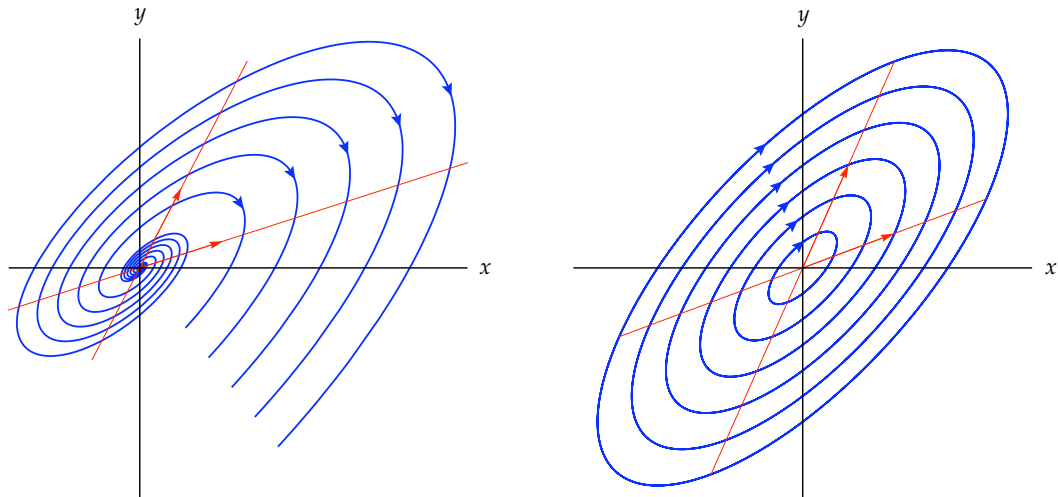


Figura 4.6: Mapa de fases de un sistema lineal con un foco inestable (izquierda) y un centro (derecha) en el origen (las líneas en rojo son las rectas determinadas por los vectores  $u$  y  $v$ ). Nótese que en ambos casos  $b > 0$  (ó  $c < 0$ ), ya que las órbitas se recorren en sentido horario.

En el plano de los parámetros  $(\tau, \delta)$ , el conjunto  $\tau^2 - 4\delta = 0$  representa una parábola. El tipo de punto crítico que el sistema lineal (4.13) tiene en el origen (punto de silla, nodo, foco o centro) está determinado por la posición del punto  $(\tau, \delta)$  en el espacio de parámetros en relación con esta parábola y con los ejes coordenados (véase la Fig. 4.7).

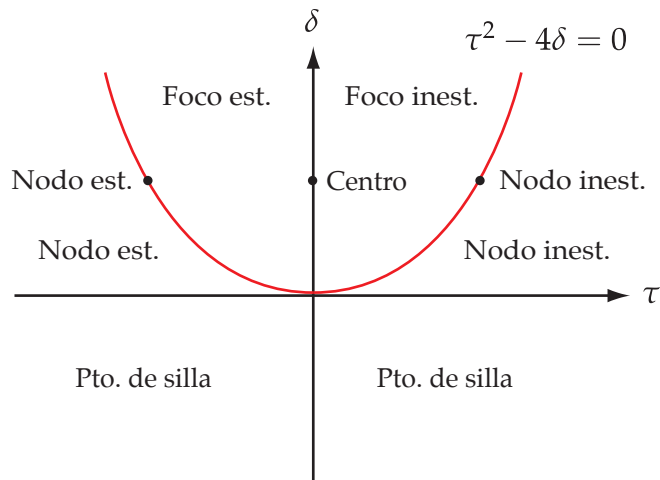


Figura 4.7: Tipos de puntos críticos del sistema lineal (4.13) en función de los invariantes  $\tau$  y  $\delta$  de la matriz  $A$ .

### 4.3 Sistemas no lineales

Consideremos a continuación el sistema dinámico en el plano

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases} \tag{4.27}$$

donde las funciones  $f$  y  $g$  se supondrán al menos de clase  $C^1$  en un abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$ , y sea  $(x_0, y_0) \in U$  un punto crítico de (4.27). La aproximación lineal de dicho sistema en el punto

crítico  $(x_0, y_0)$  es el sistema lineal

$$\begin{cases} \dot{X} = aX + bY \\ \dot{Y} = cX + dY, \end{cases} \quad (4.28)$$

siendo  $(X, Y) = (x - x_0, y - y_0)$  y

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = D(f, g)(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}. \quad (4.29)$$

El siguiente teorema relaciona el comportamiento del sistema no lineal (4.27) en las proximidades de un punto crítico *elemental*  $(x_0, y_0)$  con el de su aproximación lineal (4.28) en un entorno del origen. Dicho teorema afirma esencialmente que si  $f$  y  $g$  son suficientemente regulares en  $(x_0, y_0)$ , y dicho punto crítico es *hiperbólico*, entonces el sistema original (4.27) y su aproximación lineal (4.28) tienen el mismo tipo de punto crítico en  $(x_0, y_0)$  y en el origen, respectivamente:

**Teorema 4.16.** Sea  $(x_0, y_0)$  un punto crítico elemental del sistema (4.27), es decir

$$f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0, \quad \det D(f, g)(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Entonces se verifica:

1. Si  $(f, g) \in C^1$  y la aproximación lineal (4.28) tiene un **foco** o un **punto de silla** en el origen, entonces el sistema (4.27) tiene resp. un **foco** del mismo tipo (es decir, estable o inestable) o un **punto de silla** en  $(x_0, y_0)$ .
2. Si  $(f, g) \in C^2$  y la aproximación lineal (4.28) tiene un **nodo** en el origen, entonces el sistema (4.27) tiene un **nodo** del mismo tipo (estable o inestable, de una tangente) en  $(x_0, y_0)$ .
3. Si  $f$  y  $g$  son analíticas en  $(x_0, y_0)$  y la aproximación lineal (4.28) tiene un **centro** en el origen, entonces el sistema (4.27) puede tener un **centro** o un **foco** en  $(x_0, y_0)$ .

*Nota.* Si la aproximación lineal tiene un nodo en el origen y  $(f, g)$  sólo es de clase  $C^1$ , el sistema no lineal (4.27) puede tener un *foco* en  $(x_0, y_0)$ . Por ejemplo, esto es lo que ocurre para el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - \frac{y}{\log r} \\ \dot{y} = -y + \frac{x}{\log r} \end{cases}$$

en el origen. Análogamente, si la aproximación lineal tiene un centro en el origen y  $(f, g)$  es de clase  $C^k$  (con  $1 \leq k < \infty$ ), el sistema no lineal (4.27) puede tener un *centro-foco* en  $(x_0, y_0)$ . Considérese, por ejemplo, el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + xr^{k+1} \operatorname{sen}(1/r) \\ \dot{y} = x + yr^{k+1} \operatorname{sen}(1/r) \end{cases}$$

en el origen.

Según el teorema anterior, si la aproximación lineal (4.28) tiene un *centro* en el origen el sistema original puede tener un centro o un foco en  $(x_0, y_0)$  (aún cuando las funciones  $f$  y  $g$  sean analíticas en dicho punto). Para determinar en este caso qué tipo de punto crítico tiene el sistema (4.27) en  $(x_0, y_0)$  se pueden usar muchas veces consideraciones elementales de *simetría*. En efecto, si probamos que el mapa de fases del sistema (4.27) en un entorno de  $(x_0, y_0)$  es

simétrico respecto de alguna recta que pase por dicho punto entonces  $(x_0, y_0)$  ha de ser forzosamente un centro, ya que una curva de tipo espiral no es simétrica respecto de ninguna recta.

La simetría más fácil de caracterizar es la simetría respecto de los ejes coordenados. Por ejemplo, determinemos una condición suficiente para que las órbitas sean simétricas respecto del eje  $x$ , suponiendo que  $(x_0, y_0) = (x_0, 0)$  y que el origen es un centro de la aproximación lineal en este punto. En primer lugar, para que el campo de vectores  $(f, g)$  sea continuo en el eje  $x$  las órbitas deben cortar dicho eje con tangente vertical, es decir

$$f(x, 0) = 0 \quad (4.30)$$

para  $|x - x_0|$  suficientemente pequeño. En segundo lugar, la simetría respecto del eje horizontal implica que si  $(x, y(x))$  es una órbita entonces  $(x, -y(x))$  también lo es. Esto significa que si la función  $y(x)$  es solución de

$$y' = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}$$

también lo será la función  $-y(x)$ . Imponiendo esta condición se obtiene

$$\frac{d}{dx}(-y(x)) = -y'(x) = -\frac{g(x, y(x))}{f(x, y(x))} = \frac{g(x, -y(x))}{f(x, -y(x))}$$

para todo  $x$ . Esto se cumplirá si

$$\frac{g(x, -y)}{f(x, -y)} = -\frac{g(x, y)}{f(x, y)}.$$

Por tanto, una condición suficiente para que las órbitas de (4.27) sean simétricas respecto del eje horizontal es

$$\boxed{\frac{g(x, -y)}{f(x, -y)} = -\frac{g(x, y)}{f(x, y)}, \quad f(x, 0) = 0.} \quad (4.31)$$

En particular, ambas condiciones se cumplirán si

$$\boxed{f(x, -y) = -f(x, y), \quad g(x, -y) = g(x, y),} \quad (4.32)$$

es decir si  $f$  es impar en  $y$  y  $g$  es par en dicha variable. Análogamente, las órbitas de (4.27) son simétricas respecto del eje  $y$  si

$$\boxed{\frac{g(-x, y)}{f(-x, y)} = -\frac{g(x, y)}{f(x, y)}, \quad g(0, y) = 0} \quad (4.33)$$

o, en particular, si

$$\boxed{f(-x, y) = f(x, y), \quad g(-x, y) = -g(x, y).} \quad (4.34)$$

**Ejemplo 4.17.** Consideremos el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^3. \end{cases} \quad (4.35)$$

En este ejemplo, las funciones

$$f(x, y) = y, \quad g(x, y) = x - x^3$$

son analíticas en todo  $\mathbb{R}^2$ . Los puntos críticos del sistema son las soluciones de las ecuaciones

$$y = x - x^3 = 0,$$

es decir

$$(0,0), \quad (1,0), \quad (-1,0). \quad (4.36)$$

La matriz jacobiana de  $(f, g)$  es

$$D(f, g)(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como el determinante de esta matriz, que es igual a  $3x^2 - 1$ , no se anula en ninguno de los puntos críticos, todos ellos son *elementales*. En el origen, la aproximación lineal de (4.35) es

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.37)$$

Al ser  $\det A = -1 < 0$ , el origen es un *punto de silla* de la aproximación lineal (4.37), y por tanto del sistema original (4.35). Para estudiar el mapa de fases de dicho sistema en las proximidades del origen, hacemos lo propio con el mapa de fases de la aproximación lineal (4.37). Los autovalores de la matriz  $A$  son las soluciones de la ecuación

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0,$$

es decir  $\lambda = \pm 1$ . Los autovectores  $(X, Y)$  correspondientes al autovalor  $\lambda = 1$  son las soluciones de

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se trata, por tanto, de la recta  $Y = X$ . Análogamente se prueba que los autovectores correspondientes al autovalor  $\lambda = -1$  están sobre la recta  $Y = -X$ . El mapa de fases del sistema lineal (4.37) tiene por tanto el aspecto de la Fig. 4.8. Volviendo al sistema original (4.35) en el origen, las dos rectas  $Y = \pm X$  se transforman en dos curvas llamadas **separatrices**, que salen o entran del origen con pendiente respectivamente igual a 1 o  $-1$  (véase la Fig. 4.10).

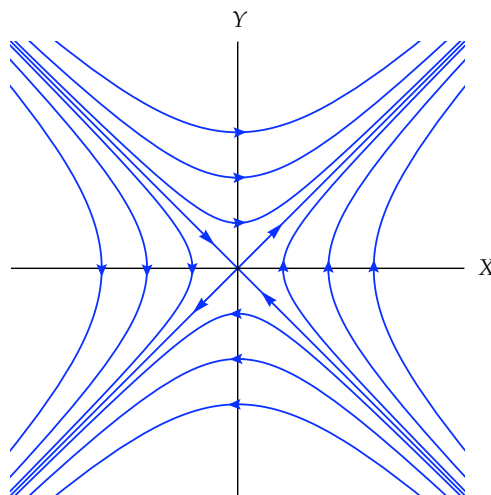


Figura 4.8: Mapa de fases del sistema lineal (4.37).

En los dos puntos críticos  $\pm(1,0)$ , la matriz de la aproximación lineal es igual a

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

La ecuación de autovalores de esta matriz es  $\lambda^2 + 2 = 0$ , por lo que el origen es un *centro* de la aproximación lineal de (4.35) tanto en  $(1,0)$  como en  $(-1,0)$ . Al ser las funciones  $f$  y  $g$  analíticas, el sistema (4.35) puede tener un centro o un foco en  $\pm(1,0)$ . Pero en este caso el mapa de fases es simétrico respecto del eje horizontal, ya que  $f(x,y) = y$  es impar en  $y$ , y  $g(x,y) = x - x^3$  es par en dicha variable (al ser independiente de  $y$ ). Como ambos puntos críticos  $\pm(1,0)$  están sobre el eje horizontal, dichos puntos son *centros* del sistema (4.35).

Para dibujar el mapa de fases del sistema (4.35) es conveniente estudiar los signos de las componentes del campo vectorial  $(f(x,y), g(x,y)) = (y, x - x^3)$  en función del punto  $(x,y)$ . Por ejemplo, en este caso la primera componente es positiva en el semiplano superior y negativa en el inferior, mientras que la segunda es positiva si  $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$  y negativa cuando  $x \in (-1, 0) \cup (1, \infty)$ . Por tanto la dirección del campo de vectores es como se indica esquemáticamente en la Fig. 4.9. En particular, dicho campo es vertical sobre el eje  $x$  y horizontal sobre las rectas verticales  $x = 0, \pm 1$ .

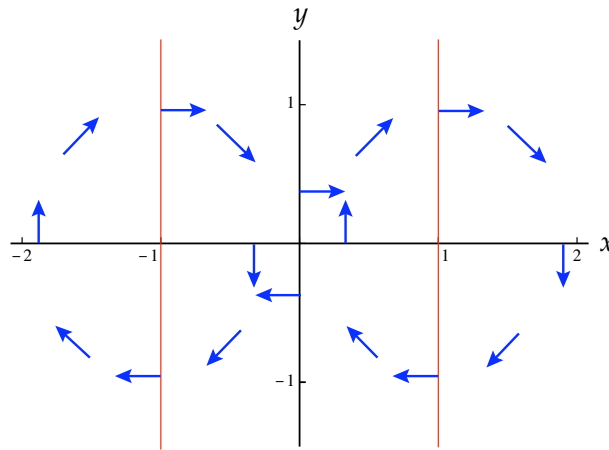


Figura 4.9: Dirección del campo de vectores del sistema (4.35).

El mapa de fases del sistema (4.35) tiene el aspecto de la figura 4.10. Nótese que las separatrices que “salen” del origen con pendiente 1 “vuelven” al origen con pendiente  $-1$ , debido a que de otra forma cortarían a otra órbita.

En este ejemplo, podemos hacer afirmaciones más precisas sobre las órbitas resolviendo su ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - x^3}{y},$$

que es exacta (y de variables separadas) y se integra fácilmente:

$$\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 = c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R},$$

o, equivalentemente,

$$(x^2 - 1)^2 + 2y^2 = c, \quad c \geq 0. \quad (4.38)$$

De esta ecuación se deduce que el mapa de fases es simétrico respecto de ambos ejes, y todas las órbitas son acotadas y cerradas. (La simetría respecto del eje  $y$  del mapa de fases se podría

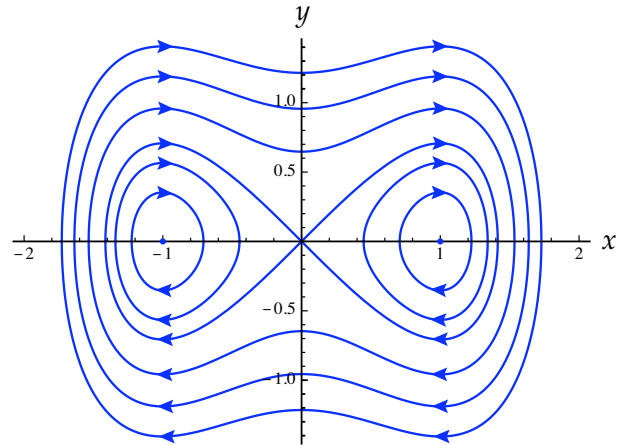


Figura 4.10: Mapa de fases del sistema (4.35).

haber deducido sin necesidad de hallar la ecuación de las órbitas, ya que  $g$  es impar y  $f$  par en  $x$ , resp. Análogamente, como  $f$  es impar y  $g$  par en  $y$ , las órbitas han de ser simétricas respecto al eje  $x$ .) Los puntos críticos  $(\pm 1, 0)$ , por ejemplo, se obtienen para  $c = 0$ . Las separatrices son las dos órbitas que “pasan” por el origen (más correctamente, tienden al origen para  $t \rightarrow \pm\infty$ ). Sustituyendo por tanto  $x = y = 0$  en la ecuación anterior se obtiene  $c = 1$ , por lo que la ecuación de las separatrices es

$$(x^2 - 1)^2 + 2y^2 = 1 \iff y = \pm x \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}.$$

# Índice alfabético

- Abel–Liouville, fórmula de, 34, 50
- aproximación lineal, 111
- aproximantes de Picard, 21
- autovalor, 39
  
- campo de vectores, 108
- centro, 116–119
- conexo, 9
- convexo, 19
- curvas integrales, 3, 4, 7, 10
  
- desviación del equilibrio, 111
  
- ecuación
  - autónoma, 25–26
  - de Airy, 72, 77–78
  - de Bernoulli, 13–14
  - de Bessel, 95–103
  - de Euler, 87–88
  - de Hermite, 78–84
  - de Laplace, 84
  - de Legendre, 84–87
  - de Newton, 105
  - de Riccati, 14–16
  - de Schrödinger, 71
  - de variables separadas, 3–5
  - de Weber, 72, 78
  - diferencial, 1
    - de orden  $n$ , 47
    - de primer orden, 2
    - en derivadas parciales, 1
    - ordinaria, 1
  - en forma normal, 1
  - exacta, 7–11
  - homogénea, 5–7
  - lineal, 11–13
    - completa, 12, 48
    - con coeficientes constantes, 54–59
    - de orden  $n$ , 48–59
    - homogénea, 12, 48
    - inhomogénea, 12, 48
- equilibrio, *véase* punto crítico
- espacio
  - de fases, 106
    - ampliado, 106
    - de soluciones, 31–32, 49
  - estabilidad, 59–69, 112
    - de ecuaciones lineales, 65–66
      - con coeficientes constantes, 66
    - de sistemas lineales, 60–62
      - con coeficientes constantes, 63–65
  - estados ligados, 72
  - Euler–Mascheroni, constante de, 101
  
  - factor integrante, 10–11
  - foco, 116–119
  - función
    - analítica, 73
    - de Bessel
      - de primera especie, 97
      - de segunda especie, 101, 102
    - de Neumann, 101
    - gamma de Euler, 96–97
    - generatriz, 82, 87
    - lipschitziana, 18–20
      - en la segunda variable, 18
    - localmente lipschitziana, 19
  
  - índice, 39
  - isoclina, 6, 7, 10
  
  - Jordan
    - base de, 40
    - bloque de, 39
      - elemental, 39
    - forma canónica de, 38–40
  
  - Leibniz, regla generalizada de, 58
  
  - método
    - de los coeficientes indeterminados, 56–59
    - de variación de constantes, 12, 35, 50–51
  - mapa de fases, 106
  - matriz
    - compañera, 48
    - de soluciones, 33

- exponencial de una, 36–41
  - propiedades, 37
- fundamental, 33, 37
- nilpotente, 40
  - elemental, 39
- multiplicidad
  - algebraica, 39
  - geométrica, 39
- nodo, 114, 118
  - de una tangente, 115, 118
  - estelar, *véase* nodo propio
  - propio, 114
- norma
  - del supremo, 29
  - euclidiana, 19
- órbita, 106, 107
  - cerrada, 108
    - período de una, 109
  - ecuación diferencial, 109–110
  - orientación, 108
  - simétrica respecto a un eje, 119
- oscilador armónico, 107
  - cuántico, 72
    - energías de un, 81
  - forzado, 51
- polinomio
  - característico, 39, 54
  - estable, 66
  - indicial, 89
  - interpolador de Lagrange, 45–47
  - mínimo, 39
- polinomios
  - de Hermite, 81–84
  - de Legendre, 86–87
- punto
  - crítico, 110
    - aislado, 111
    - elemental, 111, 118
    - hiperbólico, 111, 112, 118
  - de silla, 113, 118
  - ordinario, *véase* punto regular
  - regular, 74
    - soluciones en un entorno de un, 75
  - singular, 74
    - regular, 89
- radio de convergencia, 73
- reducción del orden, 53
- Rodrigues, fórmula de, 82, 87
- Routh–Hurwitz, criterio de, 66–69
- Schwarz, lema de, 8
- separatriz, 120
- serie de Taylor, 73
- simplemente conexo, 8
- sistema
  - autónomo, *véase* sistema dinámico
  - de ecuaciones diferenciales, 16
  - dinámico, 105
    - lineal, 111–117
    - no lineal, 117–122
  - fundamental, 32, 49, 55
  - lineal, 29
    - asintóticamente estable, 61
    - con coeficientes constantes, 35–47
    - estable, 61
    - homogéneo, 29
    - inestable, 61
    - inhomogéneo, 29
- solución, 1
  - asintóticamente estable, 60, 65
  - estable, 59, 65
  - general, 2
    - de un sistema lineal, 35, 38
    - de una ecuación lineal, 51
  - inestable, 60
  - normalizable, 72
- teorema
  - de Cayley–Hamilton, 39
  - de existencia de Peano, 17, 48
  - de Frobenius, 91
  - de la función implícita, 3
  - de Picard–Lindelöf, 20
- teoremas de existencia y unicidad, 24, 48
  - para un sistema lineal, 30
  - para una ecuación lineal, 48
- trayectoria, 106
- valores iniciales, problema de, 2, 16, 17
  - para un sistema lineal, 30
  - para un sistema lineal, 35, 38
- wronskiano, 32–34, 49–50