Grupos y Variedades en Física

Artemio González López

Madrid, 24 de enero de 2007

Índice general

Capítulo 1

Grupos y álgebras

1.1 Preliminares

Definición 1.1. Un **álgebra** sobre un cuerpo $\mathbf{F}$ es un *espacio vectorial* A sobre $\mathbf{F}$ provisto de una ley de composición interna (**producto**) *Álgebra*

$$\begin{aligned} A \times A &\to A \\ (a,b) &\mapsto ab \end{aligned}$$

que goza de las siguientes propiedades:

1. *Propiedad distributiva:*

$$a(b+c) = ab + ac\,, \quad (b+c)a = ba + ca\,, \qquad \forall a,b,c \in A\,.$$

2. $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)\,, \qquad \forall a,b \in A\,,\ \forall \lambda \in \mathbf{F}\,.$

En lo que sigue, supondremos siempre que $\mathbf{F} = \mathbf{C}$ ó $\mathbf{F} = \mathbf{R}$. Nótese que las propiedades 1 y 2 anteriores son equivalentes a la *linealidad* del producto $(a,b) \mapsto ab$ en cada uno de sus argumentos.

La **dimensión** de A como álgebra es por definición su dimensión como espacio vectorial. Normalmente, aunque no siempre, nos ocuparemos de álgebras de dimensión finita.

Diremos que A es **asociativa** si *Asociatividad*

$$a(bc) = (ab)c\,, \qquad \forall a,b,c \in A\,,$$

y **abeliana** (o *conmutativa*) si

$$ab = ba\,, \qquad \forall a,b \in A.$$

Se dirá que $e \in A$ es un **elemento unidad** si

$$ea = ae = a\,, \qquad \forall a \in A\,.$$

Es evidente que en un álgebra no puede haber más de un elemento unidad. Si A es un álgebra con elemento unidad, un **inverso** (respecto de la multiplicación) de un elemento $a \in A$ es cualquier elemento $b \in A$ tal que *Inverso*

$$ab = ba = e\,.$$

Si A es asociativa, es fácil probar que si dicho elemento inverso existe necesariamente ha de ser único; en tal caso, denotaremos el inverso de $a \in A$ por a^{-1}. De la linealidad del producto respecto de cada uno de sus argumentos se sigue inmediatamente que

$$a0 = 0a = 0\,, \qquad \forall a \in A\,,$$

por lo que 0 no puede poseer inverso. Si A es asociativa y todo elemento de A distinto de 0 posee inverso, se dice que A es un **álgebra asociativa con división**. Recuérdese que un **cuerpo** es un álgebra asociativa con división que es además conmutativa.

Ejemplo 1.1. Un ejemplo muy importante de álgebra asociativa con elemento unidad, pero no conmutativa si $\dim V > 1$, es el álgebra $\mathfrak{gl}(V)$ de los operadores lineales $V \to V$, siendo V un espacio vectorial y $ab = a \circ b$ para todo $a, b \in \mathfrak{gl}(V)$. Por supuesto, la unidad es la aplicación identidad $I : V \to V$. En general (a menos que $\dim V = 1$) $\mathfrak{gl}(V)$ *no* es un álgebra con división, ya que no todo operador distinto de 0 es invertible. $\mathfrak{gl}(V)$

Ejemplo 1.2. El conjunto $P[z_1, \ldots, z_n]$ de los polinomios en n indeterminadas (reales o complejas) z_i es un álgebra asociativa y conmutativa con elemento unidad y de dimensión infinita. No es, sin embargo, un álgebra con división.

Definición 1.2. Sean A y B dos álgebras sobre el mismo cuerpo. Un **homomorfismo** de A en B es una aplicación *lineal* $\rho : A \to B$ tal que *Morfismos*

$$\rho(ab) = \rho(a)\rho(b)\,, \qquad \forall a, b \in A\,.$$

Un **isomorfismo** es un homomorfismo biyectivo. Dos álgebras son **isomorfas** si existe un isomorfismo que aplica una en la otra. Los isomorfismos de un álgebra en sí misma se denominan **automorfismos**.

Ejemplo 1.3. Si $V = \mathbf{F}^n$, el álgebra $\mathfrak{gl}(V)$ es isomorfa al álgebra $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{F})$ de las matrices $n \times n$ con elementos de matriz en $\mathbf{F}$, donde la operación producto es el producto de matrices ordinario. Un isomorfismo está dado por la aplicación que pasa de un operador lineal $a \in \mathfrak{gl}(V)$ a su matriz en una base cualquiera de V. $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{F})$

Si A es un álgebra de dimensión finita n y $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base cualquiera de A, definimos n^3 escalares $c_{ij}^k \in \mathbf{F}$ mediante *Constantes de estructura*

$$e_i e_j = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k e_k\,, \qquad \forall i, j = 1, \ldots, n\,. \tag{1.1}$$

Los números c_{ij}^k, denominados **constantes de estructura** de A respecto de la base $\mathcal{B}$, determinan el producto en A, ya que si $a = \sum_{i=1}^n a^i e_i$ y $b = \sum_{i=1}^n b^i e_i$ (con $a^i, b^i \in \mathbf{F}$) son dos elementos cualesquiera de A entonces la linealidad del producto en cada uno de sus factores implica que

$$ab = \sum_{i,j,k=1}^{n} c_{ij}^k a^i b^j e_k\,. \tag{1.2}$$

Equivalentemente, *los productos de los elementos de la base $\mathcal{B}$ determinan el producto en A.* Recíprocamente, si A es un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbf{F}$, $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base cualquiera de A y $c_{ij}^k \in \mathbf{F}$ ($1 \le i, j, k \le n$) son n^3 números arbitrarios, la ecuación (1.2) define un producto en A que goza de las propiedades 1 y 2 de la Definición 1.1, lo que dota a A de la estructura de álgebra. En otras palabras, *podemos convertir cualquier espacio vectorial de dimensión finita en un álgebra definiendo los productos de los elementos de una base de manera arbitraria y extendiendo la definición a todo el espacio por linealidad.* Equivalentemente, dados n^3 números arbitrarios $c_{ij}^k \in \mathbf{F}$ siempre es posible construir un álgebra cuyas constantes de estructura sean dichos números.

Naturalmente, las propiedades de un álgebra se pueden caracterizar en términos de sus constantes de estructura o, equivalentemente, de los productos de los elementos de una base. Por ejemplo, es inmediato demostrar que:

1. A es conmutativa $\iff$ $e_i e_j = e_j e_i$ para todo i, j $\iff$ $c_{ij}^k = c_{ji}^k$ para todo i, j, k
2. A es asociativa $\iff$ $(e_i e_j)e_k = e_i(e_j e_k)$ para todo i, j, k $\iff$ $\sum_{m=1}^{n} c_{ij}^m c_{mk}^l = \sum_{m=1}^{n} c_{im}^l c_{jk}^m$ para todo i, j, k, l.

Ejemplo 1.4. El álgebra (real) de los **cuaterniones H** es el espacio vectorial $\mathbf{R}^4$ provisto del producto que definiremos a continuación. En primer lugar, si *Cuaterniones*

$$e = (1, 0, 0, 0)\,, \quad i = (0, 1, 0, 0)\,, \quad j = (0, 0, 1, 0)\,, \quad k = (0, 0, 0, 1)$$

definimos

$$ei = ie = i\,, \quad ej = je = j\,, \quad ek = ke = k\,, \quad e^2 = e\,, \quad i^2 = j^2 = k^2 = -e$$

y

$$ij = k = -ji\,, \quad jk = i = -kj\,, \quad ki = j = -ik\,.$$

Este producto se extiende a todo $\mathbf{H} = \mathbf{R}^4$ por linealidad, ya que los elementos $\{e, i, j, k\}$ forman una base (la canónica) de $\mathbf{R}^4$. Se comprueba que el producto así definido es asociativo (basta hacerlo con productos de elementos de la base canónica, por lo visto anteriormente). Por ejemplo

$$(ij)k = k^2 = -e\,, \quad i(jk) = i^2 = -e\,; \qquad i^2 j = -j\,, \quad i(ij) = ik = -j\,.$$

Por tanto, $\mathbf{H}$ es un *álgebra asociativa con elemento unidad* ($e = (1, 0, 0, 0)$), aunque claramente es no conmutativa. $\mathbf{H}$ es un *álgebra con división,* ya que para todo elemento[1] $(x, y, z, t) = x + y\,i + z\,j + t\,k$ se tiene

$$(x + y\,i + z\,j + t\,k)(x - y\,i - z\,j - t\,k) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2\,.$$

Ejemplo 1.5. El espacio $\mathbf{R}^3$ con el producto vectorial es claramente un álgebra. No es conmutativa, ya que de hecho $u \times v = -v \times u$ para todo $u, v \in \mathbf{R}^3$. Tampoco es asociativa; por ejemplo, si $\{e_1, e_2, e_3\}$ es la base canónica de $\mathbf{R}^3$ $(\mathbf{R}^3, \times)$

$$(e_1 \times e_1) \times e_2 = 0\,, \qquad e_1 \times (e_1 \times e_2) = e_1 \times e_3 = -e_2\,.$$

Sin embargo, utilizando la identidad

$$u \times (v \times w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w$$

se demuestra inmediatamente que

$$u \times (v \times w) + v \times (w \times u) + w \times (u \times v) = 0\,, \qquad \forall u, v, w \in \mathbf{R}^3.$$

El álgebra $\mathbf{R}^3$ con el producto vectorial es el primer ejemplo de lo que en adelante llamaremos un álgebra de Lie:

Definición 1.3. Un **álgebra de Lie** sobre un cuerpo $\mathbf{F}$ es un álgebra $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbf{F}$ cuyo producto, que denotaremos por $[\,\cdot\,,\cdot\,]$, verifica las siguientes propiedades:

Álgebra de Lie

1. *Anticonmutatividad:* $[x,y] = -[y,x]\,, \qquad \forall x,y \in \mathfrak{g}$

2. *Identidad de Jacobi:*

$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0\,, \qquad \forall x,y,z \in \mathfrak{g}\,.$$

Notas.

- La identidad de Jacobi prescribe como deben diferir los elementos $[[x,y],z]$ y $[x,[y,z]]$, que en un álgebra asociativa serían idénticos:

$$[[x,y],z] - [x,[y,z]] = [[x,z],y]\,.$$

- Por definición de álgebra, el producto $[\,\cdot\,,\cdot\,]$ (que se denomina habitualmente **corchete de Lie** o **conmutador**) es lineal en cada uno de sus argumentos.

- La anticonmutatividad implica que $[x,x] = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$. Esta última propiedad es de hecho equivalente a la anticonmutatividad, ya que $[x+y,x+y] = 0 = [x,y] + [y,x]$.

- Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es conmutativa (abeliana) si y sólo si $[x,y] = 0$ para todo $x,y \in \mathfrak{g}$.

Ejemplo 1.6. Si A es un álgebra asociativa sobre un cuerpo $\mathbf{F}$, y definimos el corchete de Lie mediante

Álgebra de los conmutadores

$$[a,b] = ab - ba\,, \qquad \forall a,b \in A\,,$$

entonces $\big(A,[\,\cdot\,,\cdot\,]\big) \equiv \mathfrak{g}_A$ es un álgebra de Lie sobre $\mathbf{F}$ (**álgebra de los conmutadores de** A). En efecto, es claro que $[\,\cdot\,,\cdot\,]$ es lineal en cada componente, y por tanto $\mathfrak{g}_A$ es un álgebra. Además, el producto es claramente anticonmutativo. Por último, la identidad de Jacobi se sigue del siguiente cálculo elemental:

$$[a,[b,c]] + \text{perm. cicl.} = (abc - bca) + (cba - acb) + \text{perm. cicl.} = 0\,.$$

Evidentemente, si el álgebra asociativa A es conmutativa el álgebra de Lie $\mathfrak{g}_A$ es conmutativa. Nótese, por último, que el álgebra derivada de $\mathfrak{gl}(n,\mathbf{F})$ no es más que $\mathfrak{gl}(n,\mathbf{F})$ con el conmutador usual de matrices como corchete de Lie.

Si $\mathcal{B} = \big\{e_1,\ldots,e_n\big\}$ es una base de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensión finita, las **constantes de estructura** $\big(c_{ij}^k\big)_{1\le i,j,k\le n}$ respecto de la base $\mathcal{B}$ se definen mediante la ec. (1.1), que en este caso se escribe

Const. de estructura

$$[e_i,e_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k\, e_k\,. \tag{1.3}$$

[1]Normalmente, se identifica e con 1, y por tanto $(x,0,0,0) = xe \leftrightarrow x \in \mathbf{R}$.

De la definición de álgebra de Lie se siguen inmediatamente las identidades

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k \tag{1.4}$$

$$\sum_{l=1}^{n} \left(c_{il}^p \, c_{jk}^l + c_{jl}^p \, c_{ki}^l + c_{kl}^p \, c_{ij}^l \right) = 0 \,. \tag{1.5}$$

Recíprocamente, si $\left(c_{ij}^k\right)_{1\le i,j,k\le n}$ es un conjunto de n^3 números en $\mathbf{F}$ que verifican las identidades anteriores, definiendo $[e_i, e_j]$ como el miembro derecho de (1.3) y extendiendo esta definición a un par cualquiera de elementos de $\mathfrak{g}$ por linealidad se obtiene una estructura de álgebra de Lie en $\mathfrak{g}$.

Complexificación

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie *real*, su **complexificación** $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ se define como sigue. En primer lugar, como *conjunto* $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ es la complexificación del espacio vectorial real $\mathfrak{g}$, es decir

$$\mathfrak{g}_{\mathbf{C}} = \left\{ v + \mathrm{i}\, w : v, w \in \mathfrak{g} \right\} \equiv \mathfrak{g} + \mathrm{i}\mathfrak{g} \,,$$

donde $v + \mathrm{i}\, w$ es una expresión formal equivalente al par ordenado (v, w). La suma y el producto por números complejos en $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ están dados por

$$(v_1 + \mathrm{i}\, w_1) + (v_2 + \mathrm{i}\, w_2) = (v_1 + v_2) + \mathrm{i}\,(w_1 + w_2) \,,$$
$$(\lambda + \mathrm{i}\, \mu)(v + \mathrm{i}\, w) = (\lambda v - \mu w) + \mathrm{i}\,(\mu v + \lambda w)$$

para todo v, w, v_i, $w_i \in \mathfrak{g}$, λ, $\mu \in \mathbf{R}$. Es inmediato comprobar que con esta definición $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ es efectivamente un espacio vectorial complejo. Además, si $\mathcal{B} = \left\{e_1, \dots, e_n\right\}$ es una base cualquiera de $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbf{R}$ entonces

$$\mathfrak{g}_{\mathbf{C}} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i e_i : c_i \in \mathbf{C} \right\}$$

y $\mathcal{B}$ es también base de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ sobre el cuerpo $\mathbf{C}$, por lo que

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathfrak{g}_{\mathbf{C}} = \dim_{\mathbf{R}} \mathfrak{g} \,.$$

A continuación se define el corchete de Lie en $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ de la forma natural, es decir

$$[v_1 + \mathrm{i}\, w_1, v_2 + \mathrm{i}\, w_2] = [v_1, v_2] - [w_1, w_2] + \mathrm{i}([v_1, w_2] + [w_1, v_2]) \,. \tag{1.6}$$

Como las constantes de estructura de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ respecto de una base cualquiera $\mathcal{B} \subset \mathfrak{g}$ evidentemente coinciden con las de $\mathfrak{g}$ en la misma base, es obvio que se siguen cumpliendo las condiciones (1.4)-(1.5), y por tanto $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ es un álgebra de Lie sobre los complejos. De lo anterior también se deduce que $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ posee una base (como espacio vectorial complejo) respecto de la cual todas sus constantes de estructura son reales. El recíproco de esta afirmación es también claramente cierto (¿por qué?), y por tanto *un álgebra compleja es la complexificación de un álgebra real si y sólo si admite una base respecto de la cual sus constantes de estructura son reales.*

Ejercicio 1.1. Probar que la complexificación de $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ es $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{C})$.

1.2 Grupos. Grupos lineales cerrados. Álgebras clásicas.

Grupo

Definición 1.4. Un **grupo** es un *conjunto* G provisto de una aplicación (**producto**)

$$\begin{aligned} G \times G &\to G \\ (g, h) &\mapsto gh \end{aligned}$$

que verifica:

1. *Propiedad asociativa:*
$$g(hk) = (gh)k\,, \qquad \forall g, h, k \in G\,.$$

2. *Existencia de unidad:*
$$\exists e \in G \quad \text{t.q.} \quad eg = ge = g\,, \qquad \forall g \in G\,.$$

3. *Existencia de inverso:*
$$\forall g \in G\,,\ \exists h \in G \quad \text{t.q.} \quad gh = hg = e\,.$$

Se demuestra fácilmente que en un grupo la unidad y el inverso de cada elemento g (denotado usualmente por g^{-1}) son únicos (ejercicio).

$\mathrm{GL}(V)$, $\mathrm{GL}(n, \mathbf{F})$

Un ejemplo muy importante de grupo es el llamado **grupo general lineal** de un espacio vectorial V, que denotaremos por $\mathrm{GL}(V)$, cuyos elementos son los *automorfismos* de V (operadores lineales invertibles de V en V). En este ejemplo, el producto es la composición de aplicaciones lineales, y la unidad es la aplicación identidad. Otro ejemplo bien conocido de grupo es el conjunto $\mathrm{GL}(n, \mathbf{F})$ de las matrices invertibles de orden n con elementos de matriz en el cuerpo $\mathbf{F}$. Este conjunto es un grupo respecto del producto usual de matrices, siendo su unidad la matriz unidad de orden n.

Morfismos

Un **homomorfismo** entre dos grupos G_1 y G_2 es una aplicación $\rho : G_1 \to G_2$ que cumple
$$\rho(gh) = \rho(g)\rho(h)\,, \qquad \forall g, h \in G_1\,.$$
De la definición se sigue inmediatamente que $\rho(e_1) = e_2$ y $\rho(g^{-1}) = \rho(g)^{-1}$. Se dice que dos grupos G_1 y G_2 son **isomorfos** si hay un homomorfismo invertible (**isomorfismo**) de G_1 en G_2. Por ejemplo, si V es un espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbf{F}$ entonces $\mathrm{GL}(V)$ y $\mathrm{GL}(n, \mathbf{F})$ son isomorfos, dado que la aplicación que consiste en tomar la matriz de un elemento de $\mathrm{GL}(V)$ respecto de una base cualquiera de V es claramente un isomorfismo de $\mathrm{GL}(V)$ en $\mathrm{GL}(n, \mathbf{F})$.

Representaciones

Una **representación** φ de un grupo G en un espacio vectorial V es un *homomorfismo* $\varphi : G \to GL(V)$. En otras palabras, la representación φ asigna a cada elemento g de G una aplicación lineal invertible $\varphi(g) : V \to V$, de modo que
$$\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h)\,, \qquad \forall g, h \in G\,.$$
Nótese que, por las propiedades de los homomorfismos,
$$\varphi(e) = i_V \quad (\text{identidad } V \to V)$$
y
$$\varphi(g)^{-1} = \varphi(g^{-1})\,, \qquad \forall g \in G\,.$$
(De hecho, es fácil probar que $\varphi : G \to \mathfrak{gl}(V)$ es una representación si y sólo si $\varphi(e) = i_V$ y $\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h)$, para todo $g, h \in G$.)

Grupos lineales cerrados

Un **grupo lineal** (o *matricial*) es un subgrupo del grupo matricial $\mathrm{GL}(n, \mathbf{F})$, donde $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ ó $\mathbf{F} = \mathbf{C}$. Diremos que un grupo lineal $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbf{F})$ es **cerrado** si G es un subconjunto cerrado del espacio normado $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{F}) \supset \mathrm{GL}(n, \mathbf{F})$. Recordemos que en $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{F}) \approx \mathbf{F}^{n^2}$ se pueden definir infinitas normas, como por ejemplo
$$\|X\| = \sup_{v \in \mathbf{F}^n - \{0\}} \frac{\|Xv\|}{\|v\|}\,, \qquad \forall X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{F})\,,$$

o

$$\|X\| = \big[\operatorname{tr}(X^\dagger X)\big]^{1/2} = \Big(\sum_{i,j=1}^{n} |x_{ij}|^2\Big)^{1/2}, \qquad \forall X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{F}).$$

Es también sabido que todas estas normas inducen la misma topología, en la cual $\mathrm{GL}(n, \mathbf{F})$ es un subconjunto abierto. Por ejemplo, todo subgrupo de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{F})$ definido por un conjunto de igualdades de la forma $f_i = 0$, $1 \le i \le m$, con $f_i : \mathrm{GL}(n, \mathbf{F}) \to \mathbf{R}$ o $f_i : \mathrm{GL}(n, \mathbf{F}) \to \mathbf{C}$ función *continua* para todo i, es cerrado. Casos particulares de grupos lineales cerrados de especial importancia son los llamados **grupos clásicos**, que se definen como sigue:

Grupos clásicos

$$\begin{aligned}
\mathrm{SL}(n, \mathbf{F}) &= \big\{X \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{F}) : \det X = 1\big\} \\
\mathrm{O}(n, \mathbf{F}) &= \big\{X \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{F}) : X^t X = I\big\} \\
\mathrm{SO}(n, \mathbf{F}) &= \mathrm{O}(n, \mathbf{F}) \cap \mathrm{SL}(n, \mathbf{F}) \\
\mathrm{U}(n) &= \big\{X \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{C}) : X^\dagger X = I\big\} \\
\mathrm{SU}(n) &= \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}(n, \mathbf{C}) \\
\mathrm{SP}(n, \mathbf{F}) &= \big\{X \in \mathrm{GL}(2n, \mathbf{F}) : X^t J_n X = J_n\big\} \\
\mathrm{SP}(n) &= \mathrm{SP}(n, \mathbf{C}) \cap \mathrm{U}(2n),
\end{aligned}$$

donde

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Estos grupos se denominan respectivamente **lineal especial**, **ortogonal**, **ortogonal especial**, **unitario**, **especial unitario**, **simpléctico** y **unitario simpléctico**. Nótese que todos los grupos clásicos reales a excepción de $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ son *compactos*, mientras que los demás grupos clásicos (¡incluidos $\mathrm{O}(n, \mathbf{C})$ y $\mathrm{SO}(n, \mathbf{C})$!) son no compactos.

Un **grupo algebraico** (real o complejo) es un subgrupo $G \subset GL(n, \mathbf{F})$ (con $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ o $\mathbf{F} = \mathbf{C}$) definido por un número finito de igualdades de la forma

Grupos algebraicos

$$f_i(X) = 0, \qquad 1 \le i \le m,$$

donde las funciones f_i son *polinomios* en los elementos x_{ij} de la matriz $X \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{F})$. Claramente, los grupos clásicos del tipo $X(n, \mathbf{F})$ con X = SL, O, SO, SP son grupos algebraicos reales si $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ y complejos si $\mathbf{F} = \mathbf{C}$. Por otra parte, los grupos clásicos $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$ y $\mathrm{SP}(n)$ *no* son grupos algebraicos complejos (a pesar de ser subgrupos de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ o $\mathrm{GL}(2n, \mathbf{C})$), puesto que $X^\dagger X$ no es un polinomio en x_{ij} (¡depende también de $\overline{x}_{ij}$!). Sin embargo, estos tres grupos pueden considerarse grupos algebraicos *reales* de $\mathrm{GL}(2n, \mathbf{R})$ (o $\mathrm{GL}(4n, \mathbf{R})$, en el caso de $\mathrm{SP}(n)$). En efecto, toda matriz $X \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ se puede identificar de manera natural con la matriz real $\tilde{X} \in \mathrm{GL}(2n, \mathbf{R})$ definida de la forma siguiente: si $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbf{C}^n$ y $Xz = u + \mathrm{i}v$, entonces

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \tilde{X} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Más concretamente, si $X = A + \mathrm{i}B \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ la matriz $\tilde{X} \in \mathrm{GL}(2n, \mathbf{R})$ está dada por

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}.$$

Con esta identificación se puede considerar a $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ como el subgrupo de $\mathrm{GL}(2n, \mathbf{R})$ formado por las matrices invertibles de la forma $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, con A, B, C y D matrices reales de orden $2n$ que verifican las relaciones $C = -B$ y $D = A$. Del mismo modo, $U(n)$ se identifica con el subgrupo de $GL(2n, \mathbf{R})$ dado por

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2n, \mathbf{R}) \mid C = -B\,,\ D = A\,,\ A^\dagger A - B^\dagger B = I\,,\ A^\dagger B + B^\dagger A = 0 \right\}.$$

Al ser las relaciones que definen a este grupo polinomios en los elementos de las matrices A, B, C y D, podemos considerar a $U(n)$ como un grupo algebraico real en $GL(2n, \mathbf{R})$, y análogamente para $\mathrm{SU}(n)$ y $\mathrm{SP}(n)$.

Grupo de Lie

Un **grupo de Lie** G real o complejo es un grupo G que posee además una estructura de **variedad analítica** real o compleja (es decir, un espacio topológico Hausdorff "localmente equivalente" a un espacio euclidiano real o complejo), respecto de la cual el producto y la aplicación $g \mapsto g^{-1}$ son funciones analíticas. Evidentemente, un grupo de Lie complejo es también un grupo de Lie real (de dimensión real doble de la que tiene como variedad compleja), aunque el recíproco no es cierto en general. Por ejemplo, el grupo $\mathrm{GL}(n, \mathbf{F})$ es un grupo de Lie, ya que es una variedad (al ser un subconjunto abierto del espacio euclidiano $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{F})$), y los elementos de matriz del producto AB y de la inversa A^{-1} son polinomios en los elementos de matriz de A y B y funciones racionales de los elementos de matriz de A, respectivamente.

Si $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbf{F})$ es un grupo algebraico (real o complejo) puede probarse [7, teor. 2.1.2] que G es automáticamente un grupo de Lie (real o complejo). Por tanto *todos los grupos clásicos son grupos de Lie.* Más generalmente, si G es un grupo lineal *cerrado* el *teorema del subgrupo cerrado* [1, Cap. II, teor. 2.3]) implica que G es un grupo de Lie *real*.

Álgebra de Lie de un grupo lineal cerrado

A un grupo de Lie (real o complejo) cualquiera G se le puede asociar un álgebra de Lie (real o compleja) $\mathfrak{g}$ tomando como conjunto de base el espacio de los vectores tangentes a G en la unidad e. Más concretamente, si $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbf{F})$ es un grupo lineal cerrado *real* su álgebra de Lie es el conjunto $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbf{F})$ definido por

$$\mathfrak{g} = \left\{ X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{F}) : X = g'(0)\,,\ \text{con } g : [-\epsilon, \epsilon] \to G \text{ derivable y } g(0) = I \right\}, \tag{1.7}$$

con el corchete de Lie usual en $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{F})$ ($[X, Y] = XY - YX$). Comprobaremos a continuación que si $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbf{F})$ es un grupo lineal cerrado real el conjunto (1.7) es efectivamente un álgebra de Lie *real* (subálgebra de $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{F})$ considerada como álgebra real).

$\mathfrak{g}$ subespacio

Veamos, en primer lugar, que $\mathfrak{g}$ es un subespacio vectorial real de $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{F})$. En efecto, dado $X \in \mathfrak{g}$ denotemos por g_X cualquier curva diferenciable $[-\epsilon, \epsilon] \to G$ cumpliendo $g_X(0) = I$, $g_X'(0) = X$. Entonces para todo $\lambda \in \mathbf{R}$ la curva $c(t) = g_X(\lambda t)$ está contenida en G, es diferenciable y verifica $c(0) = g_X(0) = I$, $c'(0) = \lambda\, g_X'(0) = \lambda X$. Por tanto $\lambda X \in \mathfrak{g}$, ya que puede tomarse $g_{\lambda X}(t) = g_X(\lambda t)$. Por otra parte, si Y es otro elemento de $\mathfrak{g}$ entonces $c(t) = g_X(t) g_Y(t)$ es una curva diferenciable en G, $c(0) = g(0)h(0) = I$ y

$$c'(0) = g_X'(0) g_Y(0) + g_X(0) g_Y'(0) = X + Y \quad \Longrightarrow \quad X + Y \in \mathfrak{g}\,.$$

$\mathfrak{g}$ subálg.

Para probar que $\mathfrak{g}$ es subálgebra real de $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{F})$, nótese que si $h \in G$ y $X \in \mathfrak{g}$ entonces

$$hXh^{-1} \equiv \mathrm{Ad}\, h \cdot X \in \mathfrak{g}\,.$$

En efecto, la curva $hg_X(t)h^{-1}$ es una curva diferenciable contenida en G que pasa por la identidad para $t = 0$, y

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} hg_X(t)h^{-1} = hg_X'(0)h^{-1} = hXh^{-1} \quad \Longrightarrow \quad hXh^{-1} \in \mathfrak{g}\,.$$

Sean ahora $X, Y \in \mathfrak{g}$, y denotemos por sencillez $g \equiv g_X$. Para cada $t \in [-\epsilon, \epsilon]$, la curva $c(t) = \operatorname{Ad} g(t) \cdot Y \equiv g(t) Y g(t)^{-1}$ está contenida en el espacio vectorial $\mathfrak{g}$ y es diferenciable, por lo que la derivada $c'(t)$ pertenece a $\mathfrak{g}$ para todo t. En particular,

$$c'(0) = g'(0) \cdot Y + Y \cdot (g^{-1})'(0) = XY - YX = [X, Y] \in \mathfrak{g}\,,$$

donde se ha utilizado la identidad

$$(g^{-1})'(t) = -g^{-1}(t) g'(t) g^{-1}(t) \Longrightarrow (g^{-1})'(0) = -g'(0) = -X\,.$$

Nótese que $\operatorname{Ad} : G \to \mathfrak{gl}\,\mathfrak{g}$ es de hecho una *representación* de G en $\mathfrak{g}$, ya que $\operatorname{Ad}(e)$ es la identidad y *Repr. adjunta*

$$\operatorname{Ad}(gh) = \operatorname{Ad}(g) \operatorname{Ad}(h)\,, \qquad \forall g, h \in G\,.$$

Definición 1.5. La aplicación $\operatorname{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ se denomina la **representación adjunta** del grupo lineal cerrado G sobre su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Las álgebras de Lie de los grupos clásicos, denominadas **álgebras clásicas**, son las siguientes: *Álgebras clásicas*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{sl}(n, \mathbf{F}) &= \big\{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{F}) : \operatorname{tr} X = 0\big\} \\
\mathfrak{o}(n, \mathbf{F}) = \mathfrak{so}(n, \mathbf{F}) &= \big\{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{F}) : X^t + X = 0\big\} \\
\mathfrak{u}(n) &= \big\{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{C}) : X^\dagger + X = 0\big\} \\
\mathfrak{su}(n) &= \mathfrak{u}(n) \cap \mathfrak{sl}(n, \mathbf{C}) \\
\mathfrak{sp}(n, \mathbf{F}) &= \big\{X \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbf{F}) : X^t J_n + J_n X = 0\big\} = \big\{X \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbf{F}) : X^t = J_n X J_n\big\} \\
\mathfrak{sp}(n) &= \mathfrak{sp}(n, \mathbf{C}) \cap \mathfrak{u}(2n)\,.
\end{aligned}$$

Nótese que $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$, $\mathfrak{o}(n, \mathbf{C})$, $\mathfrak{so}(n, \mathbf{C})$ y $\mathfrak{sp}(n, \mathbf{C})$ pueden considerarse álgebras complejas (son, de hecho, las complexificaciones de $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})$, $\mathfrak{o}(n, \mathbf{R})$, $\mathfrak{so}(n, \mathbf{R})$ y $\mathfrak{sp}(n, \mathbf{R})$, respectivamente), mientras que las demás álgebras clásicas son reales.

Ejemplo 1.7. Como ejemplo de los cálculos que conducen a las fórmulas anteriores, probemos que el álgebra de Lie del grupo unitario especial $\mathrm{SU}(n)$ es $\mathfrak{su}(n)$

$$\mathfrak{su}(n) = \big\{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{C}) : \operatorname{tr} X = 0\,,\ X^\dagger + X = 0\big\}\,.$$

En efecto, si X es un elemento del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de $\mathrm{SU}(n)$ y denotamos por sencillez $g \equiv g_X$ entonces $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{su}(n)$

$$g(0) = I\,,\ g'(0) = X; \qquad \det g(t) = 1\,,\ g(t)^\dagger g(t) = I\,, \quad \forall t \in [-\epsilon, \epsilon]\,.$$

De la fórmula clásica para la derivada de un determinante y la condición $g(0) = I$ se sigue fácilmente que

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \det g(t) = \operatorname{tr} g'(0) = \operatorname{tr} X = 0\,.$$

Derivando la igualdad $g(t)^\dagger g(t) = I$ respecto de t y haciendo $t = 0$ se obtiene fácilmente la condición $X^\dagger + X = 0$. Esto prueba que el álgebra de Lie de $\mathrm{SU}(n)$ está contenida en $\mathfrak{su}(n)$.

Recíprocamente, para todo $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{F})$ la curva $g(t) = \mathrm{e}^{tX}$ está contenida en $\mathfrak{su}(n) \subset \mathfrak{g}$

$\mathrm{GL}(n, \mathbf{F})$, es derivable y cumple $g(0) = I$ y $g'(0) = X$ (por las propiedades de la exponencial). Además, si $X \in \mathfrak{su}(n)$ entonces $\operatorname{tr} X = 0$ y $X^\dagger + X = 0$, por lo que

$$\det g(t) = \det \mathrm{e}^{tX} = \mathrm{e}^{\operatorname{tr}(tX)} = 1$$

y

$$g(t)^\dagger g(t) = \mathrm{e}^{tX^\dagger} \mathrm{e}^{tX} = \mathrm{e}^{-tX} \mathrm{e}^{tX} = I\,.$$

Por tanto $g(t) \in \mathrm{SU}(n)$ para todo t, de donde se sigue que $X = g'(0)$ está en el álgebra de Lie de $\mathrm{SU}(n)$.

Nótese que, aunque las matrices que pertenecen a $\mathfrak{su}(n)$ tienen en general elementos de matriz *complejos*, $\mathfrak{su}(n)$ es un álgebra de Lie sobre $\mathbf{R}$ pero *no* sobre $\mathbf{C}$. En efecto, si $X \neq 0$ es antihermítica y $c \in \mathbf{C}$ tiene parte imaginaria no nula entonces $(cX)^\dagger = c^* X^\dagger = -c^* X \neq -c\, X$.

Ejemplo 1.8. Veamos cuál es la complexificación de $\mathfrak{su}(n)$. Claramente, una base de $\mathfrak{su}(n)$ está formada por las $n^2 - 1$ matrices $\mathfrak{su}(n)_{\mathbf{C}}$

$$\big\{ \mathrm{i}(E_{jj} - E_{nn}) : 1 \le j \le n-1 \big\} \cup \big\{ E_{jk} - E_{kj},\ \mathrm{i}(E_{jk} + E_{kj}) : 1 \le j < k \le n \big\}\,,$$

donde E_{jk} es la matriz cuyo único elemento de matriz no nulo está en la fila j y la columna k y vale 1. Al tomar combinaciones lineales arbitrarias de estas matrices con coeficientes *complejos* evidentemente obtenemos el conjunto

$$\operatorname{lin}_{\mathbf{C}} \Big(\big\{ E_{jj} - E_{nn} : 1 \le j \le n-1 \big\} \cup \big\{ E_{jk} : 1 \le j \neq k \le n \big\} \Big) = \mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})\,.$$

Por tanto

$$\mathfrak{su}(n)_{\mathbf{C}} = \mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})\,.$$

Nótese que también $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C}) = \mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})_{\mathbf{C}}$, aún cuando puede probarse que $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})$ y $\mathfrak{su}(n)$ *no* son isomorfas. En otras palabras, una misma álgebra compleja puede tener más de una forma real inequivalente.

Un **subgrupo uniparamétrico** de un grupo lineal cerrado G es una aplicación diferenciable $g : \mathbf{R} \to G$ que verifica $g(s+t) = g(s) g(t)$, para todo $s, t \in \mathbf{R}$. Derivando esta igualdad respecto de s y haciendo $s = 0$ se obtiene la ecuación diferencial matricial *Subgrupos uniparamétricos*

$$g'(t) = X\, g(t)\,, \qquad X = g'(0)\,,$$

cuya solución (dado que $g(0) = I$) es

$$g(t) = \mathrm{e}^{tX}\,.$$

Nótese que $X = g'(0) \in \mathfrak{g}$. Recíprocamente, si $X \in \mathfrak{g}$ entonces $\mathrm{e}^{tX} \in G$ para todo $t \in \mathbf{R}$. En efecto, si denotamos $g(t) \equiv g_X(t)$ entonces

$$g(t/n) = I + \frac{tX}{n} + o\big(n^{-1}\big) \implies n \log g(t/n) = tX + o(1)$$

y por tanto

$$\lim_{n\to\infty} g(t/n)^n = \mathrm{e}^{tX}\,.$$

Como $g(t/n)^n$ pertenece a G para todo n, al ser G *cerrado* el límite e^{tX} también ha de pertenecer a G. En definitiva, hemos probado la siguiente caracterización del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de un grupo lineal cerrado $G \subset GL(n, \mathbf{F})$:

$$\mathfrak{g} = \big\{ X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{F}) : \mathrm{e}^{tX} \in G\,,\ \forall t \in \mathbf{R} \big\}\,. \tag{1.8}$$

1.3 Subálgebras, ideales. Álgebras simples y semisimples

Si $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son subconjuntos de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, denotaremos por $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ el subespacio vectorial

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = \mathrm{lin}\{[a, b] : a \in \mathfrak{a}, b \in \mathfrak{b}\}.$$

Subálgebra, ideal

Definición 1.6. Un subespacio $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ es una **subálgebra** de $\mathfrak{g}$ si $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$.

Evidentemente, una subálgebra $\mathfrak{a}$ es un álgebra de Lie con el corchete de Lie "heredado" de $\mathfrak{g}$.

Definición 1.7. Diremos que un subespacio $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ es un **ideal** de $\mathfrak{g}$ si $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{a}$.

Claramente, todo ideal es una subálgebra, aunque el recíproco es falso en general. Es inmediato demostrar que si $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ son ideales también lo son $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ y (en virtud de la identidad de Jacobi) $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$.

Ejercicio 1.2. Probar que si $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ es un *ideal*, el **espacio cociente** $\mathfrak{g}/\mathfrak{a} = \{x + \mathfrak{a} : x \in \mathfrak{g}\}$ es un álgebra de Lie con el conmutador $[x + \mathfrak{a}, y + \mathfrak{a}] = [x, y] + \mathfrak{a}$.

Álg. simple, semisimple

Definición 1.8. Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es **simple** si $\dim \mathfrak{g} > 1$ y $\mathfrak{g}$ no posee ningún ideal propio (es decir, distinto de 0 y de $\mathfrak{g}$). Diremos que $\mathfrak{g}$ es **semisimple** si $\mathfrak{g}$ no posee ningún ideal *abeliano* no nulo.

Nótese que un álgebra abeliana no nula no puede ser simple ni semisimple. De esto se deduce fácilmente que cualquier álgebra simple es a su vez semisimple, aunque el recíproco no sea cierto en general.

Suma directa

Diremos que $\mathfrak{g}$ es la **suma directa** de sus *ideales* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$, y escribiremos $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$, si como espacio vectorial $\mathfrak{g}$ es la suma directa de sus subespacios $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$, es decir, si $\mathfrak{a} \bigcap \mathfrak{b} = 0$ y todo elemento de $\mathfrak{g}$ se escribe (de forma única) como la suma de un elemento de $\mathfrak{a}$ y otro de $\mathfrak{b}$. Como $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son ambos ideales, $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] \subset \mathfrak{a} \bigcap \mathfrak{b} = 0$. Por tanto, si $x_1 = a_1 + b_1$ y $x_2 = a_2 + b_2$, con $a_1, a_2 \in \mathfrak{a}$ y $b_1, b_2 \in \mathfrak{b}$, entonces

$$[x_1, x_2] = [a_1, a_2] + [b_1, b_2].$$

Por tanto el corchete de Lie de $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ determina completamente el de $\mathfrak{g}$. Recíprocamente, si $\mathfrak{g}$ es la suma directa vectorial de dos subálgebras $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ tales que $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = 0$ entonces $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$. La definición anterior se generaliza sin dificultad a una suma directa finita $\mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_r \equiv \bigoplus_{i=1}^r \mathfrak{a}_i$ de r ideales $\mathfrak{a}_i$.

Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ y $\mathfrak{h}$ es un subespacio de $\mathfrak{g}$, la proyección $\mathfrak{h}_\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{h}$ sobre el ideal $\mathfrak{a}$ se define de la forma habitual, es decir

$$\mathfrak{h}_\mathfrak{a} = \{a \in \mathfrak{a} : \exists\, b \in \mathfrak{b} \text{ t.q. } a + b \in \mathfrak{h}\},$$

y análogamente para $\mathfrak{h}_\mathfrak{b}$. Claramente $\mathfrak{h}_\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{h}_\mathfrak{b}$ son subespacios de $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$, respectivamente, $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} \subset \mathfrak{h}_\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}_\mathfrak{a} + \mathfrak{h}_\mathfrak{b}$. Obsérvese también que $\mathfrak{h}_\mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}_\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = 0$.

Ejercicio 1.3. Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ y $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$, probar que sus proyecciones $\mathfrak{h}_\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{h}_\mathfrak{b}$ son ideales de $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$, respectivamente.

Solución. Si $a \in \mathfrak{h}_\mathfrak{a}$ y $a' \in \mathfrak{a}$, sea $b \in \mathfrak{b}$ tal que $a + b \in \mathfrak{h}$. Entonces se tiene:

$$[a, a'] = [a + b, a'] \subset \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a} \subset \mathfrak{h}_\mathfrak{a}.$$

Proposición 1.9. *Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$, con $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ semisimples, entonces $\mathfrak{g}$ es semisimple.*

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ semisimple $\Rightarrow \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ semisimple

Demostración. Sea $\mathfrak{h} \neq 0$ un ideal abeliano de $\mathfrak{g}$; por el ejercicio anterior, $\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}$ y $\mathfrak{h}_{\mathfrak{b}}$ son ideales de $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$, respectivamente. Si $a_1, a_2 \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}$, sean $b_1, b_2 \in \mathfrak{b}$ tales que $a_i + b_i \in \mathfrak{h}$. Entonces se tiene

$$[a_1 + b_1, a_2 + b_2] = [a_1, a_2] + [b_1, b_2] = 0 \quad \Longrightarrow \quad [a_1, a_2] = [b_1, b_2] = 0\,.$$

Esto prueba que $\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}$ y $\mathfrak{h}_{\mathfrak{b}}$ son ideales abelianos de las álgebras semisimples $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$, respectivamente, por lo que $\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}} = \mathfrak{h}_{\mathfrak{b}} = 0$. Pero entonces $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}} + \mathfrak{h}_{\mathfrak{b}} = 0$, lo que constituye una contradicción. *Q.E.D.*

En general, por tanto, *la suma directa de álgebras semisimples* (en particular, simples) *es semisimple.* De hecho, puede probarse (cf. Corolario 2.13) que *toda álgebra de Lie semisimple de dimensión finita es la suma directa de sus ideales simples.* Por tanto, *el estudio de las álgebras semisimples de dimensión finita puede reducirse al de las simples.*

1.4 Álgebras nilpotentes y solubles. Radical

Álg. nilpotentes y solubles

El subespacio $\mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ es claramente un ideal de $\mathfrak{g}$ (recuérdese que el conmutador de dos ideales es un ideal). En general, si definimos

$$\mathfrak{g}^i = \left[\mathfrak{g}^{i-1}, \mathfrak{g}\right], \qquad i = 2, 3, \ldots$$

entonces se prueba fácilmente por inducción que $\mathfrak{g}^k$ es un ideal de $\mathfrak{g}$ para todo $k = 1, 2, \ldots$. En particular, $\mathfrak{g}^i \subset \mathfrak{g}^{i-1}$ para todo $i = 2, 3, \ldots$. Diremos que $\mathfrak{g}$ es **nilpotente** si $\mathfrak{g}^k = 0$ para algún k. Análogamente, si definimos $\mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{g}^1$ y

$$\mathfrak{g}^{(i)} = \left[\mathfrak{g}^{(i-1)}, \mathfrak{g}^{(i-1)}\right], \qquad i = 2, 3, \ldots,$$

de nuevo $\mathfrak{g}^{(i)}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$ para todo $i = 1, 2, \ldots$, y por tanto $\mathfrak{g}^{(i+1)} \subset \mathfrak{g}^{(i)}$. Se dice que $\mathfrak{g}$ es **soluble** si $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$ para algún k. Al ser $\mathfrak{g}^{(i)} \subset \mathfrak{g}^i$ para todo i, es evidente que *toda álgebra nilpotente es automáticamente soluble,* aunque el recíproco no es cierto en general.

Definición 1.10. Las sucesiones $\mathfrak{g}^{(0)} \equiv \mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}^{(1)} \supset \mathfrak{g}^{(2)} \supset \ldots$ y $\mathfrak{g}^0 \equiv \mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}^1 \supset \mathfrak{g}^2 \supset \ldots$ se denominan respectivamente la **serie derivada** y la **serie central descendente** de $\mathfrak{g}$. El ideal $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}^{(1)}$ es el **álgebra derivada** de $\mathfrak{g}$.

Si $\mathfrak{a}$ es una subálgebra de $\mathfrak{g}$ entonces $\mathfrak{a}^i \subset \mathfrak{g}^i$ y $\mathfrak{a}^{(i)} \subset \mathfrak{g}^{(i)}$. Por tanto, *cualquier subálgebra de un álgebra soluble o nilpotente es soluble o nilpotente.*

Ejercicio 1.4. Probar que si $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ son subespacios de un álgebra de Lie real $\mathfrak{g}$ entonces

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]_{\mathbf{C}} = [\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}, \mathfrak{b}_{\mathbf{C}}]\,.$$

De la identidad anterior se deduce que si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie real entonces

$$(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})^i = (\mathfrak{g}^i)_{\mathbf{C}}, \qquad (\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})^{(i)} = (\mathfrak{g}^{(i)})_{\mathbf{C}}\,.$$

En particular, $\mathfrak{g}$ *es soluble o nilpotente si y sólo si lo es su complexificación* $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$.

Ejercicio 1.5. Probar que si $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ es semisimple también lo es $\mathfrak{g}$.

Ejercicio 1.6. Probar que si $\mathfrak{a}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$ entonces $\mathfrak{a}^i$ y $\mathfrak{a}^{(i)}$ son ideales de $\mathfrak{g}$ para todo $i = 1, 2, \dots$.

Proposición 1.11. *Un álgebra es semisimple si y sólo si no posee ningún ideal* soluble *no nulo.*

Demostración. En efecto, si $0 \neq \mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ es un ideal soluble de $\mathfrak{g}$ entonces hay algún $k = 1, 2, \dots$ tal que $\mathfrak{a}^{(k-1)} \neq 0$ y $\mathfrak{a}^{(k)} = 0$. Esto implica que $\mathfrak{a}^{(k-1)}$ es un ideal abeliano ($\left[\mathfrak{a}^{(k-1)}, \mathfrak{a}^{(k-1)}\right] = \mathfrak{a}^{(k)} = 0$) no nulo de $\mathfrak{g}$. *Q.E.D.*

En particular, del resultado anterior se deduce que *un álgebra nilpotente o soluble no nula no puede ser semisimple.*

Ejercicio 1.7. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión 3. Demostrar que $\mathfrak{g}$ semisimple $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{g}$ simple $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}$ (cf. el Teorema 1.16).

Solución. Evidentemente, basta probar que $\mathfrak{g}$ semisimple $\Rightarrow \mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g} \Rightarrow \mathfrak{g}$ simple.

i) $\mathfrak{g}$ semisimple $\Rightarrow \mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}$. Todas las álgebras de dimensión ≤ 2 son claramente solubles. Si $\mathfrak{g}$ es semisimple entonces $\mathfrak{g}^1$, que es un ideal de $\mathfrak{g}$, debe tener dimensión ≥ 3 y por tanto (al ser $\dim \mathfrak{g} = 3$) coincide con $\mathfrak{g}$.

ii) $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g} \Rightarrow \mathfrak{g}$ simple. Si $\mathfrak{g}$ tiene un ideal propio, tomando una base de $\mathfrak{g}$ que contenga una base de dicho ideal se comprueba fácilmente que $\dim \mathfrak{g}^1 \leq 2$, en contradicción con la hipótesis.

Nota: veremos en el próximo capítulo que, de hecho, si $\mathfrak{g}$ es semisimple entonces $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}$, cualquiera que sea la dimensión de $\mathfrak{g}$.

Ejemplo 1.9. Consideremos el subespacio vectorial $\mathfrak{t}(n, \mathbf{F})$ de $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{F})$ formado por las matrices *triangulares superiores* $\mathfrak{t}(n, \mathbf{F})$, $\mathfrak{t}_0(n, \mathbf{F})$

$$\mathfrak{t}(n, \mathbf{F}) = \left\{ A = \left(a_{ij}\right)_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{F}) : a_{ij} = 0\,,\ 1 \leq j < i \leq n \right\}.$$

En otras palabras, $A \in \mathfrak{t}(n, \mathbf{F})$ si y sólo si $Ae_i \in \operatorname{lin}\{e_1, \dots, e_i\}$ para todo $i = 1, \dots, n$, siendo $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canónica de $\mathbf{F}^n$. Es inmediato ver que $\mathfrak{t}(n, \mathbf{F})$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{F})$. También es inmediato comprobar que el subespacio de las matrices *triangulares superiores estrictas*

$$\mathfrak{t}_0(n, \mathbf{F}) = \{A \in \mathfrak{t}(n, \mathbf{F}) : a_{ii} = 0\,,\ 1 \leq i \leq n\} \subset \mathfrak{t}(n, \mathbf{F})$$

es una subálgebra (de hecho, un ideal) de $\mathfrak{t}(n, \mathbf{F})$. En efecto, $A \in \mathfrak{t}_0(n, \mathbf{F})$ si y sólo si $Ae_i \in \operatorname{lin}\{e_1, \dots, e_{i-1}\}$ para todo $i = 1, \dots, n$ (por definición, $e_k = 0$ si $k \leq 0$).

Veamos que $\mathfrak{t}_0(n, \mathbf{F})$ es nilpotente y $\mathfrak{t}(n, \mathbf{F})$ es soluble, pero no nilpotente. En efecto, si $A, B \in \mathfrak{t}_0(n, \mathbf{F})$ entonces

$$(AB - BA)\, e_i \in \operatorname{lin}\{e_1, \dots, e_{i-2}\}\,, \qquad i = 1, \dots, n\,,$$

de donde se sigue fácilmente la primera afirmación. Para probar la segunda, basta observar que si $A, B \in \mathfrak{t}(n, \mathbf{F})$ entonces se tiene

$$(AB)_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji} = a_{ii} b_{ii} = (BA)_{ii}\,,$$

lo cual prueba que $\mathfrak{t}(n, \mathbf{F})^1 \subset \mathfrak{t}_0(n, \mathbf{F})$. Esto implica la solubilidad de $\mathfrak{t}(n, \mathbf{F})$, ya que $\mathfrak{t}_0(n, \mathbf{F})$ es nilpotente[2]. Además, las relaciones de conmutación de las matrices de la base canónica de $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{F})$

$$\left[E_{ij}, E_{kl}\right] = \delta_{jk} E_{il} - \delta_{il} E_{kj}\,,$$

[2]En efecto, $\mathfrak{t}(n, \mathbf{F})^1$ es soluble (al ser nilpotente) y $\left(\mathfrak{t}(n, \mathbf{F})^1\right)^{(k)} = \mathfrak{t}(n, \mathbf{F})^{(k+1)}$.

implican a su vez
$$\left[E_{ij}, E_{jk}\right] = E_{ik}\,, \qquad 1 \le i \le j < k\,.$$
De esta última igualdad se deduce que
$$\mathfrak{t}_0(n, \mathbf{F}) = [\mathfrak{t}(n, \mathbf{F}), \mathfrak{t}_0(n, \mathbf{F})] \subset \mathfrak{t}(n, \mathbf{F})^1 \subset \mathfrak{t}_0(n, \mathbf{F})$$
y por tanto
$$\mathfrak{t}_0(n, \mathbf{F}) = \mathfrak{t}(n, \mathbf{F})^1 = [\mathfrak{t}_0(n, \mathbf{F}), \mathfrak{t}(n, \mathbf{F})]\,.$$
Utilizando esta identidad se obtiene
$$\mathfrak{t}(n, \mathbf{F})^2 = [\mathfrak{t}(n, \mathbf{F})^1, \mathfrak{t}(n, \mathbf{F})] = [\mathfrak{t}_0(n, \mathbf{F}), \mathfrak{t}(n, \mathbf{F})] = \mathfrak{t}(n, \mathbf{F})^1\,,$$
lo cual implica que $\mathfrak{t}(n, \mathbf{F})$ no es nilpotente (en efecto, $\mathfrak{t}(n, \mathbf{F})^k = \mathfrak{t}(n, \mathbf{F})^1 = \mathfrak{t}_0(n, \mathbf{F})$ para todo $k \ge 1$).

Homomorfismos de álgebras de Lie

Como ya vimos en el caso más general de un álgebra arbitraria, un **homomorfismo** entre dos álgebras de Lie $\mathfrak{g}_1$ y $\mathfrak{g}_2$ es una aplicación lineal $\rho : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ que preserva el corchete de Lie:
$$\rho[x, y]_1 = [\rho\, x, \rho\, y]_2\,, \qquad \forall x, y \in \mathfrak{g}_1.$$
Si ρ es biyectivo se dice que $\mathfrak{g}_1$ y $\mathfrak{g}_2$ son isomorfas, siendo $\rho : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ un isomorfismo. De particular interés son los isomorfismos de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ en sí misma, que como ya sabemos se denominan automorfismos de $\mathfrak{g}$.

Si $\rho : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ es un homomorfismo, es inmediato probar que $\ker\rho$ (el núcleo de ρ) es un ideal de $\mathfrak{g}_1$ y $\rho(\mathfrak{g}_1)$ (la imagen de ρ) es una subálgebra de $\mathfrak{g}_2$. También es fácil probar que si $\mathfrak{a}$ es un ideal de $\mathfrak{g}_1$ entonces $\rho(\mathfrak{a})$ es un ideal de $\rho(\mathfrak{g}_1)$; en particular, si ρ es un *epimorfismo* (es decir, un homomorfismo suprayectivo) la imagen bajo ρ de cualquier ideal de $\mathfrak{g}_1$ es un ideal de $\mathfrak{g}_2$. Análogamente, si $\mathfrak{b}$ es un ideal de $\mathfrak{g}_2$ entonces su imagen inversa bajo ρ
$$\rho^{-1}(\mathfrak{b}) = \left\{x \in \mathfrak{g}_1 \mid \rho(x) \in \mathfrak{b}\right\}$$
es un ideal de $\mathfrak{g}_1$. En efecto, al ser $\rho\big(\rho^{-1}(\mathfrak{b})\big) \subset \mathfrak{b}$ (la igualdad sólo está garantizada si ρ es un epimorfismo) se tiene
$$\rho\left[\rho^{-1}(\mathfrak{b}), \mathfrak{g}_1\right] = \left[\rho\big(\rho^{-1}(\mathfrak{b})\big), \rho(\mathfrak{g}_1)\right] \subset [\mathfrak{b}, \mathfrak{g}_2] \subset \mathfrak{b}\,.$$

Solubilidad de $\rho(\mathfrak{g})$ y $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$

Si $\rho : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ es un epimorfismo de álgebras de Lie entonces $\mathfrak{g}_2^i = \rho(\mathfrak{g}_1^i)$ y $\mathfrak{g}_2^{(i)} = \rho(\mathfrak{g}_1^{(i)})$ para todo i. Por tanto, *si $\mathfrak{g}_1$ es soluble o nilpotente lo mismo ocurrirá con $\mathfrak{g}_2$*. En particular, *si $\mathfrak{g}$ es soluble o nilpotente el cociente de $\mathfrak{g}$ por cualquier ideal es soluble o nilpotente.* En efecto, si $\mathfrak{a}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$ la aplicación $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ definida por $\pi(x) = x + \mathfrak{a}$ es un epimorfismo de álgebras de Lie (denominado *epimorfismo canónico*).

Proposición 1.12. *Sea $\mathfrak{a}$ un ideal* soluble *de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Entonces $\mathfrak{g}$ es soluble si y sólo si $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ es soluble.*

Demostración. En efecto, si $\mathfrak{g}$ es soluble entonces $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ es soluble por la observación anterior. Recíprocamente, si $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ es soluble entonces existe $k = 0, 1, \dots$ tal que
$$(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})^{(k)} \equiv \left[\pi(\mathfrak{g})\right]^{(k)} = \pi\big(\mathfrak{g}^{(k)}\big) \equiv \mathfrak{g}^{(k)}/\mathfrak{a} = 0,$$
por lo que $\mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{a}$. Como $\mathfrak{a}$ es soluble, $\mathfrak{g}^{(k)}$ es soluble y por tanto $\big(\mathfrak{g}^{(k)}\big)^{(l)} = \mathfrak{g}^{(k+l)} = 0$ para algún $l = 0, 1, \dots$, lo cual prueba que $\mathfrak{g}$ es soluble. *Q.E.D.*

Proposición 1.13. *Si* $\mathfrak{a}$ *y* $\mathfrak{b}$ *son ideales solubles de un álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$*, entonces* $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ *es un ideal soluble de* $\mathfrak{g}$*.*

La suma de ideales solubles es soluble

Demostración. Al ser $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ claramente un ideal, basta probar que es soluble. Para ello es suficiente observar que $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})/\mathfrak{b}$ es isomorfa a $\mathfrak{a}/(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})$ (ejercicio). Como $\mathfrak{a}/(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})$ es soluble (cociente del álgebra soluble $\mathfrak{a}$ por un ideal) lo mismo ocurrirá con $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})/\mathfrak{b}$. Como $\mathfrak{b}$ es soluble, la proposición se deduce de la anterior. *Q.E.D.*

Radical

En un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensión finita existe un único ideal soluble *maximal* (es decir, que no está estrictamente contenido en ningún otro ideal soluble). En efecto, al ser $\dim\mathfrak{g} < \infty$ es claro que $\mathfrak{g}$ posee ideales solubles maximales. Si $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son dos ideales solubles maximales de $\mathfrak{g}$, al ser $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ un ideal soluble que contiene a ambos debe cumplirse que $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}=\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$.

Definición 1.14. El ideal soluble maximal de un álgebra $\mathfrak{g}$ se denomina **radical** y se denota por $\operatorname{rad}\mathfrak{g}$.

Si $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{g}$ es un ideal soluble, claramente $\mathfrak{a}\subset\operatorname{rad}\mathfrak{g}$, pues por la proposición anterior $\operatorname{rad}\mathfrak{g}+\mathfrak{a}$ es un ideal soluble, que no puede contener propiamente a $\operatorname{rad}\mathfrak{g}$ por definición de este último ideal. Por tanto, *el radical de* $\mathfrak{g}$ *contiene a todos los ideales solubles de* $\mathfrak{g}$*.*

$\mathfrak{g}/\operatorname{rad}\mathfrak{g}$ semisimple

Proposición 1.15. *El álgebra cociente* $\mathfrak{g}/\operatorname{rad}\mathfrak{g}$ *es semisimple.*

Demostración. En efecto, si $\mathfrak{a}$ es un ideal soluble de $\mathfrak{g}/\operatorname{rad}\mathfrak{g}$ y $\pi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}/\operatorname{rad}\mathfrak{g}$ es el epimorfismo canónico, entonces $\pi^{-1}(\mathfrak{a})$ es un ideal de $\mathfrak{g}$. Por otra parte, $\operatorname{rad}\mathfrak{g} = \pi^{-1}(0)\subset\pi^{-1}(\mathfrak{a})$ es un ideal soluble de $\pi^{-1}(\mathfrak{a})$. Esto implica que $\pi^{-1}(\mathfrak{a})$ es soluble, ya que $\pi^{-1}(\mathfrak{a})/\operatorname{rad}\mathfrak{g} = \pi\big(\pi^{-1}(\mathfrak{a})\big) = \mathfrak{a}$ y $\operatorname{rad}\mathfrak{g}$ son solubles (la igualdad $\pi\big(\pi^{-1}(\mathfrak{a})\big)=\mathfrak{a}$ se debe a que π es un epimorfismo). Entonces $\pi^{-1}(\mathfrak{a})\subset\operatorname{rad}\mathfrak{g}$ (por ser $\operatorname{rad}\mathfrak{g}$ maximal) y por tanto $\pi^{-1}(\mathfrak{a})=\operatorname{rad}\mathfrak{g}$, es decir $\mathfrak{a}=0$. *Q.E.D.*

T. de Levi–Ma'lčev

Teorema 1.16 (Levi–Ma'lčev)**.** *Toda álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *de dimensión finita admite la descomposición* $\mathfrak{g}=\operatorname{rad}\mathfrak{g}+\mathfrak{h}$*, donde* $\operatorname{rad}\mathfrak{g}$ *es el radical de* $\mathfrak{g}$ *y* $\mathfrak{h}$ *es una subálgebra semisimple. Además, si* $\mathfrak{h}'$ *es otra subálgebra semisimple tal que* $\mathfrak{g}=\operatorname{rad}\mathfrak{g}+\mathfrak{h}'$ *entonces hay un automorfismo* $\rho:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ *tal que* $\mathfrak{h}'=\rho(\mathfrak{h})$*.* (Cf. [7, teor. 3.14.1 y 3.14.2].)

Claramente, $\mathfrak{g}$ es soluble si y sólo si $\mathfrak{g}=\operatorname{rad}\mathfrak{g}$, y semisimple si y sólo si $\operatorname{rad}\mathfrak{g}=0$.

Ejercicio 1.8. Supongamos que $\mathfrak{g}=\mathfrak{r}+\mathfrak{h}$, siendo $\mathfrak{r}$ un ideal soluble y $\mathfrak{h}$ una subálgebra semisimple. Demostrar que $\mathfrak{r}=\operatorname{rad}\mathfrak{g}$. [*Ayuda*: $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ es isomorfa a $\mathfrak{h}$.]

Solución. En primer lugar, nótese que $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ es isomorfa a $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}\cap\mathfrak{r}$. Pero $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{r}=0$ al ser un ideal soluble de $\mathfrak{h}$, de donde se sigue la ayuda. Sea $\pi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ el epimorfismo canónico. El álgebra cociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ es semisimple, al ser isomorfa a $\mathfrak{h}$. Como $\pi(\operatorname{rad}\mathfrak{g})$ es un ideal soluble de $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ (al ser π epimorfismo), $\pi(\operatorname{rad}\mathfrak{g})=0$ y por tanto $\operatorname{rad}\mathfrak{g}\subset\mathfrak{r}$. Por otra parte $\mathfrak{r}\subset\operatorname{rad}\mathfrak{g}$, al ser $\mathfrak{r}$ soluble, lo cual concluye la demostración.

Invariancia de $\operatorname{rad}\mathfrak{g}$ *bajo automorfismos*

Ejercicio 1.9. Probar que si $\rho:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ es un automorfismo entonces $\rho(\operatorname{rad}\mathfrak{g})=\operatorname{rad}\mathfrak{g}$. En otras palabras, *el radical de un álgebra de Lie es invariante bajo automorfismos.*

Solución. Si $\operatorname{rad}\mathfrak{g}$ es soluble también lo es $\rho(\operatorname{rad}\mathfrak{g})$, lo cual implica que $\rho(\operatorname{rad}\mathfrak{g})\subset\operatorname{rad}\mathfrak{g}$. Como ρ^{-1} también es un isomorfismo, $\rho^{-1}(\operatorname{rad}\mathfrak{g})\subset\operatorname{rad}\mathfrak{g}$, es decir $\operatorname{rad}\mathfrak{g}\subset\rho(\operatorname{rad}\mathfrak{g})$, y por tanto $\rho(\operatorname{rad}\mathfrak{g})=\operatorname{rad}\mathfrak{g}$.

1.5 Automorfismos. Derivaciones. Acción adjunta. Representaciones

En esta sección, $\mathfrak{g}$ denotará un álgebra de Lie de dimensión finita sobre **R** ó **C**.

Definición 1.17. Denotaremos por $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ al grupo de todos los automorfismos del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$

Ejemplo 1.10. Si $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie del grupo lineal cerrado G, para cada $g \in G$ la aplicación $\mathrm{Ad}(g)$ es claramente un automorfismo de $\mathfrak{g}$. Por tanto $\mathrm{Ad}(G) \subset \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$; de hecho, es inmediato comprobar que $\mathrm{Ad}(\mathfrak{g})$ es un *subgrupo* de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$.

Ejercicio 1.10. Probar que $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ es un grupo lineal cerrado (subgrupo de $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$). $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ *cerrado*

Solución. Sea $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base de $\mathfrak{g}$, y sean c_{ij}^k $(1 \le i, j, k \le n)$ las constantes de estructura de $\mathfrak{g}$ en dicha base. Si $\sigma \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$, sean σ_{ij} $(1 \le i, j \le n)$ los elementos de matriz de σ respecto de la base B, es decir:

$$\sigma \cdot e_j = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ij} e_i \,.$$

Entonces $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ si y sólo si

$$\sigma[e_i, e_j] = [\sigma\, e_i, \sigma\, e_j] \qquad 1 \le i < j \le n \,,$$

es decir si y sólo si

$$\sum_{l=1}^{n} c_{ij}^l \sigma_{kl} - \sum_{r,s=1}^{n} c_{rs}^k \sigma_{ri} \sigma_{sj} = 0 \,, \qquad 1 \le i, j, k \le n \,,\ i < j \,.$$

El miembro izquierdo de la ecuación anterior es un polinomio en los elementos de matriz de σ, y por tanto una función continua de σ.

Definición 1.18. Una **derivación** del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es una aplicación lineal $D \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ tal que *Derivaciones*

$$D[x, y] = [Dx, y] + [x, Dy] \,, \qquad \forall x, y \in \mathfrak{g}.$$

Ejercicio 1.11. Probar que el conjunto de todas las derivaciones de $\mathfrak{g}$ es una subálgebra de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, que denotaremos $\partial(\mathfrak{g})$.

Si $x \in \mathfrak{g}$, definimos $\mathrm{ad}\, x \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ mediante: *Acción adjunta*

$$\mathrm{ad}\, x \cdot y = [x, y] \,, \qquad \forall y \in \mathfrak{g} \,.$$

La identidad de Jacobi implica que para todo $x \in \mathfrak{g}$ la aplicación $\mathrm{ad}\, x$ es una derivación, denominada la **acción adjunta** de $x \in \mathfrak{g}$ sobre $\mathfrak{g}$. Las derivaciones de $\mathfrak{g}$ que son de la forma $\mathrm{ad}\, x$, para algún $x \in \mathfrak{g}$, se denominan **derivaciones internas**.

Ejercicio 1.12. Si $D \in \partial(\mathfrak{g})$ y $x \in \mathfrak{g}$, probar que $[D, \mathrm{ad}\, x] = \mathrm{ad}(Dx)$.

Del ejercicio anterior se deduce que $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ es un ideal de $\partial(\mathfrak{g})$. Además, si $x, y \in \mathfrak{g}$ se tiene

$$[\mathrm{ad}\, x, \mathrm{ad}\, y] = \mathrm{ad}(\mathrm{ad}\, x \cdot y) \equiv \mathrm{ad}[x, y] \,. \tag{1.9}$$

Proposición 1.19. *El álgebra de Lie de* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ *es* $\partial(\mathfrak{g})$. $\partial(\mathfrak{g})$ *es el álgebra de Lie de* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$

Demostración. En primer lugar, si $\varphi : [-\epsilon, \epsilon] \to \operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$ es diferenciable y $\varphi(0) = I$ entonces $\delta\varphi \equiv \varphi'(0)$ es una derivación. En efecto, derivando respecto de t la identidad

$$\varphi(t)[x,y] = [\varphi(t)x, \varphi(t)y]\,, \qquad \forall x, y \in \mathfrak{g}\,,$$

y haciendo $t = 0$ se obtiene inmediatamente

$$\delta\varphi\,[x,y] = [\delta\varphi \cdot x, y] + [x, \delta\varphi \cdot y]\,.$$

Esto demuestra que el álgebra de Lie de $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$ está contenida en $\partial(\mathfrak{g})$. Para probar el recíproco, obsérvese que si $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ es una derivación entonces e^{tD} es un grupo a un parámetro de automorfismos de $\mathfrak{g}$. En efecto, si $x, y \in \mathfrak{g}$ entonces

$$\frac{d}{dt}\left(\mathrm{e}^{tD}[x,y]\right) = D \cdot \mathrm{e}^{tD}[x,y]$$

y por otra parte, al ser D una derivación,

$$\frac{d}{dt}[\mathrm{e}^{tD}x, \mathrm{e}^{tD}y] = \left[D\mathrm{e}^{tD}x, \mathrm{e}^{tD}y\right] + \left[\mathrm{e}^{tD}x, D\mathrm{e}^{tD}y\right] = D \cdot [\mathrm{e}^{tD}x, \mathrm{e}^{tD}y]\,.$$

Por tanto, $\mathrm{e}^{tD}[x,y]$ y $\left[\mathrm{e}^{tD}x, \mathrm{e}^{tD}y\right]$ son solución de la ecuación lineal $v'(t) = D \cdot v(t)$ ($v(t) \in \mathfrak{g}$), y obviamente satisfacen la misma condición inicial $v(0) = [x,y]$, por lo que han de coincidir para todo t. *Q.E.D.*

Ejemplo 1.11. Es fácil ver (basta derivar respecto de t) que si $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie de un grupo lineal cerrado se tiene

$$\delta\big(\operatorname{Ad}\left(\mathrm{e}^{tx}\right)\big) = \operatorname{ad} x\,, \qquad \forall x \in \mathfrak{g}\,.$$

De esta igualdad se deduce que $\mathrm{e}^{\operatorname{ad} x} = \operatorname{Ad}\left(\mathrm{e}^{x}\right)$

$$\mathrm{e}^{t \operatorname{ad} x} = \operatorname{Ad}\left(\mathrm{e}^{tx}\right), \tag{1.10}$$

ya que ambos miembros son grupos a un parámetro de automorfismos de $\mathfrak{g}$ y, por lo que acabamos de ver, tienen la misma derivada en $t = 0$. De la ec. (1.8) se sigue que $\operatorname{ad}(\mathfrak{g})$ está contenida en el álgebra de Lie de $\operatorname{Ad}(G)$. Recíprocamente, si $\sigma \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ es un elemento del álgebra de Lie de $\operatorname{Ad}(G)$ entonces $\mathrm{e}^{t\sigma} = \operatorname{Ad}\big(g(t)\big)$, con $g(t) \in G$ para todo $t \in \mathbf{R}$. Al ser $\exp : \mathfrak{g} \to G$ un difeomorfismo de un entorno $0 \in \mathfrak{g}$ en un entorno de la identidad $I \in G$, para $|t|$ suficientemente pequeño se tiene $g(t) = \mathrm{e}^{x(t)}$, con $x(t) \in \mathfrak{g}$. De (1.10) se sigue entonces que

$$\mathrm{e}^{t\sigma} = \operatorname{Ad}\left(e^{x(t)}\right) = \mathrm{e}^{\operatorname{ad}(x(t))}\,,$$

lo cual implica que $\sigma \in \operatorname{ad}(\mathfrak{g})$. Por tanto $\operatorname{ad}(\mathfrak{g})$ es el álgebra de Lie de (la componente conexa con la identidad de) $\operatorname{Ad}(G)$.

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie *abstracta*, el grupo conexo (subgrupo de $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$) generado por los automorfismos de la forma $\mathrm{e}^{\operatorname{ad} x}$, con $x \in \mathfrak{g}$, se denota por $\operatorname{Int}(\mathfrak{g})$ y se denomina **grupo adjunto** del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Los elementos de $\operatorname{Int}(\mathfrak{g})$ se denominan **automorfismos internos** de $\mathfrak{g}$. El álgebra de Lie de $\operatorname{Int}(\mathfrak{g})$ es por tanto el álgebra $\operatorname{ad}(\mathfrak{g})$ de todas las derivaciones internas de $\mathfrak{g}$. Por lo que acabamos de ver, si $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie de un grupo lineal cerrado G entonces $\operatorname{Int}(\mathfrak{g})$ es la componente conexa con la identidad de $\operatorname{Ad}(G)$. (Esta igualdad es cierta para un grupo de Lie arbitrario G, definiendo adecuadamente la aplicación $\operatorname{Ad} : G \to \operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$.) $\operatorname{Int}(\mathfrak{g})$

Definición 1.20. Una **representación** de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un homomorfismo de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{gl}(V)$, siendo V un espacio vectorial.

Representaciones

Nótese que de la ec. (1.9) se sigue que la aplicación $\mathrm{ad}: \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ es una *representación* de $\mathfrak{g}$ cuyo espacio vectorial subyacente es la propia $\mathfrak{g}$.

Definición 1.21. $\mathrm{ad}: \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ se denomina la **representación adjunta** de $\mathfrak{g}$ en sí misma.

Repr. adjunta

Ejercicio 1.13. Probar que en un álgebra semisimple ad es una representación *fiel* (es decir, un homomorfismo inyectivo). Por tanto, cualquier álgebra semisimple $\mathfrak{g}$ es isomorfa al álgebra lineal $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$.

Proposición 1.22. *Si $\rho: G \to GL(V)$ es una representación diferenciable de un grupo de Lie G, entonces su **diferencial** $\rho_*: \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ es una representación del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G.*

Diferencial de una representación

Demostración. Por sencillez, probaremos este resultado sólo en el caso en que G es un grupo lineal cerrado. En primer lugar, recordemos que si $g: [-\epsilon, \epsilon] \to G$ es cualquier curva diferenciable tal que $g(0) = I$ y $g'(0) = X \in \mathfrak{g}$ (por ejemplo, $g(t) = \mathrm{e}^{tX}$) entonces $\rho_* X$ se define por

$$\rho_* X = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \rho\big(g(t)\big) \in \mathfrak{gl}(V)\,.$$

Nótese que si $g = (g_{ij})$ y $X = (x_{ij})$ entonces $x_{ij} = g'_{ij}(0)$ y (con un ligero abuso de notación)

$$\rho_* X = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial \rho}{\partial g_{ij}}(I)\, x_{ij}\,, \tag{1.11}$$

por lo que $\rho_* X$ no depende de la curva g escogida.

Comprobemos que ρ_* es una representación de $\mathfrak{g}$ en el espacio vectorial V. En primer lugar, es claro de la ecuación (1.11) que ρ_* es una aplicación lineal. Para probar que ρ_* preserva el corchete de Lie, consideremos dos curvas diferenciables $g: [-\epsilon, \epsilon] \to G$ y $h: [-\epsilon', \epsilon'] \to G$ tales que $g(0) = h(0) = I$ y $g'(0) = X$, $h'(0) = Y$. Al ser ρ representación de G,

ρ_* representación de $\mathfrak{g}$ en V

$$\rho\big(g(t)h(s)g(t)^{-1}\big) = \rho\big(g(t)\big)\rho\big(h(s)\big)\rho\big(g(t)\big)^{-1}\,.$$

Derivando respecto de s y haciendo $s = 0$ se obtiene:

$$\rho_*\big(g(t)Yg(t)^{-1}\big) = \rho\big(g(t)\big)(\rho_* Y)\rho\big(g(t)\big)^{-1}\,.$$

Derivando ahora respecto de t y haciendo $t = 0$ queda:

$$\rho_*[X, Y] = (\rho_* X)(\rho_* Y) - (\rho_* Y)(\rho_* X) \equiv [\rho_* X, \rho_* Y]\,.$$

Q.E.D.

Ejercicio 1.14. Probar que

$$\mathrm{Ad}_* = \mathrm{ad}\,.$$

Solución.

$$\mathrm{Ad}_* X = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \mathrm{Ad}(\mathrm{e}^{tX}) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \mathrm{e}^{t\,\mathrm{ad}\,X} = \mathrm{ad}\,X\,, \qquad \forall X \in \mathfrak{g}\,.$$

Ejercicio 1.15. Demostrar que un subgrupo cerrado conexo H de un grupo lineal cerrado conexo G es **normal** $(gHg^{-1} \subset H\,,\ \forall g \in G)$ si y sólo el álgebra de Lie de H es un ideal de la de G. [*Ayuda*: todo grupo de Lie conexo está generado por un entorno cualquiera de la unidad, y la aplicación exponencial es un difeomorfismo de un entorno de $0 \in \mathfrak{g}$ en un entorno de $I \in G$.]

Solución. Si H es un subgrupo normal de G, y $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{g}$ denotan respectivamente las álgebras de Lie de H y G, para todo $X \in \mathfrak{g}$, $Y \in \mathfrak{h}$ y $t \in \mathbf{R}$ la curva

$$s \mapsto \mathrm{e}^{tX}\,\mathrm{e}^{sY}\,\mathrm{e}^{-tX}$$

está contenida en H y pasa por la identidad para $s = 0$. Derivando respecto de s y haciendo $s = 0$ se obtiene

$$\mathrm{e}^{tX}\,Y\,\mathrm{e}^{-tX} \in \mathfrak{h}\,, \qquad \forall t \in \mathbf{R}\,.$$

Derivando a continuación respecto de t y haciendo $t = 0$ se deduce que $[X, Y] \in \mathfrak{h}$, lo cual prueba que $\mathfrak{h}$ es un ideal.

Recíprocamente, supongamos que $\mathfrak{h}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$. Si $X \in \mathfrak{g}$ e $Y \in \mathfrak{h}$ entonces

$$\mathrm{e}^{X}\,Y\,\mathrm{e}^{-X} = \mathrm{Ad}(\mathrm{e}^{X}) \cdot Y = \mathrm{e}^{\mathrm{ad}\,X} \cdot Y \in \mathfrak{h}\,,$$

ya que $\mathrm{ad}\,X(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$ al ser $\mathfrak{h}$ ideal de $\mathfrak{g}$. Por tanto

$$\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{X}\,Y\,\mathrm{e}^{-X}} = \mathrm{e}^{X}\,\mathrm{e}^{Y}\,\mathrm{e}^{-X} \in H\,, \qquad \forall X \in \mathfrak{g}, \quad \forall Y \in \mathfrak{h}\,.$$

En virtud de la observación de la ayuda, tanto G como H están generados por elementos de la forma e^{Z} con $Z \in \mathfrak{g}$ o $Z \in \mathfrak{h}$, respectivamente. De esto se sigue fácilmente (ejercicio) que $gHg^{-1} \subset H\,,\ \forall g \in G$.

Ejercicio 1.16. Probar que si $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ es un ideal entonces $\mathrm{rad}\,\mathfrak{a}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$, y se cumple $\mathrm{rad}\,\mathfrak{a} = \mathrm{rad}\,\mathfrak{g} \cap \mathfrak{a}$. [*Ayuda:* probar que para todo $x \in \mathfrak{g}$ la aplicación lineal $\mathrm{e}^{t\,\mathrm{ad}\,x}$ es un automorfismo de $\mathfrak{a}$.]

Solución. En primer lugar, nótese que $\mathrm{e}^{t\,\mathrm{ad}\,x}$ es un automorfismo de $\mathfrak{g}$, para todo $x \in \mathfrak{g}$ y para todo $t \in \mathbf{R}$. Para probar que es también automorfismo de $\mathfrak{a}$, basta por tanto probar que $\mathrm{e}^{t\,\mathrm{ad}\,x} \cdot \mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}$. Pero esto es evidente, ya que $\mathrm{ad}\,x \cdot \mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}$ (por ser $\mathfrak{a}$ *ideal*) y

$$\mathrm{e}^{t\,\mathrm{ad}\,x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (\mathrm{ad}\,x)^k\,.$$

Al ser $\mathrm{rad}\,\mathfrak{a}$ invariante bajo automorfismos, se verifica que $\mathrm{e}^{t\,\mathrm{ad}\,x} \cdot \mathrm{rad}\,\mathfrak{a} = \mathrm{rad}\,\mathfrak{a}$. Derivando respecto de t y haciendo $t = 0$ se obtiene $\mathrm{ad}\,x \cdot \mathrm{rad}\,\mathfrak{a} \subset \mathrm{rad}\,\mathfrak{a}$, lo que demuestra que $\mathrm{rad}\,\mathfrak{a}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$.

Resta probar que $\mathrm{rad}\,\mathfrak{a} = \mathrm{rad}\,\mathfrak{g} \cap \mathfrak{a}$. El contenido $\mathrm{rad}\,\mathfrak{a} \subset \mathrm{rad}\,\mathfrak{g} \cap \mathfrak{a}$ es obvio, ya que $\mathrm{rad}\,\mathfrak{a}$ es un ideal soluble de $\mathfrak{g}$. Para probar el otro contenido basta notar que $\mathrm{rad}\,g \cap \mathfrak{a}$ es un ideal (al ser intersección de ideales) soluble (pues está contenido en $\mathrm{rad}\,\mathfrak{g}$) de $\mathfrak{a}$, de donde se sigue que $\mathrm{rad}\,g \cap \mathfrak{a}$ está contenido en el radical de $\mathfrak{a}$.

Capítulo 2

Álgebras de Lie semisimples

2.1 La forma de Killing

A partir de partir ahora, trataremos exclusivamente con álgebras de Lie de dimensión finita sobre $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ ó $\mathbf{F} = \mathbf{C}$.

Forma de Killing

Definición 2.1. La **forma de Killing** del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es la forma bilineal $K : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbf{F}$ definida por

$$K(x, y) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y)\,, \qquad \forall x, y \in \mathfrak{g}\,.$$

Nótese que K es *simétrica*, es decir

$$K(x, y) = K(y, x)\,, \qquad \forall x, y \in \mathfrak{g}\,,$$

en virtud de la propiedad de la traza $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$. De la propiedad cíclica de la traza $\big(\operatorname{tr}(ABC) = \operatorname{tr}(BCA)\big)$ se deduce la *asociatividad* de la forma de Killing:

$$K(x, [y, z]) = K([x, y], z)\,.$$

Invariancia bajo automorfismos

Si $\rho : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ es un isomorfismo, entonces

$$\operatorname{ad}(\rho x_1) \cdot x_2 = [\rho x_1, x_2] = \rho[x_1, \rho^{-1} x_2] = \big(\rho\,(\operatorname{ad} x_1)\,\rho^{-1}\big) \cdot x_2\,, \quad \forall x_1 \in \mathfrak{g}_1\,,\ x_2 \in \mathfrak{g}_2\,.$$

Por tanto

$$\operatorname{ad}(\rho x_1) = \rho\,(\operatorname{ad} x_1)\,\rho^{-1}\,, \qquad \forall x_1 \in \mathfrak{g}_1\,,$$

de donde se sigue fácilmente que las formas de Killing en $\mathfrak{g}_1$ y $\mathfrak{g}_2$ están relacionadas por

$$K_2(\rho\, x, \rho\, y) = K_1(x, y)\,, \qquad \forall x, y \in \mathfrak{g}_1\,. \tag{2.1}$$

En particular, *la forma de Killing es invariante bajo automorfismos.*

Supongamos que $\mathfrak{g}_1$ y $\mathfrak{g}_2$ son isomorfas, es decir que existe un isomorfismo de álgebras de Lie $\rho : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$. Sean respectivamente $\mathcal{K}_1$ y $\mathcal{K}_2$ las matrices de K_1 y K_2 respecto de sendas bases $B_1 = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de $\mathfrak{g}_1$ y $B_2 = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ de $\mathfrak{g}_2$, y denotemos por $A = (a_{ij})$ la matriz del cambio de base de ρB_1 a B_2, es decir

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(\rho e_i)\,, \qquad j = 1, \ldots, n\,.$$

El elemento de matriz (i,j) de $\mathcal{K}_2$ está dado por

$$(\mathcal{K}_2)_{ij} \equiv K_2(e'_i, e'_j) = \sum_{k,l=1}^{n} a_{ki}a_{lj}K_2(\rho e_k, \rho e_l) = \sum_{k,l=1}^{n} a_{ki}a_{lj}K_1(e_k, e_l) = \sum_{k,l=1}^{n} a_{ki}a_{lj}(\mathcal{K}_1)_{kl}\,,$$

donde hemos aplicado la ec. (2.1). Por tanto las matrices $\mathcal{K}_i$ están relacionadas por

$$\mathcal{K}_2 = A^T \,\mathcal{K}_1\, A\,,$$

siendo A una matriz invertible. En particular, si $\mathfrak{g}_1$ y $\mathfrak{g}_2$ son álgebras *reales* las matrices $\mathcal{K}_1$ y $\mathcal{K}_2$ han de tener la misma signatura. Por tanto, *una condición necesaria para que dos álgebras de Lie* reales *sean isomorfas es que sus formas de Killing tengan la misma signatura.*

Ejercicio 2.1. Sea $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base de $\mathfrak{g}$, y denotemos por c_{ij}^k $(i,j,k = 1,\dots,n)$ las constantes de estructura de $\mathfrak{g}$ respecto de B. Probar que los elementos de matriz $K_{ij} \equiv K(e_i, e_j)$ de la forma de Killing de $\mathfrak{g}$ están dados en dicha base por

$$K_{ij} = \sum_{k,l=1}^{n} c_{il}^k c_{jk}^l\,.$$

Aplicar esta fórmula para calcular la forma de Killing del álgebra $\mathfrak{so}(3)$, cuyas constantes de estructura en una base apropiada son $c_{ij}^k = \epsilon_{ijk}$ (donde ϵ_{ijk} es el tensor completamente antisimétrico de Levi–Civita).

Solución. Al ser

$$\operatorname{ad} e_i \operatorname{ad} e_j \cdot e_k = \big[e_i, [e_j, e_k]\big] = \sum_{l=1}^{n} c_{jk}^l [e_i, e_l] = \sum_{l,m=1}^{n} c_{jk}^l c_{il}^m e_m\,,$$

se tiene

$$(\operatorname{ad} e_i \operatorname{ad} e_j)_{mk} = c_{jk}^l c_{il}^m\,,$$

de donde se sigue la fórmula para K_{ij}. En particular, en el caso de $\mathfrak{so}(3)$

$$K_{ij} = \sum_{k,l=1}^{3} \epsilon_{ilk}\epsilon_{jkl} = -\sum_{k,l=1}^{3} \epsilon_{ikl}\epsilon_{jkl} = -2\,\delta_{ij}\,.$$

Lema 2.2. *Si $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ es un ideal, entonces la forma de Killing de $\mathfrak{a}$, que denotaremos por $K_{\mathfrak{a}}$, es la* restricción *de K a $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$.*

Forma de Killing de un ideal

Demostración. Hay que probar que

$$K_{\mathfrak{a}}(x,y) = K(x,y)\,, \qquad \forall x, y \in \mathfrak{a}\,.$$

Sea $B = B_1 \cup B_2$ una base de $\mathfrak{g}$ tal que B_1 es base de $\mathfrak{a}$. Al ser $\mathfrak{a}$ ideal, para todo $a \in \mathfrak{a}$ se tiene $\operatorname{ad} a \cdot B_i \subset \mathfrak{a} = \operatorname{lin} B_1$, $i = 1,2$. La matriz de $\operatorname{ad} a$ respecto de B es por tanto de la forma

$$(\operatorname{ad} a)_B = \begin{pmatrix} (\operatorname{ad} a)_{B_1} & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde $(\operatorname{ad} a)_{B_1}$ denota la matriz de $\operatorname{ad} a|_{\mathfrak{a}}$ en la base B_1 de $\mathfrak{a}$. (Nótese que $\operatorname{ad} a$ deja invariante $\mathfrak{a}$, al ser este conjunto un ideal, y por tanto una subálgebra, de $\mathfrak{g}$.) Si $x, y \in \mathfrak{a}$, la matriz de $\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y$ respecto de B está dada por

$$(\operatorname{ad} x)_B(\operatorname{ad} y)_B = \begin{pmatrix} (\operatorname{ad} x)_{B_1}(\operatorname{ad} y)_{B_1} & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y por tanto

$$K(x,y) = \operatorname{tr}\left((\operatorname{ad} x)_B(\operatorname{ad} y)_B\right) = \operatorname{tr}\left((\operatorname{ad} x)_{B_1}(\operatorname{ad} y)_{B_1}\right) \equiv K_{\mathfrak{a}}(x,y)\,.$$

Q.E.D.

Si $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ es un ideal, su **complemento ortogonal** es el subespacio $\mathfrak{a}^{\perp}$

$$\mathfrak{a}^{\perp} = \left\{x \in \mathfrak{g} : K(x,\mathfrak{a}) = 0\right\}.$$

Es fácil comprobar que $\mathfrak{a}^{\perp}$ *es un ideal de* $\mathfrak{g}$. En efecto, si $a \in \mathfrak{a}$ y $x \in \mathfrak{a}^{\perp}$ de la asociatividad de la forma de Killing se sigue que

$$K([x,y],a) = K(x,[y,a]) = 0\,, \qquad \forall y \in \mathfrak{g}\,,$$

ya que $[y,a] \in \mathfrak{a}$ al ser $\mathfrak{a}$ un ideal.

Definición 2.3. El ideal $\mathfrak{g}^{\perp}$ se denomina **radical** de la forma de Killing de $\mathfrak{g}$, y se denota por $\operatorname{rad} K$. $\operatorname{rad} K$

En otras palabras, $x \in \operatorname{rad} K$ si y sólo si $K(x,y) = 0$ para todo $y \in \mathfrak{g}$. De esto se deduce que la forma bilineal K es **no degenerada** si y sólo si $\operatorname{rad} K = 0$. (Recuérdese que una forma bilineal K es no degenerada si y sólo si $\det\left(K_{ij}\right) \neq 0$.)

2.2 Criterios de Cartan

Comenzaremos enunciando dos importantes resultados, que son fundamentales para demostrar los criterios de solubilidad y semisimplicidad debidos a Elié Cartan:

Teorema 2.4 (Lie)**.** *Si V es un espacio vectorial* complejo *de dimensión finita y $\mathfrak{g}$ es una subálgebra* soluble *de $\mathfrak{gl}(V)$, hay una base de V en la cual las matrices de los elementos de $\mathfrak{g}$ son* triangulares superiores. (Cf. [2, Sección 4.1].) *T. de Lie*

En otras palabras, hay una cadena de subespacios $V_1 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n \equiv V$ tal que $\dim V_i = i$ para todo $1,\dots,n = \dim \mathfrak{g}$, y $x \cdot V_i \subset V_i$ para todo $x \in \mathfrak{g}$.

Corolario 2.5. *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra soluble* compleja *de dimensión finita, hay una cadena $\mathfrak{g}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_{n-1} \subset \mathfrak{g}_n \equiv \mathfrak{g}$ de* ideales *de $\mathfrak{g}$ tales que* $\dim \mathfrak{g}_i = i$ *para todo $i = 1,\dots,n =$* $\dim \mathfrak{g}$.

Demostración. En efecto, si $\mathfrak{g}$ es soluble también lo será el álgebra lineal $\operatorname{ad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, ya que ad es un homomorfismo. Por el teorema de Lie, existe una cadena de subespacios $0 \equiv \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \cdots \subset \mathfrak{g}_{n-1} \subset \mathfrak{g}_n \equiv \mathfrak{g}$ tales que $\dim \mathfrak{g}_i = i$ para todo $i = 0,1,\dots,n = \dim \mathfrak{g}$, y $\operatorname{ad} x \cdot \mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{g}_i$ para todo $x \in \mathfrak{g}$. Por tanto $\mathfrak{g}_i$ es un ideal de $\mathfrak{g}$ para todo i. *Q.E.D.*

Ejercicio 2.2. Probar el recíproco del corolario anterior: si en un álgebra $\mathfrak{g}$ hay una cadena de ideales $\mathfrak{g}_1 \cdots \subset \mathfrak{g}_{n-1} \subset \mathfrak{g}_n \equiv \mathfrak{g}$ tales que $\dim \mathfrak{g}_i = i$ para todo $i = 1,\dots,n = \dim \mathfrak{g}$, entonces $\mathfrak{g}$ es soluble. [*Ayuda:* demostrar que $\mathfrak{g}^{(i)} \subset \mathfrak{g}_{n-i}$ para todo $i = 0,\dots,n-1$.]

Si $\mathfrak{g}$ es nilpotente entonces $\operatorname{ad} x$ es un operador nilpotente para todo $x \in \mathfrak{g}$, ya que $(\operatorname{ad} x)^k\,\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}^k$ para todo $k = 1,2,\dots$. De hecho, el recíproco de este resultado es también cierto:

Teorema 2.6 (Engel)**.** *Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es nilpotente si y sólo si* $\operatorname{ad} x$ *es nilpotente para todo* $x \in \mathfrak{g}$. (Cf. [2, secciones 3.2 y 3.3].) $\mathfrak{g}$ *nilpotente* $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{g}$ ad-*nilpotente*

Corolario 2.7. *Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es soluble si y sólo si su álgebra derivada es nilpotente.*

Demostración. En primer lugar, si $\mathfrak{g}^1$ es nilpotente entonces $\mathfrak{g}$ es soluble, ya que $(\mathfrak{g}^1)^{(i)} = \mathfrak{g}^{(i+1)}$. Recíprocamente, supongamos que $\mathfrak{g}$ es soluble. En primer lugar, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\mathfrak{g}$ es un álgebra compleja, ya que un álgebra real es soluble o nilpotente si y sólo si su complexificación lo es (cf. Ejercicio 1.4). Por el teorema de Lie (aplicado al álgebra soluble $\operatorname{ad}(\mathfrak{g})$), hay una base B de $\mathfrak{g}$ en la cual la matriz $(\operatorname{ad} x)_B$ de cualquier operador $\operatorname{ad} x$ con $x \in \mathfrak{g}$ es triangular superior. De esto se deduce que si $x, y \in \mathfrak{g}$ entonces $(\operatorname{ad}[x,y])_B = [(\operatorname{ad} x)_B, (\operatorname{ad} y)_B]$ es triangular superior *estricta*. Por linealidad, para todo $z \in \mathfrak{g}^1$ la matriz $(\operatorname{ad} z)_B \in \mathfrak{t}_0(\dim \mathfrak{g}, \mathbf{C})$ es nilpotente. Luego $\operatorname{ad} z$ es nilpotente para todo $z \in \mathfrak{g}^1$, y $\mathfrak{g}^1$ es nilpotente por el teorema de Engel. *Q.E.D.*

$\mathfrak{g}$ soluble $\Leftrightarrow \mathfrak{g}^1$ nilpotente

Lema 2.8. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea $A \in \mathfrak{gl}(V)$. Si existe una cadena de subespacios $V \equiv V_0 \supset V_1 \supset \cdots \supset V_k \supset V_{k+1} \equiv 0$ tal que $A\,V_i \subset V_{i+1}$, para todo $i = 0, \dots, k$, entonces $\operatorname{tr} A = 0$.*

Demostración. En efecto, del enunciado se sigue que $A^{k+1} V \subset V_{k+1} = 0$, por lo que A es nilpotente y, por consiguiente, de traza nula. *Q.E.D.*

Teorema 2.9 (criterio de Cartan)**.** *Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es* soluble *si y sólo si $\mathfrak{g}^1 \subset \operatorname{rad} K$.*

$\mathfrak{g}$ soluble $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{g}^1 \subset \operatorname{rad} K$

Demostración. Hay que probar que $\mathfrak{g}$ es soluble si y sólo si $K(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^1) = 0$. Demostraremos a continuación que si $\mathfrak{g}$ es soluble entonces $K(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^1) = 0$; véase [2, Sección 4.3] para una demostración de la implicación contraria.

Sea $\mathfrak{g}$ soluble, y tomemos dos elementos $x \in \mathfrak{g}^1$, $y \in \mathfrak{g}$. Para probar que $K(x,y) = 0$, intentaremos aplicar el Lema 2.8 con $V = \mathfrak{g}$, $V_i = (\mathfrak{g}^1)^{i-1}$. Nótese que, al ser $\mathfrak{g}$ soluble por hipótesis, por el Corolario 2.7 $\mathfrak{g}^1$ es nilpotente, y por tanto existe $k \geq 0$ tal que $(\mathfrak{g}^1)^k = 0$. Obsérvese también que $(\mathfrak{g}^1)^i$ es un ideal de $\mathfrak{g}$ para todo i (el conmutador de dos ideales es un ideal). Por definición de la serie central descendente se tiene entonces

$$\begin{aligned} &\operatorname{ad} x \ \operatorname{ad} y \cdot \mathfrak{g} \subset \operatorname{ad} x \cdot \mathfrak{g}^1 \subset \mathfrak{g}^1 \\ &\operatorname{ad} x \ \operatorname{ad} y \cdot (\mathfrak{g}^1)^{i-1} \subset \operatorname{ad} x \cdot (\mathfrak{g}^1)^{i-1} \subset (\mathfrak{g}^1)^i, \qquad \forall i = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Por el lema anterior, $\operatorname{tr}(\operatorname{ad} x \ \operatorname{ad} y) = K(x,y) = 0$. *Q.E.D.*

Corolario 2.10. *El radical de la forma de Killing es un ideal* soluble*, y por tanto*

$$\operatorname{rad} K \subset \operatorname{rad} \mathfrak{g}.$$

Demostración. En efecto, por definición de radical $K(x,y) = 0$ para todo $x, y \in \operatorname{rad} K$. Por el Lema 2.2 $K_{\operatorname{rad} K} = 0$, lo cual implica que $\operatorname{rad} K$ es soluble por el criterio de Cartan. *Q.E.D.*

Teorema 2.11 (Cartan)**.** *Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es* semisimple *si y sólo si su forma de Killing es* no degenerada.

$\mathfrak{g}$ semisimple $\Leftrightarrow \operatorname{rad} K = 0$

Demostración. Probaremos que $\mathfrak{g}$ no es semisimple si y sólo si K es degenerada. Supongamos, en primer lugar, que K es degenerada. Entonces $\operatorname{rad} K \neq 0$ es un ideal de $\mathfrak{g}$, y es soluble por el corolario anterior. Luego en este caso $\mathfrak{g}$ posee un ideal soluble no nulo, y por tanto no es semisimple.

Recíprocamente, supongamos que $\mathfrak{g}$ no es semisimple, y sea $\mathfrak{a} \neq 0$ un ideal abeliano de $\mathfrak{g}$. Probaremos a continuación que $\mathfrak{a} \subset \operatorname{rad} K$. En efecto, si $a \in \mathfrak{a}$ y $x \in \mathfrak{g}$ entonces

$$(\operatorname{ad} a \ \operatorname{ad} x)^2 \cdot \mathfrak{g} \subset (\operatorname{ad} a \ \operatorname{ad} x) \cdot (\operatorname{ad} a \cdot \mathfrak{g}) \subset (\operatorname{ad} a \ \operatorname{ad} x) \cdot \mathfrak{a} \subset \operatorname{ad} a \cdot \mathfrak{a} = 0.$$

Al ser $\operatorname{ad} a \ \operatorname{ad} x$ nilpotente,

$$\operatorname{tr}(\operatorname{ad} a \ \operatorname{ad} x) = K(a, x) = 0 \,.$$

Q.E.D.

Ejercicio 2.3. Utilizando el criterio de Cartan, probar que la suma directa de álgebras semisimples es semisimple.

El criterio de semisimplicidad de Cartan tiene consecuencias inmediatas aunque muy importantes en relación con la estructura de las álgebras de Lie semisimples, que estudiaremos a continuación.

Proposición 2.12. *Si $\mathfrak{a}$ es un ideal de un álgebra de Lie semisimple $\mathfrak{g}$, entonces $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{a}^\perp$ son semisimples, y $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$.*

$\mathfrak{a}$ ideal $\Rightarrow$ $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}^\perp$ semisimples, $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$

Demostración. En primer lugar, si $\mathfrak{a}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$ también lo serán $\mathfrak{a}^\perp$ y $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$ (intersección de ideales). Este último ideal es *soluble* por el criterio de Cartan, ya que su forma de Killing se anula idénticamente:

$$K(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp, \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp) \subset K(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^\perp) = 0 \,.$$

Al ser $\mathfrak{a}$ semisimple, $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp = 0$, de lo cual se sigue que $\mathfrak{a} + \mathfrak{a}^\perp = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$ es una suma directa, y por tanto $\dim(\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp) = \dim \mathfrak{a} + \dim \mathfrak{a}^\perp$. Por otra parte, al ser K no degenerada se tiene

$$\dim \mathfrak{a} + \dim \mathfrak{a}^\perp = \dim \mathfrak{g} \,,$$

lo cual implica que $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$. La semisimplicidad de $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{a}^\perp$ se deduce fácilmente del criterio de Cartan. Por ejemplo, si $x \in \mathfrak{a}$ satisface $K_\mathfrak{a}(x, \mathfrak{a}) = 0$ entonces

$$0 = K_\mathfrak{a}(x, \mathfrak{a}) = K(x, \mathfrak{a}) = K(x, \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp) = K(x, \mathfrak{g}) \Rightarrow x = 0 \,.$$

Q.E.D.

Corolario 2.13. *Toda álgebra de Lie semisimple $\mathfrak{g}$ es la suma directa $\mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_r$ de sus ideales simples $\mathfrak{g}_i$, y todo ideal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ es suma directa de ciertos $\mathfrak{g}_i$.*

Los ideales de $\mathfrak{g}$ son suma directa de ideales simples

Demostración. La existencia de la descomposición de $\mathfrak{g}$ en suma directa de ideales simples $\mathfrak{g}_i$ es consecuencia inmediata de la proposición anterior (ya que $\mathfrak{g}$ es de dimensión finita). Si $\mathfrak{a}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$ también lo es $\mathfrak{a}^\perp$, y para todo $i = 1, \ldots, r$ se cumple que $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_i$ y $\mathfrak{a}^\perp \cap \mathfrak{g}_i$ son ideales de $\mathfrak{g}_i$. Al ser $\mathfrak{g}_i$ simple, $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_i = 0$ ó $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_i = \mathfrak{g}_i$, y análogamente para $\mathfrak{a}^\perp \cap \mathfrak{g}_i$. Además, si $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_i = \mathfrak{g}_i$ entonces $\mathfrak{a}^\perp \cap \mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp = 0$, y si $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_i = 0$ entonces $\mathfrak{a}^\perp \cap \mathfrak{g}_i = \mathfrak{g}_i$, ya que en caso contrario $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}_i] \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_i = 0$ y $[\mathfrak{a}^\perp, \mathfrak{g}_i] \subset \mathfrak{a}^\perp \cap \mathfrak{g}_i = 0$ implicaría que $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}] = 0$. Por tanto, $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_j = \mathfrak{g}_j$ para $j = i_1, \ldots, i_k$ y $\mathfrak{a}^\perp \cap \mathfrak{g}_j = \mathfrak{g}_j$ para $j = i_{k+1}, \ldots, i_r$. (Si $k = 0$, es decir si $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_i = 0$ para todo i, entonces $\mathfrak{a}^\perp \cap \mathfrak{g}_i = \mathfrak{g}_i$ para todo i y por tanto $\mathfrak{a}^\perp = \mathfrak{g} \Rightarrow \mathfrak{a} = 0$. Del mismo modo, si $k = r$ se tendría $\mathfrak{a} = \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_r$, y también en este caso $\mathfrak{a}$ sería suma directa de (todos los) ideales $\mathfrak{g}_i$.) Pero entonces $\mathfrak{g}_{i_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{i_k} \subset \mathfrak{a}$ y $\mathfrak{g}_{i_{k+1}} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{i_r} \subset \mathfrak{a}^\perp$, y de la descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$ se sigue que ambos contenidos son de hecho igualdades. Por último, si $\mathfrak{h}$ es un ideal simple de $\mathfrak{g}$ de lo anterior se sigue que $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_i$ para algún $i = 1, \ldots, r$. *Q.E.D.*

Corolario 2.14. *Si $\mathfrak{g}$ es semisimple entonces $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}$.*

$\mathfrak{g}$ *semisimple* $\Rightarrow \mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}$

Demostración. Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_r$ la descomposición de $\mathfrak{g}$ en ideales simples. Al ser $\mathfrak{g}_i$ simple, $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_i$, y por tanto

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \bigoplus_{i=1}^{r} [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i] = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathfrak{g}_i = \mathfrak{g}.$$

Q.E.D.

Ejercicio 2.4. i) Si $\rho : \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathfrak{g}_2$ es un homomorfismo de álgebras de Lie, probar que $\rho(\mathfrak{g}_1)$ es isomorfa a $\mathfrak{g}_1 / \ker \rho$. ii) Utilizar el resultado anterior para demostrar que la imagen de un álgebra semisimple bajo un homomorfismo es semisimple.

Solución. i) En primer lugar, nótese que si ρ es un homomorfismo entonces $\ker \rho$ es un ideal y, por tanto, el espacio cociente $\mathfrak{g}_1 / \ker \rho$ es un álgebra de Lie. Además, la aplicación $i : \mathfrak{g}_1 / \ker \longrightarrow \rho(\mathfrak{g}_1)$ definida por $i(x + \ker \rho) = \rho(x)$ es claramente un isomorfismo de álgebras de Lie (compruébese esto en detalle).

ii) Por la Proposición 2.12, si $\mathfrak{g}$ es semisimple entonces $\mathfrak{g} / \ker \rho$ es isomorfa al ideal $(\ker \rho)^{\perp}$, que (como todo ideal de $\mathfrak{g}$) es semisimple. El resultado anterior implica que $\rho(\mathfrak{g}_1) \approx \mathfrak{g} / \ker \rho$ también es semisimple.

Finalmente, mencionaremos sin demostración tres resultados que juegan un papel importante en la teoría de las álgebras semisimples.

Proposición 2.15. *Todas las derivaciones de un álgebra semisimple son internas.* (Cf. [1, Cap. II, Prop. 6.4].)

En otras palabras, si $\mathfrak{g}$ es semisimple $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) = \partial(\mathfrak{g})$, y por tanto $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ es la componente conexa de la identidad de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$.

Definición 2.16. Una representación $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es **reducible** si existe un subespacio propio W de V invariante bajo $\rho(\mathfrak{g})$, es decir tal que $\rho(x) \cdot W \subset W$ para todo $x \in \mathfrak{g}$. En caso contrario, se dirá que ρ es **irreducible**.

Si ρ es reducible y $W \subset V$ es un subespacio propio de V invariante bajo ρ, la restricción de ρ a W es la aplicación $\rho|_W : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(W)$ definida por $\rho|_W(x) \cdot w = \rho(x) \cdot w$, para todo $x \in \mathfrak{g}$ y $w \in W$. Claramente, $\rho|_W$ es una representación de $\mathfrak{g}$ cuyo espacio vectorial subyacente es W.

Definición 2.17. Una representación ρ es **completamente reducible** si V es suma directa de subespacios invariantes bajo $\rho(\mathfrak{g})$, tales que la restricción de ρ a cada uno de dichos subespacios es irreducible.

Un importante teorema debido a H. Weyl afirma que *las representaciones finito-dimensionales de un álgebra de Lie semisimple son completamente reducibles.* (Cf. [2, 6.3].)

Por último, otro notable resultado de H. Weyl relaciona la forma de Killing del álgebra de Lie de un grupo de Lie *real* con la compacidad del grupo:

Teorema 2.18. *Un grupo de Lie real es compacto si y sólo si la forma de Killing de su álgebra de Lie es definida negativa.* (Cf. [5, Teor. 11.1].)

Definición 2.19. Un álgebra de Lie *real* se dice **compacta** si su forma de Killing es definida negativa.

Veremos más adelante (Cap. 4) que *toda álgebra semisimple compleja posee una forma real compacta.*

2.3 Forma de Killing de las álgebras clásicas complejas

Las **álgebras clásicas complejas** $\mathfrak{a}_n$, $\mathfrak{b}_n$, $\mathfrak{c}_n$ $(n \geq 1)$ y $\mathfrak{d}_n$ $(n > 1)$ se definen como sigue:

Álgebras clásicas complejas

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{a}_n &= \mathfrak{sl}(n+1, \mathbf{C}) \\
\mathfrak{b}_n &= \mathfrak{so}(2n+1, \mathbf{C}) \\
\mathfrak{c}_n &= \mathfrak{sp}(n, \mathbf{C}) \\
\mathfrak{d}_n &= \mathfrak{so}(2n, \mathbf{C}) .
\end{aligned}
$$

Es relativamente sencillo calcular la forma de Killing de las álgebras clásicas complejas, y probar que *todas ellas son semisimples*. Por concisión, consideraremos en detalle sólamente el caso de $\mathfrak{a}_n$, remitiendo al lector a la Ref. [1, Cap. III, §8] para los cálculos correspondientes a los demás casos.

Una base de $\mathfrak{a}_n$ está dada por las matrices

$\mathfrak{a}_n$

$$
H_k = E_{kk} - E_{k+1,k+1} , \quad E_{ij} ; \qquad 1 \leq k \leq n , \; 1 \leq i \neq j \leq n+1 . \tag{2.2}
$$

Sea $\mathfrak{h} = \operatorname{lin}\{H_1, \ldots, H_n\}$ la subálgebra abeliana de $\mathfrak{a}_n$ formada por las matrices diagonales de traza cero. Comencemos calculando $K(H,H)$, siendo $H \in \mathfrak{h}$. Si $e_i(H) = h_{ii}$ se tiene $[H, H_k] = 0$ $(1 \leq k \leq n)$ y

H diagonal

$$
[H, E_{ij}] = \sum_{k=1}^{n+1} e_k(H) [E_{kk}, E_{ij}] = \big(e_i(H) - e_j(H)\big) E_{ij} , \qquad 1 \leq i \neq j \leq n+1 .
$$

De esto se deduce que $\operatorname{ad} H$ es diagonal en la base (2.2), y $K(H,H) = \operatorname{tr}\left[(\operatorname{ad} H)^2\right]$ está dado por tanto por la suma de los cuadrados de los elementos de matriz de $\operatorname{ad} H$ en esta base, es decir:

$$
\begin{aligned}
K(H,H) = \sum_{i,j=1}^{n+1} \big(e_i(H) - e_j(H)\big)^2 &= 2 \sum_{i,j=1}^{n+1} e_i(H)^2 - 2 \sum_{i,j=1}^{n+1} e_i(H) e_j(H) \\
&= 2(n+1) \operatorname{tr}(H^2) - 2(\operatorname{tr} H)^2 = 2(n+1) \operatorname{tr}(H^2) .
\end{aligned}
$$

Sea, a continuación, $Y \in \mathfrak{a}_n$ diagonalizable. Existe entonces una matriz invertible $g \in \mathrm{GL}(n+1, \mathbf{C})$ tal que $g^{-1} Y g \equiv H \in \mathfrak{h}$. Al ser $X \mapsto g X g^{-1}$ un automorfismo de $\mathfrak{a}_n$ se tiene:

Y diagonalizable

$$
\begin{aligned}
K(Y,Y) = K\big(gHg^{-1}, gHg^{-1}\big) &= K(H,H) = 2(n+1) \operatorname{tr}(H^2) \\
&= 2(n+1) \operatorname{tr}(g^{-1} Y^2 g) = 2(n+1) \operatorname{tr}(Y^2) .
\end{aligned}
$$

La aplicación $X \mapsto K(X,X) - 2(n+1) \operatorname{tr}(X^2)$ es claramente continua en $\mathfrak{a}_n$, y se anula en la intersección de $\mathfrak{a}_n$ con el conjunto de matrices diagonalizables. Como este último conjunto es denso en $\mathfrak{a}_n$, por continuidad deducimos que

$$
K(X,X) = 2(n+1) \operatorname{tr}(X^2) , \qquad \forall X \in \mathfrak{a}_n .
$$

Finalmente, si $X, Y \in \mathfrak{a}_n$ de la identidad de polarización

$K(x,x)$

$$
K(X,Y) = \frac{1}{4} \big[K(X+Y, X+Y) - K(X-Y, X-Y) \big]
$$

se deduce que

$$K(X,Y) = \frac{1}{2}(n+1)\big\{\operatorname{tr}\big[(X+Y)^2\big] - \operatorname{tr}\big[(X-Y)^2\big]\big\} = 2(n+1)\operatorname{tr}(XY)\,.$$

$K(x,y)$

Por tanto, la forma de Killing de $\mathfrak{a}_n$ está dada por

$$K(X,Y) = 2(n+1)\operatorname{tr}(XY)\,, \qquad \forall X,Y \in \mathfrak{a}_n\,.$$

$\mathfrak{a}_n$ semisimple

De esto se sigue inmediatamente que $\mathfrak{a}_n$ es semisimple. En efecto, si $X \in \mathfrak{a}_n$ entonces $X^\dagger \in \mathfrak{a}_n$; en particular, si $X \in \mathfrak{a}_n^\perp$ se tiene

$$0 = K(X,X^\dagger) = 2(n+1)\operatorname{tr}(X^\dagger X) = 2(n+1)\sum_{i,j=1}^{n+1}|x_{ij}|^2 \Rightarrow X = 0\,.$$

Las álgebras clásicas complejas son semisimples

Cálculos análogos a los anteriores demuestran que para las demás álgebras clásicas complejas la forma de Killing también es proporcional a $\operatorname{tr}(XY)$, es decir

$$K(X,Y) = \kappa(\mathfrak{g})\operatorname{tr}(XY)\,,$$

donde el factor de proporcionalidad está dado por

$$\kappa(\mathfrak{b}_n) = 2n-1\,, \qquad \kappa(\mathfrak{c}_n) = 2(n+1)\,, \qquad \kappa(\mathfrak{d}_n) = 2(n-1)\,.$$

Además, es claro que todas las álgebras clásicas complejas tienen la propiedad de que si $X \in \mathfrak{g}$ entonces $X^\dagger \in \mathfrak{g}$. Esta propiedad, junto con la expresión anterior para la forma de Killing, implica como antes que *todas las álgebras clásicas complejas son semisimples.* De hecho, veremos más adelante que todas las álgebras clásicas complejas son *simples*.

2.4 Subálgebras de Cartan

Subálgebra de Cartan

Definición 2.20. Una **subálgebra de Cartan** de un álgebra de Lie semisimple $\mathfrak{g}$ es una subálgebra abeliana maximal $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ tal que $\operatorname{ad} H$ es diagonalizable para todo $H \in \mathfrak{h}$.

En la definición anterior, la maximalidad significa que $\mathfrak{h}$ no está propiamente contenida en ninguna subálgebra abeliana de $\mathfrak{g}$.

Teorema 2.21. *Toda álgebra de Lie semisimple compleja $\mathfrak{g}$ posee una subálgebra de Cartan. Además, si $\mathfrak{h}_1$ y $\mathfrak{h}_2$ son dos subálgebras de Cartan de $\mathfrak{g}$ hay un automorfismo interno $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{h}_2 = \sigma \cdot \mathfrak{h}_1$.* (Cf. [1, Cap. III, teor. 3.1], [2, 16.4].)

Rango

Nótese, en particular, que *todas las álgebras de Cartan de $\mathfrak{g}$ tienen la misma dimensión.* La dimensión de cualquier subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ se denomina el **rango** de $\mathfrak{g}$.

$\mathfrak{h}$ sub. de Cartan de $\mathfrak{a}_n$

Ejemplo 2.1. Veamos que el álgebra $\mathfrak{h}$ de las matrices diagonales de traza cero es una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{a}_n$. En efecto, $\mathfrak{h}$ es abeliana, y ya hemos visto en la sección anterior que $\operatorname{ad} H$ es diagonal en la base (2.2) para todo $H \in \mathfrak{h}$. Por tanto, sólo resta comprobar que $\mathfrak{h}$ es maximal. Supongamos, a tal efecto, que $\mathfrak{h}$ estuviera contenida propiamente en una subálgebra abeliana de $\mathfrak{g}$. Existiría entonces $X = H_0 + \sum_{i\neq j} x_{ij}E_{ij}$, con $H_0 \in \mathfrak{h}$ y $\sum_{i\neq j} x_{ij}E_{ij} \neq 0$, tal que $[X,H] = 0$ para todo $H \in \mathfrak{h}$. Entonces

$$\begin{aligned} 0 = [H,X] &= \sum_{i\neq j} x_{ij}\big(e_i(H) - e_j(H)\big)E_{ij} \\ &\Rightarrow x_{ij}\big(e_i(H) - e_j(H)\big) = 0\,, \qquad 1 \le i \neq j \le n+1\,, \quad \forall H \in \mathfrak{h}\,. \end{aligned}$$

En particular, tomando (para cada par $i \neq j$ fijo) $H = E_{ii} - E_{jj} \in \mathfrak{h}$ obtenemos inmediatamente $2x_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$.

Una vez probado que $\mathfrak{h}$ es una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{a}_n$ podemos afirmar que $\mathfrak{a}_n$ tiene rango n. Cálculos parecidos al anterior (aunque algo más complejos) permiten construir subálgebras de Cartan para las restantes álgebras clásicas complejas, demostrando en particular que también $\mathfrak{b}_n$, $\mathfrak{c}_n$ y $\mathfrak{d}_n$ tienen rango n. Véase [1, Cap. III, §8 y Ej. B5–B6]. $\operatorname{rank} \mathfrak{a}_n = n$

Capítulo 3

Raíces y subespacios de raíces

3.1 Introducción

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie semisimple compleja (de dimensión finita), y sea $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$. Por definición de subálgebra de Cartan, para cada $H \in \mathfrak{h}$ hay una base de $\mathfrak{g}$ respecto de la cual la matriz de $\operatorname{ad} H$ es diagonal. Más aún, al ser $\mathfrak{h}$ abeliana es posible encontrar una base de $\mathfrak{g}$ respecto de la cual *todos* los endomorfismos $\operatorname{ad} H$ son diagonales *simultáneamente*. Por ejemplo, en el caso de $\mathfrak{a}_n \equiv \mathfrak{sl}(n+1, \mathbf{C})$ tal base es la formada por las matrices H_k y E_{ij}, $1 \le k \le n$, $1 \le i \ne j \le n+1$. En este capítulo veremos en detalle cómo este tipo de bases, respecto de las cuales todos los endomorfismos $\operatorname{ad} H$ son diagonales simultáneamente, juegan un papel esencial a la hora de estudiar la estructura de un álgebra de Lie semisimple compleja cualquiera.

Raíces y subespacios de raíces

Para construir una base de $\mathfrak{g}$ en la que las matrices de todos los endomorfismos $\operatorname{ad} H$ sean diagonales simultáneamente necesitamos encontrar $\dim \mathfrak{g}$ autovectores linealmente independientes comunes a *todos* los $\operatorname{ad} H$. En general, si $X \ne 0$ es un autovector común a todos los $\operatorname{ad} H$ se tiene que

$$[H, X] = \alpha(H) X, \qquad \forall H \in \mathfrak{h}\,, \tag{3.1}$$

$\alpha \in \mathfrak{h}^*$

y es inmediato deducir de esta ecuación que el autovalor α es *lineal* en H, es decir $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, siendo $\mathfrak{h}^*$ el dual de $\mathfrak{h}$. Diremos entonces que $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ es una **raíz** de $\mathfrak{g}$ (respecto de $\mathfrak{h}$), y llamaremos **subespacio de la raíz** α al subespacio $\mathfrak{g}^\alpha$ de $\mathfrak{g}$ formado por todos los vectores X que satisfacen (3.1), es decir

$\mathfrak{g}^\alpha$

$$\mathfrak{g}^\alpha = \left\{ X \in \mathfrak{g} \mid [H, X] = \alpha(H) X,\ \forall H \in \mathfrak{h} \right\}. \tag{3.2}$$

En otras palabras, $\mathfrak{g}^\alpha$ es el subespacio de los autovectores comunes a todos los $\operatorname{ad} H$ con autovalor asociado $\alpha(H)$ (junto con el vector 0).

Nota. Si $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ no es una raíz, también definiremos $\mathfrak{g}^\alpha$ por (3.2), aunque en tal caso es evidente que $\mathfrak{g}^\alpha = 0$. En otras palabras, α raíz de $\mathfrak{g} \Leftrightarrow \mathfrak{g}^\alpha \ne 0$.

$\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{h}$

Por ejemplo, $0 \in \mathfrak{h}^*$ siempre es raíz, ya que $\mathfrak{h}$ es subálgebra abeliana; es más, por ser $\mathfrak{h}$ maximal se tiene obviamente que $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{h}$.

Raíces de $\mathfrak{a}_n$

Ejemplo 3.1. Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_n$, con $\mathfrak{h} = \left\{ H \in \mathfrak{a}_n \mid H \text{ diagonal} \right\}$. Como

$$[H, E_{ij}] = \big(e_i(H) - e_j(H)\big)\, E_{ij}, \qquad \forall H \in \mathfrak{h},$$

(siendo $e_k(H) = H_{kk}$), se tiene que $e_i - e_j$ es raíz de $\mathfrak{g}$ respecto de $\mathfrak{h}$, $\forall i \neq j$, y por definición $\mathbf{C}\,E_{ij} \subset \mathfrak{g}^{e_i - e_j}$. Además, de la descomposición

$$\mathfrak{a}_n = \mathfrak{h} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n+1} \mathbf{C}\,E_{ij} \qquad \text{(suma directa vectorial)}$$

se deduce que las únicas raíces no nulas de $\mathfrak{a}_n$ son los funcionales $e_i - e_j$ ($1 \leq i \neq j \leq n+1$), y que los subespacios raíces correspondientes están dados por

$$\mathfrak{g}^{e_i - e_j} = \mathbf{C}\,E_{ij}\,, \qquad 1 \leq i \neq j \leq n+1\,,$$

y por tanto son todos unidimensionales (ejercicio).

3.2 Propiedades de los subespacios de raíces

Por definición, $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta] \subset \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$

$$\begin{cases} X \in \mathfrak{g}^\alpha \Longrightarrow [H, X] = \alpha(H)X, & \forall H \in \mathfrak{h} \\ Y \in \mathfrak{g}^\beta \Longrightarrow [H, Y] = \beta(H)Y, & \forall H \in \mathfrak{h}, \end{cases}$$

y por la identidad de Jacobi se tiene entonces:

$$[H, [X, Y]] = [X, [H, Y]] + [[H, X], Y] = \big(\alpha(H) + \beta(H)\big)\,[X, Y] \quad \Rightarrow \quad [X, Y] \in \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}\,,$$

por lo que

$$[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta] \subset \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}, \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*. \tag{3.3}$$

Como consecuencia de (3.3) se tiene, en particular:

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}^\alpha] \subset \mathfrak{g}^\alpha, \qquad \forall \alpha \in \mathfrak{h}^*\,, \tag{3.4}$$

lo cual es también inmediato de la definición de $\mathfrak{g}^\alpha$ (ejercicio).

Teorema 3.1. *Sea Δ el conjunto de las raíces no nulas de $\mathfrak{g}$ respecto de $\mathfrak{h}$. Se tiene entonces:*

1. $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}^\alpha$ (suma directa vectorial)
2. $\dim \mathfrak{g}^\alpha = 1, \quad \forall \alpha \in \Delta$
3. $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*, \; \alpha + \beta \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad K(\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta) = 0$
4. $K|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}}$ *es* no degenerada*; por tanto, $\forall \alpha \in \mathfrak{h}^*$ existe un único $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ tal que $\alpha = K(\cdot, H_\alpha)$*
5. $\alpha \in \Delta \Rightarrow -\alpha \in \Delta$, *y* $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}] = \mathbf{C}H_\alpha$
6. $\alpha(H_\alpha) \neq 0$, *para todo* $\alpha \in \Delta$

Demostración parcial:

1. Es consecuencia de que todos los endomorfismos ad H ($H \in \mathfrak{h}$) son diagonalizables simultáneamente.

3. Si $\gamma \in \Delta \cup \{0\}$ es una raíz se tiene

$$\operatorname{ad} \mathfrak{g}^\alpha \; \operatorname{ad} \mathfrak{g}^\beta \cdot \mathfrak{g}^\gamma \subset \mathfrak{g}^{\alpha+\beta+\gamma},$$

y $\mathfrak{g}^\gamma \cap \mathfrak{g}^{\alpha+\beta+\gamma} = 0$ por 1) (ya que $\alpha + \beta \neq 0$ por hipótesis). En particular, nótese que de 3) se sigue que

$$K(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}^\alpha) = 0, \qquad \forall \alpha \in \Delta. \tag{3.5}$$

4. Por 1) y (3.5), si $K(H, \mathfrak{h}) = 0$ para algún $H \in \mathfrak{h}$ entonces $K(H, \mathfrak{g}) = 0$, y $H = 0$ por ser $\mathfrak{g}$ semisimple.

5. Si $\alpha \in \Delta$ y $\mathfrak{g}^{-\alpha} = 0$ entonces $K(\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}) = 0$ por 1) y 3), y por tanto $\mathfrak{g}^\alpha = 0$ en virtud del criterio de semisimplicidad de Cartan. Si $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha - \{0\}$, $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}^{-\alpha} - \{0\}$ y $H \in \mathfrak{h}$ se tiene

$$K([X_\alpha, X_{-\alpha}], H) = K(X_\alpha, [X_{-\alpha}, H]) = \alpha(H) K(X_\alpha, X_{-\alpha}) = K(H_\alpha, H) K(X_\alpha, X_{-\alpha}),$$

es decir

$$K\big([X_\alpha, X_{-\alpha}] - K(X_\alpha, X_{-\alpha}) H_\alpha, H\big) = 0, \qquad \forall H \in \mathfrak{h}.$$

De esta igualdad y del apartado anterior se sigue que

$$[X_\alpha, X_{-\alpha}] = K(X_\alpha, X_{-\alpha}) H_\alpha .$$

Pero $K(X_\alpha, X_{-\alpha}) \neq 0$ (ya que en caso contrario los apartados 1)–3) implicarían que $\mathfrak{g}_\alpha$ es ortogonal a todo $\mathfrak{g}$). *Q.E.D.*

N.B. El resto de la demostración puede encontrarse en [1, Cap. III, teor. 4.2].

Ejercicio 3.1. Probar que si $H \in \mathfrak{h}$ cumple $\alpha(H) = 0$ para todo $\alpha \in \Delta$ entonces $H = 0$.

Solución. Si $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$ entonces $[H, X_\alpha] = \alpha(H) X_\alpha = 0$, por lo que $[H, \mathfrak{g}] = 0$ en virtud del apartado 1) del Teorema 3.1. Por tanto $\mathbf{C}H$ es una subálgebra abeliana del álgebra semisimple $\mathfrak{g}$, de donde se sigue que $H = 0$.

Producto interior en $\mathfrak{h}^*$

Utilizando el apartado 4) del teorema anterior, si $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$ definimos (por razones que resultarán claras más adelante)

$$(\alpha, \beta) = K(H_\alpha, H_\beta), \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*; \tag{3.6}$$

nótese que evidentemente se tiene

$$(\alpha, \beta) = \alpha(H_\beta) = \beta(H_\alpha);$$

en particular, del apartado 5) del Teorema 3.1 se sigue que

$$(\alpha, \alpha) \neq 0, \qquad \forall \alpha \in \Delta.$$

Una consecuencia importante del apartado 1) del teorema anterior es la siguiente: si escogemos $0 \neq X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$, $\forall \alpha \in \Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_d\}$ ($d = \dim \mathfrak{g} - \operatorname{rank} \mathfrak{g}$), y $B_\mathfrak{h}$ es una base cualquiera de $\mathfrak{h}$, entonces $\forall H \in \mathfrak{h}$ la matriz de $\operatorname{ad} H$ en la base $B = B_\mathfrak{h} \cup \{X_{\alpha_i} \mid i = 1, \dots, d\}$ es diagonal, de la forma

$$\begin{pmatrix} 0_{\dim \mathfrak{h}} & & & \\ & \alpha_1(H) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_d(H) \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Por lo tanto, en esta base todos los endomorfismos $\operatorname{ad} H$ son diagonales simultáneamente. Además, de (3.7) se sigue la importante fórmula

$$K(H_1, H_2) = \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha(H_1) \alpha(H_2) \equiv \sum_{\alpha \in \Delta} K(H_1, H_\alpha) K(H_\alpha, H_2). \tag{3.8}$$

Definición 3.2. Si $\alpha \in \Delta$ y β es una raíz (es decir $\beta \in \Delta$ ó $\beta = 0$), se llama **α-serie por β** al conjunto de todas las raíces de la forma $\beta + n\,\alpha$, con $n \in \mathbf{Z}$.

α-series

Proposición 3.3. *La α-serie por β es una* cadena ininterrumpida, *es decir es un conjunto de la forma*

Las α-series son cadenas ininterrumpidas

$$\{\beta + n\,\alpha \mid p \le n \le q\},$$

con $p \le 0 \le q$ y

$$p + q = -2\,\frac{\beta(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)} = -2\,\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\,. \tag{3.9}$$

Demostración. Sean $r \le s$ dos enteros tales que $\beta + n\,\alpha$ es raíz si $r \le n \le s$, y no es raíz para $n = r-1$ y $n = s+1$. En otras palabras, el conjunto $\{\beta + n\,\alpha \mid r \le n \le s\}$ es una cadena maximal. El subespacio

$$V = \sum_{n=r}^{s} \mathfrak{g}^{\beta+n\alpha}$$

es invariante bajo los operadores $\operatorname{ad} H_\alpha$ y $\operatorname{ad} X_{\pm\alpha}$ (¿por qué?), y al ser $\operatorname{ad} H_\alpha$ proporcional a $[\operatorname{ad} X_\alpha, \operatorname{ad} X_{-\alpha}]$ se verifica $\operatorname{tr}_V(\operatorname{ad} H_\alpha) = 0$, es decir

$$0 = \sum_{n=r}^{s} (\beta + n\alpha)(H_\alpha) = (s-r+1)\beta(H_\alpha) + \frac{1}{2}(s-r+1)(r+s)\alpha(H_\alpha)\,. \tag{3.10}$$

De esta ecuación se obtiene la igualdad

$$r + s = -2\,\frac{\beta(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)}\,,$$

lo que demuestra la proposición. *Q.E.D.*

Ejercicio 3.2. Utilizando la ecuación (3.10), probar que $\alpha(H_\alpha) \neq 0$ para todo $\alpha \in \Delta$.

Solución. Si $\alpha(H_\alpha)$ fuera cero, de (3.10) se seguiría que $\beta(H_\alpha) = 0$ para toda raíz $\beta \in \Delta$. Por el Ejercicio 3.1 se tendría entonces $H_\alpha = 0$, es decir $\alpha = 0$.

Con ayuda de las α-series, se prueban los siguientes resultados, que jugarán un papel clave en la clasificación de todas las álgebras de Lie complejas semisimples de dimensión finita (cf. [1, Cap. III, Teor. 4.3]):

Teorema 3.4. *Sea $\alpha \in \Delta$, y sea β una raíz. Entonces se cumple:*

1. *Las únicas raíces proporcionales a α son 0 y $\pm\alpha$*
2. $\alpha + \beta \neq 0 \Longrightarrow [\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta] = \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$

3.3 Sistemas de raíces

Definamos

$\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$

$$\mathfrak{h}_{\mathbf{R}} = \operatorname{lin}_{\mathbf{R}}\{H_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}, \tag{3.11}$$

es decir el subespacio vectorial *real* de $\mathfrak{h}$ obtenido tomando combinaciones lineales *con coeficientes reales* de los vectores H_α correspondientes a raíces no nulas $\alpha \in \Delta$. Nótese que los vectores H_α *no* son linealmente independientes, ya que por ejemplo $H_\alpha = -H_{-\alpha}$.

Teorema 3.5. $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$ *tiene las siguientes propiedades:*

1. $K|_{\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}\times\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}}$ *es real y definida positiva*
2. $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\mathbf{R}} + i\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$ *(suma directa vectorial)*

Demostración. De (3.9) se sigue que

$$\beta(H_\alpha) = -\frac{1}{2}(p_{\beta\alpha} + q_{\beta\alpha})\alpha(H_\alpha)\,, \qquad p_{\beta\alpha},\, q_{\beta\alpha} \in \mathbf{Z}\,,$$

donde $p_{\beta\alpha}$ y $q_{\beta\alpha}$ son los dos enteros que definen el principio y el final de la α-serie por β (cf. la ec.(3.9)). Entonces (3.8) implica que

$$\alpha(H_\alpha) = K(H_\alpha, H_\alpha) = \frac{1}{4}\sum_{\beta\in\Delta}(p_{\beta\alpha} + q_{\beta\alpha})^2\alpha(H_\alpha)^2\,,$$

de donde se deduce inmediatamente que $\alpha(H_\alpha)$ es real y positivo para todo $\alpha \in \Delta$. De (3.9) se sigue entonces que $\beta(H_\alpha) \in \mathbf{R}$ para todo $\alpha, \beta \in \Delta$, y por tanto $\beta(H)$ es real para todo $H \in \mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$. Por (3.8), esto implica que $K(H, H')$ es real para todo $H, H' \in \mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$, y que

$$K(H, H) = \sum_{\beta\in\Delta}\beta(H)^2 \geq 0\,, \qquad \forall H \in \mathfrak{h}_{\mathbf{R}}\,.$$

Además, $K(H, H) = 0 \Leftrightarrow \beta(H) = 0$ para todo $\beta \in \Delta$, lo cual implica que H pertenece al centro de $\mathfrak{g}$ y, en consecuencia, $H = 0$ (cf. el Ejercicio 3.1). Esto prueba la primera parte. Para probar la segunda, nótese en primer lugar que $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}} \cap (i\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}) = 0$ en virtud del carácter definido positivo de K en $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$. Resta sólo probar, por tanto, que $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}} + i\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$ es todo $\mathfrak{h}$, es decir que

$$\mathfrak{h} = \operatorname{lin}_{\mathbf{C}}\{H_\alpha : \alpha \in \Delta\}\,.$$

Si esto último fuera falso, existiría un funcional no nulo $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ tal que $\lambda(H_\alpha) = 0$ para todo $\alpha \in \Delta$. Pero entonces

$$K(H_\lambda, H) = \sum_{\alpha\in\Delta}\alpha(H_\lambda)\alpha(H) = \sum_{\alpha\in\Delta}\lambda(H_\alpha)\alpha(H) = 0\,, \qquad \forall H \in \mathfrak{h}\,.$$

Al ser $K|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ no degenerada, esto implica que $H_\lambda = 0$ y, por tanto, $\lambda = 0$. *Q.E.D.*

El apartado 1) del teorema anterior tiene una consecuencia importantísima para lo que sigue: si $\alpha \in \Delta$ y $H = \sum_{\beta\in\Delta} c_\beta H_\beta \in \mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$, entonces $\Delta \subset \mathfrak{h}_{\mathbf{R}}^*$

$$\alpha(H) = \sum_{\beta\in\Delta} c_\beta\alpha(H_\beta) = \sum_{\beta\in\Delta} c_\beta K(H_\alpha, H_\beta) \in \mathbf{R};$$

por lo tanto, $\alpha|_{\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}}$ es un funcional lineal **real**, es decir

$$\alpha|_{\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}} \in \mathfrak{h}_{\mathbf{R}}^*.$$

En otras palabras, las restricciones de las raíces de $\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$ son elementos de $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}^*$, y α no es más que la complexificación de $\alpha|_{\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}}$.

Otra consecuencia clave del Teorema 3.5 es que, en virtud del apartado 1) de dicho teorema, tanto $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$ como $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}^*$ son **espacios euclidianos reales**, siendo K y (3.6) los respectivos productos escalares.

Definición 3.6. El conjunto $\Delta|_{\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}} \subset \mathfrak{h}_{\mathbf{R}}^*$ de las raíces no nulas de $\mathfrak{g}$ respecto de $\mathfrak{h}$ se denomina el **sistema de raíces** de $\mathfrak{g}$ respecto de $\mathfrak{h}$. *El sistema de raíces*

Convenio: a partir de ahora, escribiremos α en lugar de $\alpha|_{\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}}$, y por tanto *consideraremos las raíces como funcionales lineales reales en* $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$.

3.4 Comportamiento bajo isomorfismos

Recuérdese que si $\varphi : V \to W$ es una aplicación lineal, su *transpuesta* es la aplicación lineal ${}^t\varphi : W^* \to V^*$ definida por

$$ {}^t\varphi(\omega) = \omega \circ \varphi\,, \qquad \forall \omega \in W^*. $$

Es fácil probar que si A es la matriz de φ respecto de sendas bases de V y W, entonces A^t es la matriz de ${}^t\varphi$ respecto de las bases duales correspondientes.

Sean $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ un isomorfismo entre dos álgebras de Lie complejas semisimples $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}'$. Es inmediato comprobar que si $\mathfrak{h}$ es una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ entonces $\mathfrak{h}' \equiv \sigma \cdot \mathfrak{h}$ es una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}'$. Sean $\Delta_{\mathbf{C}}$ y $\Delta'_{\mathbf{C}}$ los correspondientes conjuntos de raíces no nulas (entendidas como funcionales complejos en $\mathfrak{h}^*$ y $\mathfrak{h}'^*$). Como

$$
\begin{aligned}
\alpha \in \Delta_{\mathbf{C}},\ X \in \mathfrak{g}^\alpha &\Longrightarrow [H, X] = \alpha(H)X, \quad \forall H \in \mathfrak{h} \\
&\Longrightarrow [\sigma(H), \sigma(X)] = \alpha(H)\sigma(X), \quad \forall H \in \mathfrak{h} \\
&\Longleftrightarrow [H', \sigma(X)] = (\alpha \circ \sigma^{-1})(H') \cdot \sigma(X), \quad \forall H' \in \mathfrak{h}'
\end{aligned}
$$

se tiene que[1]

$$ \alpha \in \Delta_{\mathbf{C}} \Rightarrow \alpha \circ \sigma^{-1} = {}^t\sigma^{-1}(\alpha) \equiv \alpha' \in \Delta'_{\mathbf{C}}\,, \qquad \sigma \cdot \mathfrak{g}^\alpha \subset (\mathfrak{g}')^{\alpha'}. $$

Al ser σ biyectivo, de lo anterior se deduce que

$$ \Delta'_{\mathbf{C}} = {}^t\sigma^{-1} \cdot \Delta_{\mathbf{C}}\,, \qquad (\mathfrak{g}')^{\alpha'} = \sigma \cdot \mathfrak{g}^\alpha. \tag{3.12} $$

Además, de

$\sigma \cdot \mathfrak{h}_{\mathbf{R}} = \mathfrak{h}'_{\mathbf{R}}$

$$ K'(\sigma(H_\alpha), \sigma(H)) = K(H_\alpha, H) = \alpha(H) \equiv \alpha'\big(\sigma(H)\big) $$

se sigue que

$$ H_{\alpha'} = \sigma \cdot H_\alpha\,, \qquad \forall \alpha \in \mathfrak{h}^*\,. \tag{3.13} $$

Por tanto

$$ \sigma \cdot \mathfrak{h}_{\mathbf{R}} = \mathfrak{h}'_{\mathbf{R}}\,, \tag{3.14} $$

Δ y Δ' son isomorfos

y ${}^t\sigma$ se puede considerar como una aplicación de ${\mathfrak{h}'_{\mathbf{R}}}^*$ en $\mathfrak{h}^*_{\mathbf{R}}$. En particular, los sistemas de raíces (en el sentido del convenio de la sección anterior, es decir entendiendo las raíces como funcionales reales en $\mathfrak{h}^*_{\mathbf{R}}$ y ${\mathfrak{h}'_{\mathbf{R}}}^*$) $\Delta \subset \mathfrak{h}^*_{\mathbf{R}}$ y $\Delta' \subset {\mathfrak{h}'_{\mathbf{R}}}^*$ están relacionados por

$$ \Delta = {}^t\sigma \cdot \Delta'\,, \tag{3.15} $$

donde ${}^t\sigma : {\mathfrak{h}'_{\mathbf{R}}}^* \to \mathfrak{h}^*_{\mathbf{R}}$.

Ejercicio 3.3. Probar que ${}^t\sigma^{-1} : \mathfrak{h}^*_{\mathbf{R}} \to {\mathfrak{h}'_{\mathbf{R}}}^*$ es una *isometría*.

Solución. En efecto, por (3.13) se tiene:

$$
\begin{aligned}
(\alpha', \beta') &= K'(H_{\alpha'}, H_{\beta'}) \\
&= K'(\sigma \cdot H_\alpha, \sigma \cdot H_\beta) \\
&= K(H_\alpha, H_\beta) \\
&= (\alpha, \beta).
\end{aligned}
$$

Definición 3.7. Diremos a partir de ahora que dos sistemas de raíces $\Delta \subset \mathfrak{h}_{\mathbf{R}}^*$ y $\Delta' \subset {\mathfrak{h}'_{\mathbf{R}}}^*$ son **isomorfos** si están relacionados por (3.15), siendo $\sigma : \mathfrak{h}_{\mathbf{R}} \to \mathfrak{h}'_{\mathbf{R}}$ un isomorfismo lineal.

$\mathfrak{g}$ caracterizada por su sistema de raíces

Si $\mathfrak{h}'_1$ y $\mathfrak{h}'_2$ son dos subálgebras de Cartan de $\mathfrak{g}'$ sabemos que existe un automorfismo (interno) φ de $\mathfrak{g}'$ tal que $\mathfrak{h}'_2 = \varphi \cdot \mathfrak{h}'_1$. Por lo anterior, los sistemas de raíces Δ'_1 y Δ'_2 de $\mathfrak{g}$ respecto de $\mathfrak{h}'_1$ y $\mathfrak{h}'_2$ son isomorfos, pues $\Delta'_1 = {}^t\varphi \cdot \Delta'_2$. De esto y del resultado anterior se sigue que los sistemas de raíces de dos álgebras de Lie semisimples (complejas, de dimensión finita) isomorfas respecto de dos subálgebras de Cartan cualesquiera son isomorfos.

Recíprocamente, sean $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}'$ álgebras de Lie complejas semisimples de dimensión finita, con sistemas de raíces Δ y Δ' respecto de las subálgebras de Cartan $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{h}'$, respectivamente. Supongamos que Δ y Δ' son isomorfos, es decir hay un isomorfismo lineal $\varphi : \mathfrak{h}_{\mathbf{R}} \to \mathfrak{h}'_{\mathbf{R}}$ tal que ${}^t\varphi \cdot \Delta' = \Delta$. Entonces se demuestra ([1, Cap. III, Teor. 5.4]) que *φ puede extenderse a un isomorfismo de álgebras de Lie $\tilde{\varphi} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$, y por lo tanto $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}'$ son isomorfas.* En otras palabras, se tiene el importante resultado:

Teorema 3.8. *Dos álgebras de Lie semisimples complejas de dimensión finita son isomorfas si y sólo si sus sistemas de raíces (respecto de sendas subálgebras de Cartan cualesquiera) son isomorfos.*

En otras palabras, *las álgebra de Lie semisimple complejas de dimensión finita están caracterizadas salvo isomorfismos por sus sistemas de raíces.*

3.5 Orden en $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}^*$

Para continuar con nuestra investigación de los sistemas de raíces, necesitamos introducir un orden en $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}^*$.

Orden total

Recordemos que un conjunto M está *totalmente ordenado* si existe una relación $<$ en $M \times M$ que cumple:

1. $\forall a, b \in M$, se verifica exactamente una de las relaciones $a < b$, $b < a$, $a = b$
2. $a < b$ y $b < c \quad \Longrightarrow \quad a < c$

Por convenio, escribiremos $a > b$ como una forma equivalente de denotar $b < a$.

Espacios vectoriales ordenados

Definición 3.9. Un *espacio vectorial ordenado* es un espacio vectorial *real* V tal que V es un conjunto totalmente ordenado y el orden $<$ cumple:

1. $X > Y \quad \Longleftrightarrow \quad X - Y > 0$
2. $X > 0,\ a \in \mathbf{R},\ a > 0 \quad \Longrightarrow \quad aX > 0$

Nótese que en un espacio vectorial ordenado $X > 0 \Longleftrightarrow -X < 0$, y por tanto $aX < 0$ si $a < 0$ y $X > 0$. También es inmediato probar que en un espacio vectorial ordenado

$$X > 0,\ Y > 0 \quad \Longrightarrow \quad X + Y > 0\,.$$

Orden lexicográfico

Todo espacio vectorial real V puede convertirse en un espacio vectorial ordenado

[1]Dado que ${}^t(\sigma^{-1}) = ({}^t\sigma)^{-1}$, la notación ${}^t\sigma^{-1}$ es inambigua.

de muchas formas. Por ejemplo, si se define el *orden lexicográfico* asociado a una base cualquiera $\{X_1, \ldots, X_n\}$ de V mediante

$$X > Y \quad \Longleftrightarrow \quad X - Y = \sum_{i \geq k} a_i \, X_i \quad \text{con } a_k > 0,$$

entonces $(V, >)$ es un espacio vectorial ordenado. En particular, nótese que con este orden $X_i > 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$. A partir de ahora, consideraremos a $\mathfrak{h}^*_{\mathbf{R}}$ como espacio vectorial ordenado, por ejemplo con el orden lexicográfico asociado a una base cualquiera, y denotaremos por

$$\Delta^+ = \{\alpha \in \Delta \mid \alpha > 0\} \tag{3.16}$$

al conjunto de las raíces positivas respecto del orden considerado.

Definición 3.10. Si $\alpha \in \Delta^+$ es una raíz positiva, diremos que α es una raíz **simple** si no existen dos raíces positivas $\beta, \gamma \in \Delta^+$ tales que $\alpha = \beta + \gamma$.

Raíces simples

Por ejemplo, la menor de las raíces positivas es necesariamente simple.

Lema 3.11. *Si $\alpha \neq \beta$ son raíces simples, entonces $\beta - \alpha$ no es una raíz, y $(\alpha, \beta) \leq 0$.*

Demostración. Si $\gamma = \beta - \alpha \neq 0$ fuera una raíz, entonces una de las dos descomposiciones $\beta = \alpha + \gamma$ (si $\gamma > 0$) o $\alpha = \beta - \gamma$ (si $\gamma < 0$) contradiría el carácter simple de α y β. Al no ser $\beta - \alpha$ raíz, $p_{\beta\alpha} = 0$ y por tanto

$$(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2} \, (\alpha, \alpha) \, q_{\beta\alpha} \leq 0 \, .$$

Q.E.D.

Teorema 3.12. *Si $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ es el conjunto de las raíces* simples*, entonces*

$$r = \dim \mathfrak{h}_{\mathbf{R}} (\equiv \operatorname{rank} \mathfrak{g}), \tag{3.17}$$

y toda raíz $\beta \in \Delta$ es de la forma

$$\beta = \sum_{i=1}^{r} n_i \, \alpha_i, \tag{3.18}$$

con $n_i \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ para todo i si $\beta \in \Delta^+$ ó $-n_i \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ para todo i si $-\beta \in \Delta^+$.

Demostración. En primer lugar, probemos que el conjunto $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ (no vacío en virtud de la observación que precede al Lema 3.11) es linealmente independiente sobre $\mathbf{R}$. En efecto, si no lo fuera habría una relación de la forma

Las raíces simples son l. i.

$$\sum_{k=1}^{s} a_k \alpha_{i_k} = \sum_{k=s+1}^{r} a_k \alpha_{i_k} \, ,$$

con $a_i \geq 0$ para todo i y $a_j \neq 0$ para algún $j = 1, \ldots, r$. Si llamamos γ a cualquiera de los dos miembros de esta igualdad entonces

$$(\gamma, \gamma) = \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=s+1}^{r} a_j a_k (\alpha_{i_j}, \alpha_{i_k}) \, .$$

Como el miembro izquierdo es no negativo, mientras que el miembro derecho es no positivo en virtud del lema anterior, se tiene $\gamma = 0$ (recuérdese que $\left(\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}^*, (\cdot,\cdot)\right)$ es un espacio euclidiano, en virtud del primera apartado del Teorema 3.5). Al ser las raíces α_i positivas, esto implica que $a_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, r$.

Sea ahora una raíz positiva β cualquiera. Si β no es simple, entonces $\beta = \beta_1 + \beta_2$, con β_i raíz positiva y $\beta_i < \beta$ para $i = 1, 2$. Continuando este proceso un número finito de veces, es claro que finalmente se alcanza una descomposición del tipo (3.18).

Por último, la independencia lineal de las raíces simples α_i implica que los correspondientes vectores $H_{\alpha_i} \in \mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$ son linealmente independientes, y de (3.18) se sigue que estos r vectores generan $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$, lo que demuestra (3.17). *Q.E.D.*

Nota. En particular, del teorema anterior se deduce que

$$\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}^* = \operatorname{lin}_{\mathbf{R}} \left\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\right\}.$$

3.6 Base de Chevalley

Veamos, en primer lugar, que siempre es posible construir una base de $\mathfrak{g}$ en que las constantes de estructura son números reales. I) $c_{ij}^k \in \mathbf{R}$

Para ello, nótese que del último apartado del Teorema 3.1 se sigue que podemos escoger un E_α en cada $\mathfrak{g}^\alpha$ ($\alpha \in \Delta$) tal que

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha, \qquad \forall \alpha \in \Delta. \tag{3.19}$$

Del apartado 2) del Teorema 3.4 se sigue entonces que

$$[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha\beta} E_{\alpha+\beta}, \qquad \forall \alpha, \beta \in \Delta, \quad \alpha + \beta \neq 0, \tag{3.20}$$

con $N_{\alpha\beta} = 0 \iff \alpha + \beta \notin \Delta$. Trabajando un poco más (cf. [1], p. 176) se demuestra que los E_α se pueden escoger de modo que se cumpla la propiedad adicional

$$N_{-\alpha,-\beta} = -N_{\alpha\beta}, \tag{3.21}$$

y que entonces necesariamente se tiene

$$N_{\alpha\beta}^2 = \frac{1}{2} q_{\beta\alpha}(1 - p_{\beta\alpha})(\alpha, \alpha) \geq 0, \tag{3.22}$$

por lo que las constantes de estructura $N_{\alpha\beta}$ son números reales. Como (cf. la ecuación (3.18))

$$H_\alpha = \sum_{i=1}^{r} n_i H_{\alpha_i}, \qquad n_i \in \mathbf{Z}\ \forall i, \tag{3.23}$$

y

$$[H_{\alpha_i}, E_\beta] = \beta(H_{\alpha_i}) E_\beta$$

con $\beta(H_{\alpha_i}) \in \mathbf{R}$, en la base

$$\left\{H_{\alpha_i} \mid 1 \leq i \leq r\right\} \cup \left\{E_\alpha \mid \alpha \in \Delta\right\}$$

las constantes de estructura de $\mathfrak{g}$ son números reales.

A continuación, obsérvese que $\forall \alpha \in \Delta$ los elementos $\left\{E_\alpha, E_{-\alpha}, H_\alpha\right\}$ generan una II) $c_{ij}^k \in \mathbf{Z}$

subálgebra isomorfa a $\mathfrak{sl}(2)$, ya que

$$[H_\alpha, E_{\pm\alpha}] = \pm(\alpha,\alpha)\, E_{\pm\alpha}, \qquad [E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha.$$

En efecto, definiendo los nuevos elementos

$$\hat{H}_\beta = \frac{2H_\beta}{(\beta,\beta)}, \qquad X_\beta = \sqrt{\frac{2}{(\beta,\beta)}}\, E_\beta \tag{3.24}$$

se tiene

$$[\hat{H}_\alpha, X_{\pm\alpha}] = \pm 2\, X_{\pm\alpha}, \qquad [X_\alpha, X_{-\alpha}] = \hat{H}_\alpha, \tag{3.25}$$

que son las relaciones de conmutación "canónicas" de $\mathfrak{sl}(2)$ en la base

$$H = E_{11} - E_{22}, \qquad X_+ = E_{12}, \qquad X_- = E_{21}\,.$$

Además, si $\beta \neq \pm\alpha$ entonces

$$\begin{aligned}[\hat{H}_\alpha, X_\beta] &= \frac{2}{(\alpha,\alpha)}\,[H_\alpha, X_\beta] = 2\,\frac{\beta(H_\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\,X_\beta = 2\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\,X_\beta \\ &= -(p_{\beta\alpha} + q_{\beta\alpha})\,X_\beta,\end{aligned} \tag{3.26}$$

por lo que las constantes de estructura asociadas a $[\hat{H}_\alpha, X_\beta]$ son números enteros. Un cálculo ligeramente más complicado demuestra que también las constantes de estructura $\hat{N}_{\alpha\beta}$ asociadas a los conmutadores $[X_\alpha, X_\beta]$ con $\alpha+\beta \neq 0$ son enteros; más precisamente, se tiene (cf. [1], p. 195):

$$\left|\hat{N}_{\alpha\beta}\right| = 1 - p_{\beta\alpha}, \qquad \alpha+\beta \in \Delta\,,\ \alpha+\beta \neq 0. \tag{3.27}$$

Si definimos

$$H_i = \hat{H}_{\alpha_i}\,, \quad 1 \leq i \leq r \equiv \operatorname{rank}\mathfrak{g}\,, \tag{3.28}$$

se demuestra (cf. [2]) que

$$\hat{H}_\alpha = \sum_{i=1}^{r} m_i(\alpha)\, H_i, \qquad m_i(\alpha) \in \mathbf{Z}\ \forall i\,; \tag{3.29}$$

nótese que esto no se sigue directamente de (3.18) y (3.23), debido a la normalización de los $\hat{H}_\alpha$. Por consiguiente, en la **base de Chevalley**

$$\left\{H_i \mid 1 \leq i \leq r\right\} \cup \left\{X_\alpha \mid \alpha \in \Delta\right\} \tag{3.30}$$

todas las constantes de estructura de $\mathfrak{g}$ son números enteros. Si llamamos

$$a_{\beta,\alpha} = 2\,\frac{(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} = -(p_{\beta\alpha} + q_{\beta\alpha}) \in \mathbf{Z} \tag{3.31}$$

(nótese que $a_{\pm\alpha,\alpha} = \pm 2$) las relaciones de conmutación en la base de Chevalley se escriben como sigue: *Base de Chevalley*

$$\left[H_i, H_j\right] = 0\,; \tag{3.32}$$

$$\left[H_i, X_\beta\right] = a_{\beta,\alpha_i}\, X_\beta\,; \tag{3.33}$$

$$[X_\alpha, X_{-\alpha}] = \sum_{i=1}^{r} m_i(\alpha) H_i\,; \tag{3.34}$$

$$\left[X_\alpha, X_\beta\right] = N_{\alpha\beta} X_{\alpha+\beta}, \qquad \alpha+\beta \neq 0\,, \tag{3.35}$$

donde

$$|N_{\alpha\beta}| = \begin{cases} 1 - p_{\beta\alpha} & \text{si } \alpha + \beta \in \Delta \\ 0 & \text{si } \alpha + \beta \notin \Delta \end{cases} \tag{3.36}$$

y los enteros $m_i(\alpha)$ se determinan por (3.29). De hecho, [6], también se puede calcular explícitamente el signo[2] de $N_{\alpha\beta}$.

Definición 3.13. La **matriz de Cartan** de $\mathfrak{g}$ respecto del sistema de raíces simples $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\} \subset \mathfrak{h}^*_{\mathbf{R}}$ es la matriz (a_{ij}) de orden rank $\mathfrak{g}$ definida por

Matriz de Cartan

$$a_{ij} = a_{\alpha_i, \alpha_j} \equiv 2\frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)}, \qquad 1 \leq i, j \leq \operatorname{rank} \mathfrak{g}. \tag{3.37}$$

Nótese que, en virtud de (3.31), todos los elementos de la matriz de Cartan son números enteros, con

$$a_{ii} = 2, \qquad 1 \leq i \leq \operatorname{rank} \mathfrak{g}\,, \tag{3.38}$$

y $a_{ij} \leq 0$ para todo $i \neq j$.

Ejercicio 3.4. Probar que las matrices de Cartan son no degeneradas.

Definición 3.14. Un subconjunto $M = \{x_1, \ldots, x_s\}$ de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un **sistema de generadores** si

$$\mathfrak{g} = \operatorname{lin}\left\{ \operatorname{ad} x_{i_1} \cdots \operatorname{ad} x_{i_k} \cdot x_{i_{k+1}} \mid k = 0, 1, \ldots \right\}.$$

A partir de la base de Chevalley de $\mathfrak{g}$ se obtiene un sistema de generadores

Sistema de generadores canónicos

$$\{X_i, \;\; Y_i, \;\; H_i \mid 1 \leq i \leq r \equiv \operatorname{rank} \mathfrak{g}\} \tag{3.39}$$

de $\mathfrak{g}$, siendo

$$X_i = X_{\alpha_i}, \quad Y_i = X_{-\alpha_i}, \quad H_i = \frac{2H_{\alpha_i}}{(\alpha_i, \alpha_i)} \qquad 1 \leq i \leq r. \tag{3.40}$$

(De hecho, podrían omitirse los H_i de (3.39), ya que $[X_i, Y_i] = H_i$.) En efecto, basta probar que los elementos (3.39) generan todos los restantes elementos de la base de Chevalley, es decir los X_α con α raíz no simple. Pero si α es cualquier raíz positiva, probaremos en el capítulo siguiente (Corolario 4.11) que α es de la forma

$$\alpha = \sum_{k=1}^{p} \alpha_{i_k},$$

donde las α_{i_k} son raíces simples, y $\sum_{k=1}^{j} \alpha_{i_k}$ es raíz para $j = 1, 2, \ldots, p$. En tal caso, del apartado 2) del Teorema 3.4 es evidente que X_α es proporcional a

$$\operatorname{ad} X_{i_p} \cdot \operatorname{ad} X_{i_{p-1}} \cdot \cdots \cdot \operatorname{ad} X_{i_2} \cdot X_{i_1}.$$

Un argumento análogo (sustituyendo los X_{i_k} por los Y_{i_k}) vale si α es una raíz negativa, lo cual prueba nuestra afirmación.

Proposición 3.15. *Los* **generadores canónicos** (3.39) *satisfacen las siguientes relaciones de*

Rel. de conmutación de los gen. canónicos

[2] Se trata, obviamente, del signo *relativo*, ya que el cambio $X_\alpha \mapsto -X_\alpha$ no afecta a (3.32)–(3.34), pero evidentemente cambia el signo de todas las constantes de estructura $N_{\alpha\beta}$.

conmutación:

$$[H_i, H_j] = 0, \tag{3.41}$$

$$[X_i, Y_j] = \delta_{ij} H_i, \tag{3.42}$$

$$[H_i, X_j] = a_{ji}\, X_j, \tag{3.43}$$

$$[H_i, Y_j] = -a_{ji}\, Y_j, \tag{3.44}$$

$$(\operatorname{ad} X_i)^{1-a_{ji}} \cdot X_j = 0, \qquad i \neq j; \tag{3.45}$$

$$(\operatorname{ad} Y_i)^{1-a_{ji}} \cdot Y_j = 0, \qquad i \neq j. \tag{3.46}$$

Demostración. En primer lugar, (3.42) es consecuencia de (3.25) (si $i = j$) y de (3.36) (si $i \neq j$), ya que en este último caso $\alpha_i - \alpha_j$ no es raíz al ser α_i y α_j raíces simples (cf. el Lema 3.11). En segundo lugar, (3.43) y (3.44) no son más que casos particulares de (3.33). Por último, (3.45) y (3.46) son consecuencia de las propiedades de las α-series. En efecto, para demostrar (3.45), por ejemplo, considérese la α_i-serie por α_j. Como $\alpha_j - \alpha_i$ no es una raíz, dicha serie será de la forma $\{\alpha_j, \alpha_j + \alpha_i, \dots, \alpha_j + q\,\alpha_i\}$, con $q = -a_{ji}$ en virtud de (3.9). Pero entonces

$$(\operatorname{ad} X_i)^{1-a_{ji}} \cdot X_j = (\operatorname{ad} X_i)^{q+1} \cdot X_j \subset \mathfrak{g}^{\alpha_j + (q+1)\alpha_i} = 0,$$

ya que $\alpha_j + (q+1)\alpha_i$ no es una raíz por definición de q. Por la simetría de Δ bajo cambio de signo, $-\alpha_j - (q+1)\alpha_i = -\alpha_j - (1 - a_{ji})\alpha_i$ tampoco puede ser raíz, lo que demuestra (3.46). *Q.E.D.*

Ejemplo 3.2. En este ejemplo calcularemos una base de Chevalley y la matriz de Cartan del álgebra clásica $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{sl}(n+1, \mathbf{C})$. $\mathfrak{a}_n$

En primer lugar, si $\mathfrak{h}$ es la subálgebra de $\mathfrak{a}_n$ de las matrices diagonales, sabemos que los funcionales

$$e_i - e_j\,, \qquad 1 \le i \neq j \le n+1\,,$$

son las raíces de $\mathfrak{a}_n$ respecto de $\mathfrak{h}$, con subespacios asociados

$$\mathfrak{a}_n^{e_i - e_j} = \mathbf{C} E_{ij}\,.$$

En segundo lugar, recordando que la forma de Killing es simplemente

$$K(X, Y) = 2(n+1)\ \operatorname{tr}(XY)$$

es inmediato comprobar (ejercicio) que

$$H_{e_i - e_j} = (2n+2)^{-1}(E_{ii} - E_{jj}).$$

Es evidente entonces que $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$ *es el conjunto de las matrices* reales *de traza cero.*

Para determinar cuáles son las raíces simples necesitamos introducir un orden en $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}^*$. El orden que utilizaremos es el orden lexicográfico asociado a la base *Raíces simples*

$$\{e_i - e_{i+1} \mid 1 \le i \le n\} \tag{3.47}$$

de $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}^*$, respecto del cuál es fácil ver que las raíces positivas son aquellas de la forma $e_i - e_j$ con $i < j$, pues en tal caso

$$e_i - e_j = \sum_{k=i}^{j-1} (e_k - e_{k+1}),$$

y las raíces simples son precisamente (3.47).

Continuando con la construcción de la base de Chevalley, debemos escoger un E_α en cada subespacio $\mathfrak{a}_n^\alpha$ de forma que se cumpla (3.19), lo cual lleva evidentemente a E_α

$$E_{e_i-e_j} = (2n+2)^{-1/2}E_{ij}, \qquad 1 \le i \ne j \le n+1. \tag{3.48}$$

Ejercicio 3.5. Probar que con la elección anterior de los E_α se cumple la condición (3.21) sobre los $N_{\alpha\beta}$.

Solución. Si $\alpha = e_i - e_j$ y $\beta = e_k - e_l$, entonces $\alpha + \beta \ne 0$ si y sólo si $j \ne k$ o $i \ne l$. Como

$$\left[E_\alpha, E_\beta\right] = (2n+2)^{-1}\left[E_{ij}, E_{kl}\right] = (2n+2)^{-1}(\delta_{jk}E_{il} - \delta_{il}E_{kj}) = (2n+2)^{-1/2}(\delta_{jk} - \delta_{il})E_{\alpha+\beta}$$

(justifíquese el último paso), se tiene

$$N_{\alpha\beta} = (2n+2)^{-1/2}(\delta_{jk} - \delta_{il})\,.$$

El paso de α a $-\alpha$ (resp. β a $-\beta$) equivale a permutar los índices i y j (resp. k y l). Por tanto

$$N_{-\alpha,-\beta} = (2n+2)^{-1/2}(\delta_{il} - \delta_{jk}) = -N_{\alpha\beta}\,.$$

$\square$

Para pasar de los elementos H_α, E_α a los $\hat{H}_\alpha$, X_α se utiliza (3.24), para lo cual hay que calcular (α, α). Si $\alpha = e_i - e_j$ se tiene: H_i, X_α

$$\begin{aligned}(\alpha,\alpha) &= K(H_\alpha, H_\alpha) = (2n+2)\ \mathrm{tr}(H_\alpha^2)\\ &= (2n+2)^{-1}\ \mathrm{tr}\left[\,\left(E_{ii} - E_{jj}\right)^2\,\right]\\ &= \frac{2}{2n+2} = \frac{1}{n+1},\end{aligned} \tag{3.49}$$

de donde

$$\hat{H}_{e_i-e_j} = E_{ii} - E_{jj}, \qquad X_{e_i-e_j} = E_{ij}. \tag{3.50}$$

Luego una base de Chevalley de $\mathfrak{a}_n$ es la formada por los generadores

$$H_i = E_{ii} - E_{i+1,i+1}, \qquad 1 \le i \le n \tag{3.51}$$

junto con

$$X_{e_i-e_j} = E_{ij}, \qquad 1 \le i \ne j \le n+1 \tag{3.52}$$

(lo cual evidentemente era de esperar, en vista de como se construyó la base de Chevalley en el caso general inspirándose en la base "canónica" de $\mathfrak{sl}(2)$). Los generadores canónicos están dados por

$$H_i = E_{ii} - E_{i+1,i+1}, \quad X_i = E_{i,i+1}, \quad Y_i = E_{i+1,i} \qquad 1 \le i \le n. \tag{3.53}$$

Finalmente, nos queda por calcular la matriz de Cartan, lo cual es muy sencillo: *Matriz de Cartan*

$$\begin{aligned}a_{ij} &= 2\frac{(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)} = (2n+2)^2\,\mathrm{tr}(H_{\alpha_i}H_{\alpha_j})\\ &= \mathrm{tr}\Big(\left(E_{ii} - E_{i+1,i+1}\right)\left(E_{jj} - E_{j+1,j+1}\right)\Big)\\ &= 2\delta_{ij} - \delta_{i,j+1} - \delta_{i+1,j}.\end{aligned}$$

Por tanto, la matriz de Cartan de $\mathfrak{a}_n$ es tridiagonal, y está dada por

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{3.54}$$

(Nótese que en este caso la matriz de Cartan es simétrica, lo cual no es cierto en general.)

Matrices de Cartan equivalentes

Estudiemos, a continuación, cuál es el comportamiento de la matriz de Cartan frente a isomorfismos y cambios en el sistema de raíces simples utilizado para definirla. Sea, en primer lugar, $\{\alpha_i : i = 1, \dots, r\}$ un sistema de raíces simples de la subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ de un álgebra semisimple $\mathfrak{g}$. Si efectuamos una permutación $i \mapsto i'$ obtenemos un nuevo sistema de raíces simples $\{\alpha'_i \equiv \alpha_{i'} : i = 1, \dots, r\}$, cuya matriz de Cartan está dada por

$$a'_{ij} = 2\frac{(\alpha_{i'}, \alpha_{j'})}{(\alpha_{j'}, \alpha_{j'})} = a_{i'j'}\,.$$

Diremos que las matrices de Cartan $(a_{ij})_{1\le i,j\le r}$ y $(a'_{kl})_{1\le k,l\le r}$, que difieren únicamente en una permutación de las filas y columnas, son **equivalentes**. (Claramente, dos matrices de Cartan equivalentes son también semejantes bajo la transformación lineal determinada por $\alpha_i \mapsto \alpha_{i'}$, $i = 1, \dots, r$.)

Comportamiento bajo isomorfismos

Sea $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ un isomorfismo, y sea $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$. Entonces $\mathfrak{h}' = \sigma \cdot \mathfrak{h}$ es una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}'$, y hemos visto en la Sección 3.4 que los sistemas de raíces asociados Δ y Δ' están relacionados por

$$\Delta = {}^t\sigma \cdot \Delta',$$

siendo ${}^t\sigma : \mathfrak{h}'^*_{\mathbf{R}} \equiv (\sigma \cdot \mathfrak{h}_{\mathbf{R}})^* \longrightarrow \mathfrak{h}^*_{\mathbf{R}}$ una *isometría.* Si $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ es un sistema de raíces simples de $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ y $\alpha'_i = {}^t\sigma^{-1} \cdot \alpha_i$, entonces $\{\alpha'_1, \dots, \alpha'_r\}$ es un sistema de raíces simples de $\mathfrak{h}'_{\mathbf{R}} \subset \mathfrak{g}'$ (¿por qué?). Por ser ${}^t\sigma$ una isometría, $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}'$ tienen exactamente la *misma* matriz de Cartan respecto de los sistemas de raíces simples $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ y $\{\alpha'_1, \dots, \alpha'_r\}$.

Matrices de Cartan resp. de 2 sist. de raíces distintos

Supongamos ahora que $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ y $\{\beta_1, \dots, \beta_r\}$ son dos sistemas de raíces simples de la misma subálgebra de Cartan $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. Probaremos en el capítulo siguiente (Teorema 4.6.2) que existe un automorfismo lineal $\varphi : \mathfrak{h}_{\mathbf{R}} \to \mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$ tal que ${}^t\varphi \cdot \Delta = \Delta$ y ${}^t\varphi \cdot \beta_i = \alpha_{i'}$, donde $i \mapsto i'$ es una permutación de $\{1, \dots, r\}$ apropiada. El isomorfismo φ es necesariamente una isometría, ya que para todo $H_1, H_2 \in \mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$ se tiene

$$\begin{aligned} K(H_1, H_2) &= \sum_{\alpha\in\Delta} \alpha(H_1)\,\alpha(H_2) = \sum_{\beta\in\Delta} ({}^t\varphi \cdot \beta)(H_1)\,({}^t\varphi \cdot \beta)(H_2) \\ &= \sum_{\beta\in\Delta} \beta(\varphi \cdot H_1)\,\beta(\varphi \cdot H_2) = K(\varphi \cdot H_1, \varphi \cdot H_2)\,. \end{aligned}$$

Además, $H_\beta = \varphi \cdot H_{{}^t\varphi\cdot\beta}$, ya que para todo $H \in \mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$ se verifica

$$K(\varphi \cdot H_{{}^t\varphi\cdot\beta}, \varphi \cdot H) = K(H_{{}^t\varphi\cdot\beta}, H) = ({}^t\varphi \cdot \beta)(H) = \beta(\varphi \cdot H) = K(H_\beta, \varphi \cdot H)\,.$$

Las matrices de Cartan de $\mathfrak{g}$ respecto de los sistemas de raíces simples $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ y $\{\beta_1, \dots, \beta_r\}$ son equivalentes, puesto que

$$\begin{aligned} (\beta_i, \beta_j) \equiv K(H_{\beta_i}, H_{\beta_j}) &= K(\varphi \cdot H_{{}^t\varphi\cdot\beta_i}, \varphi \cdot H_{{}^t\varphi\cdot\beta_j}) \\ &= K(H_{{}^t\varphi\cdot\beta_i}, H_{{}^t\varphi\cdot\beta_j}) = K(H_{\alpha_{i'}}, H_{\alpha_{j'}}) \equiv (\alpha_{i'}, \alpha_{j'})\,. \end{aligned}$$

Dado que dos subálgebras de Cartan de una misma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ están relacionadas por un automorfismo interno, las observaciones anteriores implican que *la clase de equivalencia de la matriz de Cartan de un álgebra de Lie no depende de la subálgebra de Cartan ni del sistema de raíces simples utilizados para calcularla.* Esto y las observaciones precedentes implican inmediatamente el siguiente resultado:

La clase de eq. de la matriz de Cartan es invariante bajo isomorfismos

Proposición 3.16. *Si $\mathfrak{g}$ es isomorfa a $\mathfrak{g}'$, las matrices de Cartan de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}'$ respecto de dos sistemas de raíces simples cualesquiera en $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}'$ son* equivalentes.

Por otra parte, se demuestra (cf. [3, p. 122]) que las relaciones (3.41)–(3.46), o lo que es lo mismo la matriz de Cartan de $\mathfrak{g}$, determinan unívocamente todas las constantes de estructura de $\mathfrak{g}$. En consecuencia, *dos álgebras de Lie semisimples complejas con la misma matriz de Cartan son isomorfas.* Reuniendo los dos resultados anteriores se obtiene el siguiente resultado fundamental:

Teorema 3.17. *Las álgebras de Lie complejas semisimples están caracterizadas (salvo isomorfismos) por la clase de equivalencia de su matriz de Cartan.*

Finalmente, un resultado mucho más profundo (y difícil de demostrar), probado por primera vez por J.P. Serre, afirma lo siguiente: dada una matriz A que cumpla unas ciertas condiciones fundamentales, como por ejemplo (3.38) y la desigualdad $a_{ij} \leq 0$ para todo $i \neq j$, existe un álgebra de Lie semisimple $\mathfrak{g}$, única salvo isomorfismos, cuya matriz de Cartan respecto de un sistema de raíces simples apropiado es A.

Capítulo 4

Clasificación de las álgebras simples

4.1 Sistemas de raíces abstractos

En el capítulo anterior vimos que un álgebra de Lie semisimple compleja (de dimensión finita) $\mathfrak{g}$ está caracterizada por su sistema de raíces, que es un subconjunto finito de vectores en un espacio euclidiano real de dimensión finita ($\mathfrak{h}^*_{\mathbf{R}}$, siendo $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$) con unas ciertas propiedades. Para clasificar todas las álgebras de Lie complejas semisimples, la estrategia será clasificar todos los posibles sistemas de raíces (cf. el Teorema 3.8). Para ello, identificamos primero las propiedades esenciales que posee el sistema de raíces de un álgebra de Lie compleja semisimple, y a continuación estudiamos en abstracto todos los sistemas de vectores de un espacio euclidiano real de dimensión finita que poseen dichas propiedades.

Sist. de raíces abstractos

Sea, por tanto, $E = \mathfrak{h}^*_{\mathbf{R}}$ con el producto escalar definido en el capítulo anterior, y denotemos por Φ (en lugar de Δ, para seguir la notación de [2]) el conjunto de las raíces no nulas de $\mathfrak{g}$ respecto de la subálgebra de Cartan $\mathfrak{h}$. Entonces Φ cumple las siguientes propiedades:

1. Φ es finito, $0 \notin \Phi$ y $\operatorname{lin} \Phi = E$
2. $\alpha \in \Phi \quad \Longrightarrow \quad c\,\alpha \in \Phi$ si y sólo si $c = \pm 1$
3. $\alpha \in \Phi \quad \Longrightarrow \quad \sigma_\alpha \Phi \subset \Phi$
4. $\alpha, \beta \in \Phi \quad \Longrightarrow \quad 2\,\dfrac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbf{Z}$

Reflexiones σ_α

Hemos visto en el capítulo anterior que el sistema de raíces de un álgebra de Lie semisimple tiene las propiedades anteriores, excepto en el caso de la tercera, que comprobaremos a continuación. Por definición, σ_α es la **reflexión respecto del plano** P_α **perpendicular a** α, es decir

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - 2\,\frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\,\alpha \equiv \beta - \langle \beta, \alpha \rangle\,\alpha$$

(ya que la aplicación anterior es lineal, deja invariante todos los vectores del plano P_α y transforma α en $-\alpha$). Si $\beta \in \Phi$ entonces

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta + (p_{\beta\alpha} + q_{\beta\alpha})\,\alpha \in \Phi,$$

en virtud de (3.9), ya que $p_{\beta\alpha} \leq p_{\beta\alpha} + q_{\beta\alpha} \leq q_{\beta\alpha}$.

Definición 4.1. Un **sistema de raíces abstracto** es un subconjunto Φ de un espacio euclidiano real de dimensión finita E que satisface los axiomas 1)–4) anteriores. A los enteros

$$\langle \beta, \alpha \rangle = 2 \, \frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}, \qquad \alpha, \beta \in \Phi, \tag{4.1}$$

se les denomina los **enteros de Cartan** de Φ. Por definición, el **rango** de Φ es igual a $\dim E$.

Utilizando únicamente los axiomas que acabamos de enunciar, es posible clasificar (salvo isomorfismos, cf. más adelante) todos los sistemas de raíces abstractos, lo que automáticamente nos conducirá a la clasificación de todas las álgebras de Lie semisimples complejas.

Notas:

- Es importante no olvidar que $\langle \beta, \alpha \rangle$ es lineal sólo en el primer argumento. En particular, en general $\langle \alpha, \beta \rangle \neq \langle \beta, \alpha \rangle$
- Nótese también que, por definición,

$$\langle \alpha, \alpha \rangle = 2, \qquad \forall \alpha \in \Phi$$

- Como σ_α es invertible ($\sigma_\alpha^2 = I$), el axioma 3) de un sistema de raíces es equivalente a exigir que

$$\sigma_\alpha \Phi = \Phi \tag{4.2}$$

- A veces se llama sistema de raíces a un subconjunto $\Phi \in E$ que cumple los axiomas 1), 3) y 4), y *sistema reducido de raíces* a lo que nosotros llamamos simplemente sistema de raíces.

Definición 4.2. El **grupo de Weyl** de un sistema de raíces Φ es el subgrupo $\mathcal{W}$ de $\mathrm{GL}(E)$ generado por las reflexiones $\{\sigma_\alpha \mid \alpha \in \Phi\}$, es decir *Grupo de Weyl*

$$\mathcal{W} = \{\sigma_\alpha \sigma_\beta \cdots \sigma_\omega \mid \alpha, \beta, \ldots, \omega \in \Phi\}. \tag{4.3}$$

Nótese que $\mathcal{W}$ es necesariamente un **grupo finito**. En efecto, de (4.2) es claro que $w \cdot \Phi = \Phi$ para todo $w \in \mathcal{W}$. Por tanto todo elemento de $\mathcal{W}$ induce una permutación de Φ, y en virtud del primer axioma ($\operatorname{lin} \Phi = E$) dos elementos distintos de $\mathcal{W}$ inducen permutaciones distintas. Luego $\mathcal{W}$ puede identificarse con un subgrupo del grupo de permutaciones de $\operatorname{card} \Phi$ elementos, lo cual implica nuestra afirmación. *$\mathcal{W}$ es un grupo finito*

Definición 4.3. Dos sistemas de raíces (E, Φ) y (E', Φ') son **isomorfos** si existe un isomorfismo lineal (no necesariamente isometría) $\varphi : E \to E'$ tal que $\Phi' = \varphi(\Phi)$, y *Isomorfismos*

$$\langle \beta, \alpha \rangle = \langle \varphi(\beta), \varphi(\alpha) \rangle, \qquad \forall \alpha, \beta \in \Phi. \tag{4.4}$$

Si φ es un isomorfismo de (E, Φ) en (E', Φ'), y $\mathcal{W}$ y $\mathcal{W}'$ son los grupos de Weyl de Φ y Φ', entonces la aplicación $\Phi \approx \Phi' \Rightarrow \mathcal{W} \approx \mathcal{W}'$

$$\sigma \in \mathcal{W} \mapsto \varphi \circ \sigma \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{W}' \tag{4.5}$$

es un isomorfismo de $\mathcal{W}$ en $\mathcal{W}'$, pues es inmediato probar que si $\alpha \in \Phi$ entonces

$$\varphi \circ \sigma_\alpha \circ \varphi^{-1} = \sigma_{\varphi(\alpha)}, \qquad \forall \alpha \in \Phi. \tag{4.6}$$

Nótese, sin embargo, que (como veremos a continuación) $\mathcal{W}$ y $\mathcal{W}'$ pueden ser isomorfos sin que lo sean necesariamente Φ y Φ'.

Ejercicio 4.1. Probar que si $\rho : E \to E'$ es un isomorfismo lineal que preserva los enteros de Cartan (por ejemplo, una isometría ó una dilatación no nula), entonces $(E', \rho(\Phi))$ es un sistema de raíces (obviamente isomorfo a (E, Φ)).

Si (E, Φ) es un sistema de raíces, sea

$\mathcal{W} \subset \operatorname{Aut}\Phi$

$$\operatorname{Aut}(\Phi) = \{\sigma \in \mathrm{GL}(E) \mid \sigma(\Phi) = \Phi\} \tag{4.7}$$

el **grupo de automorfismos** de Φ. Del axioma 3) de los sistemas de raíces y la definición de $\mathcal{W}$ se sigue inmediatamente que $\mathcal{W}$ es un subgrupo de $\operatorname{Aut}(\Phi)$. Además, se puede probar (cf. [2, lema 9.2]) que todo automorfismo de Φ automáticamente satisface (4.4), y es por tanto un *isomorfismo* de (E, Φ) en sí mismo (en el sentido de la Definición 4.3). Además, si $\varphi \in \operatorname{Aut}\Phi$ entonces, por lo anterior, $\varphi \circ \mathcal{W} \circ \varphi^{-1} = \mathcal{W}$, es decir $\mathcal{W}$ es un **subgrupo invariante** de $\operatorname{Aut}\Phi$.

Ejemplo 4.1. Si $\Phi \subset E$ es un sistema de raíces, definimos

Sistema dual

$$\alpha' = \frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)}, \qquad \forall \alpha \in \Phi. \tag{4.8}$$

Veamos que $\Phi' \subset E$ es un sistema de raíces, el llamado **sistema dual** de Φ.

En efecto, los primeros dos axiomas de los sistemas de raíces se cumplen trivialmente, y el cuarto se sigue de la identidad elemental

$$\langle \beta', \alpha' \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle, \qquad \forall \alpha, \beta \in \Phi. \tag{4.9}$$

Por último, para verificar el tercer axioma nótese que

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha'}(\beta') = \beta' - \langle \beta', \alpha' \rangle\, \alpha' &= \frac{2\beta}{(\beta, \beta)} - \frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)} \\
&= \frac{2}{(\beta, \beta)} (\beta - \langle \beta, \alpha \rangle\, \alpha) = \frac{2\sigma_\alpha(\beta)}{(\beta, \beta)} \\
&= \frac{2\sigma_\alpha(\beta)}{(\sigma_\alpha(\beta), \sigma_\alpha(\beta))} = (\sigma_\alpha(\beta))' \in \Phi'.
\end{aligned}$$

En general, Φ y Φ' *no* son isomorfos (nótese que $'$ no es una aplicación lineal, y tampoco tiene por qué conservar los enteros de Cartan, ya que $\langle \beta, \alpha \rangle \neq \langle \alpha, \beta \rangle$ en general). Sin embargo, es fácil ver que los correspondientes grupos de Weyl $\mathcal{W}$ y $\mathcal{W}'$ son isomorfos, pues si $\pi : E \to E$ es la aplicación (4.8) (con $\pi(0) = 0$), entonces π es una biyección ($\pi^2 = I$), y el cálculo anterior demuestra que

$$\sigma_{\alpha'} = \pi \circ \sigma_\alpha \circ \pi^{-1}, \qquad \forall \alpha \in \Phi;$$

como $\mathcal{W}'$ está generado por $\{\sigma_{\alpha'} \mid \alpha \in \Phi\}$, se sigue inmediatamente que $\mathcal{W}' = \pi \circ \mathcal{W} \circ \pi^{-1}$.

4.2 Ángulos entre pares de raíces

Sean α y β dos raíces, y supongamos para fijar ideas que $\|\beta\| \geq \|\alpha\|$. Entonces se tiene

$$\langle \beta, \alpha \rangle = 2 \frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|} \cos\theta_{\alpha\beta}, \tag{4.10}$$

por lo que

$$\langle \beta, \alpha \rangle \, \langle \alpha, \beta \rangle = 4\cos^2\theta_{\alpha\beta} \equiv m \in \mathbf{N} \cup \{0\}, \tag{4.11}$$

siendo evidentemente m un entero entre 0 y 4. El caso $m = 0$ es equivalente a $(\alpha, \beta) = 0$, lo que automáticamente implica $\langle \beta, \alpha \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle = 0 \in \mathbf{Z}$, sin necesidad de imponer ninguna condición adicional sobre α y β. Análogamente, el caso $m = 4$ equivale a $\beta = \pm\alpha$, y de nuevo automáticamente $\langle \beta, \alpha \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle = \pm 2 \in \mathbf{Z}$. Supongamos, por tanto, que

$$\|\beta\| \geq \|\alpha\|, \quad (\alpha, \beta) \neq 0, \quad \beta \neq \pm\alpha; \tag{4.12}$$

entonces se tiene $\cos\theta_{\alpha\beta}$

$$\cos\theta_{\alpha\beta} = \pm\frac{\sqrt{m}}{2}, \qquad m \in \{1, 2, 3\}. \tag{4.13}$$

Además, (4.11) y $m \in \{1, 2, 3\}$ implican claramente que

$$\langle \beta, \alpha \rangle = \epsilon\, m, \qquad \langle \alpha, \beta \rangle = \epsilon, \tag{4.14}$$

con $\epsilon = \pm 1$, ya que estamos suponiendo que $\|\beta\| \geq \|\alpha\|$. En particular, de (4.14) se sigue que

$$\frac{\|\beta\|^2}{\|\alpha\|^2} = \frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \beta \rangle} = m. \tag{4.15}$$

Las relaciones anteriores son muy útiles a la hora de construir sistemas de raíces de rango bajo, por ejemplo menor o igual que dos.

En primer lugar, es claro que (salvo isomorfismos) sólo existe un sistema de rango uno, es decir el sistema trivial $\mathrm{A}_1 = \{\pm 1\}$. Veamos a continuación como construir los sistemas de rango dos. A_1

Por el primer axioma de los sistemas de raíces, $\exists\{\alpha, \beta\} \subset \Phi$ que es base de $E \approx \mathbf{R}^2$. Si necesariamente β es perpendicular a α, entonces el sistema de raíces es claramente isomorfo bajo una rotación apropiada seguida de la "dilatación anisótropa" $(x, y) \mapsto (x/\|\alpha\|, y/\|\beta\|)$ al sistema $\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_1 = \{\pm e_1, \pm e_2\}$, siendo $\{e_1, e_2\}$ la base canónica de $\mathbf{R}^2$. $\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_1$

Supongamos, por tanto, que $\exists\beta \in \Phi$ tal que $\{\alpha, \beta\}$ es base de E, con $(\alpha, \beta) \neq 0$ y (sin pérdida de generalidad) $\|\beta\| \geq \|\alpha\|$. Mediante una rotación y dilatación apropiadas, obtenemos un sistema isomorfo al anterior en el que

$$\alpha = e_1; \tag{4.16}$$

en tal caso, de (4.13) y (4.15) se sigue que

$$\beta = \sqrt{m}\left(\pm\frac{\sqrt{m}}{2}, \pm\sqrt{1 - \frac{m}{4}}\right) = \frac{1}{2}\left(\pm m, \pm\sqrt{m(4-m)}\right), \tag{4.17}$$

donde los dobles signos son independientes. Es fácil ver, sin embargo, que si cualquiera de los cuatro vectores definidos por la fórmula anterior pertenecen a Φ entonces los demás necesariamente pertenecen a Φ; por tanto, podemos elegir los signos arbitrariamente en dicha fórmula. Nosotros tomaremos

$$\beta = \frac{1}{2}\left(-m, \sqrt{m(4-m)}\right), \tag{4.18}$$

de donde

$$\langle \beta, \alpha \rangle = -m, \qquad \langle \alpha, \beta \rangle = -1, \qquad \|\beta\| = \sqrt{m}.$$

(Nótese que las restantes elecciones de signo en (4.17) corresponden a las raíces $-\beta$ y $\pm\sigma_\alpha(\beta)$.)

Hay que considerar a continuación tres subcasos, según los valores de $m \in \{1,2,3\}$; por ejemplo, veamos en detalle el caso $m = 3$. En este caso, G_2

$$\alpha = (1,0), \qquad \beta = \left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right); \tag{4.19}$$

$$\langle\beta,\alpha\rangle = -3, \qquad \langle\alpha,\beta\rangle = -1; \tag{4.20}$$

$$\|\beta\| = \sqrt{3}, \qquad \theta_{\alpha\beta} = 5\pi/6. \tag{4.21}$$

De lo anterior se deduce que los siguientes vectores y sus opuestos pertenecen a Φ:

$$\begin{aligned}
\sigma_\alpha(\beta) &= \beta + 3\alpha,\\
\sigma_\beta(\alpha) &= \alpha + \beta;\\
\sigma_\alpha(\alpha+\beta) &= -\alpha + (\beta + 3\alpha) = \beta + 2\alpha,\\
\sigma_\beta(\beta+3\alpha) &= -\beta + 3(\alpha+\beta) = 2\beta + 3\alpha.
\end{aligned}$$

Un cálculo elemental pero largo demuestra que los vectores así obtenidos ya forman un sistema de raíces, denominado G_2:

$$G_2 = \big\{\pm\alpha, \pm\beta, \pm(\alpha+\beta), \pm(\beta+2\alpha), \pm(\beta+3\alpha), \pm(2\beta+3\alpha)\big\}, \tag{4.22}$$

con α y β dados por (4.19).

Cálculos análogos para $m = 2$ y $m = 1$ conducen respectivamente los sistemas de raíces A_2, B_2

$$B_2 = \big\{\pm\alpha, \pm\beta, \pm(\alpha+\beta), \pm(\beta+2\alpha)\big\};$$

$$\|\beta\| = \sqrt{2}\,\|\alpha\|, \quad \theta_{\alpha\beta} = 3\pi/4 \tag{4.23}$$

y

$$A_2 = \big\{\pm\alpha, \pm\beta, \pm(\alpha+\beta)\big\};$$

$$\|\beta\| = \|\alpha\|, \quad \theta_{\alpha\beta} = 2\pi/3. \tag{4.24}$$

Puede demostrarse (por consideraciones sobre las bases que veremos a continuación) que éstos son los únicos sistemas de raíces de rango dos, salvo isomorfismos (cf. Fig. 4.1).

4.3 Propiedades de las α-series

De lo visto en la sección anterior se deduce que si α y β son raíces no proporcionales ni ortogonales entonces $\langle\beta,\alpha\rangle$ ó $\langle\alpha,\beta\rangle$ es igual a ± 1. En particular, de esto se obtiene fácilmente la siguiente proposición:

Proposición 4.4. *Sean α y β dos raíces no proporcionales. Entonces se cumple:*

$$(\alpha,\beta) > 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha - \beta \in \Phi \tag{4.25}$$

$$(\alpha,\beta) < 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha + \beta \in \Phi. \tag{4.26}$$

Demostración. En primer lugar, nótese que (4.26) se deduce de (4.25) aplicada a α y $-\beta$. Para probar (4.25), nótese que por el comentario que precede a la proposición, y en virtud de la simetría entre α y β en el enunciado, podemos suponer que $\langle\alpha,\beta\rangle = 1$ (ya que $\langle\alpha,\beta\rangle$ tiene el mismo signo que (α,β)). Pero entonces

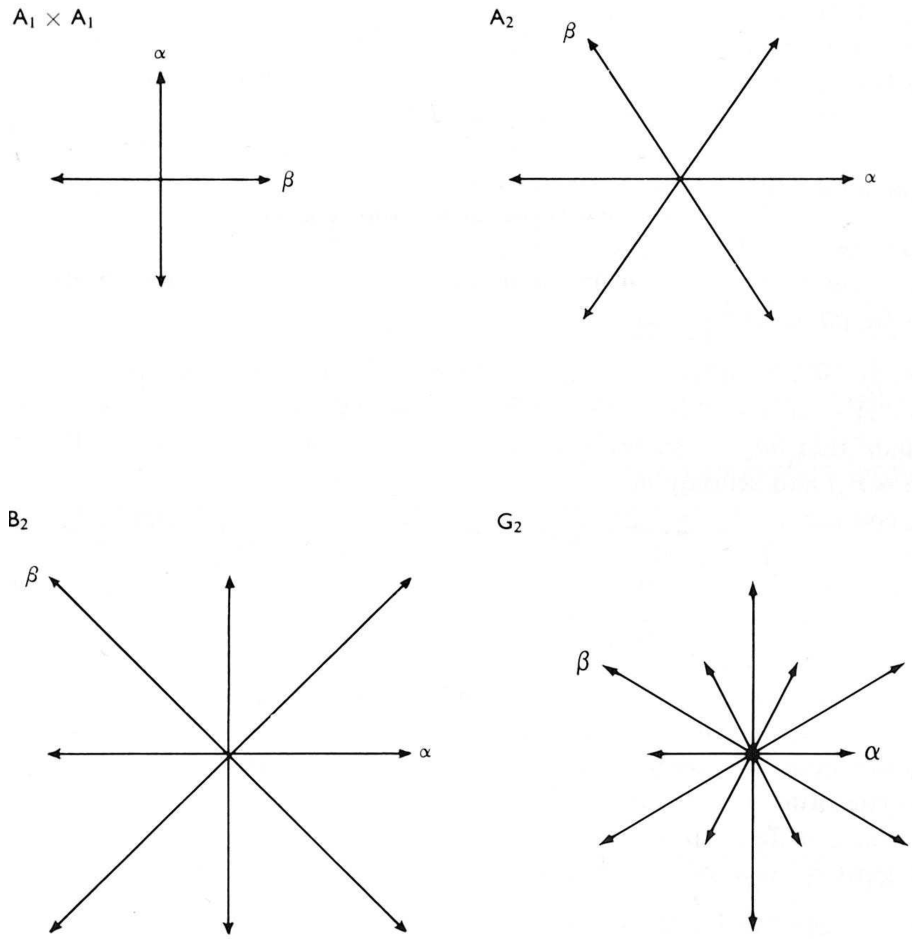


Figura 4.1: Sistemas de raíces de rango 2

$$\sigma_\beta(\alpha) = \alpha - \beta \in \Phi.$$

Q.E.D.

La proposición anterior tiene consecuencias muy importantes en el estudio de las α-series. En primer lugar, como ya vimos en el caso de los sistemas de raíces de las álgebras de Lie semisimples complejas, la α-serie por β *α-series*

$$S_{\beta\alpha} = \{\beta + n\alpha \in \Phi \mid n \in \mathbf{Z}\}; \qquad \alpha, \beta \in \Phi\,, \;\; \beta \neq \pm\alpha\,, \tag{4.27}$$

es una cadena ininterrumpida. En efecto, si ésto no fuera cierto existirían dos enteros $m+1 < s$ tales que $\beta + m\alpha, \beta + s\alpha \in \Phi$, y $\beta + n\alpha \notin \Phi$ para ningún n con $m < n < s$. Pero esto es contradictorio, ya que de ello se deduce que $\beta + (m+1)\alpha$ y $\beta + (s-1)\alpha$ no son raíces, lo cuál implica por la proposición precedente que

$$\langle \beta + m\alpha, \alpha \rangle \geq 0, \qquad \langle \beta + s\alpha, \alpha \rangle \leq 0,$$

es decir

$$m - s \geq 0.$$

Otra consecuencia de la Proposición 4.4 es que, si

$$S_{\beta\alpha} = \{\beta + n\alpha \mid -s \leq n \leq q\}, \qquad s, q \geq 0\,, \tag{4.28}$$

entonces se tiene

$$\langle \beta, \alpha \rangle = s - q, \tag{4.29}$$

es decir la ecuación (3.9). En efecto, si en $S_{\beta\alpha}$ consideramos el orden natural definido por

$$\beta + n_1\alpha < \beta + n_2\alpha \quad \Longleftrightarrow \quad n_1 < n_2$$

entonces

$$\sigma_a(\beta + n\alpha) = \beta - (n + \langle \beta, \alpha \rangle)\alpha,$$

y por tanto la reflexión σ_α es claramente una aplicación estrictamente decreciente de $S_{\beta\alpha}$ en sí mismo (en virtud del axioma 3) de los sistemas de raíces). De esto se sigue que

$$\sigma_a(\beta + q\alpha) = \beta - s\alpha,$$

que es equivalente a (4.29).

Por último, de la fórmula (4.29) se deduce que **la longitud de cualquier α-serie es a lo sumo 4.** En efecto, si $L_{\beta\alpha} \leq 4$

$$L_{\beta\alpha} \equiv \text{card}\, S_{\beta\alpha} = q + s + 1$$

es la longitud de $S_{\beta\alpha}$, aplicando la ecuación (4.29) a $S_{\beta - s\alpha, \alpha} \equiv S_{\beta\alpha}$ se obtiene

$$-\langle \beta - s\alpha, \alpha \rangle = q + s = L_{\beta\alpha} - 1\,,$$

y $|\langle \gamma, \alpha \rangle|$ es a lo sumo 3, por la discusión de la sección anterior.

4.4 Bases

Por definición (cf. el Teorema 3.12), un subconjunto $B \subset \Phi$ es una **base** de Φ si cumple las siguientes dos condiciones: *Bases*

1. B base de E
2. $\forall \beta \in \Phi$, se tiene

$$\beta = \sum_{\alpha \in B} k_\alpha\, \alpha, \qquad \text{con} \quad k_\alpha \in \mathbf{N} \cup \{0\}\ \forall \alpha \quad \text{ó} \quad -k_\alpha \in \mathbf{N} \cup \{0\}\ \forall \alpha\,. \tag{4.30}$$

La raíz (4.30) es **positiva** si $k_\alpha \geq 0$ para todo $\alpha \in B$, y negativa en caso contrario. Denotaremos por Φ^+ (resp. Φ^-) el subconjunto de todas las raíces positivas (resp.ñegativas). Por último, diremos que $\alpha \in \Phi$ es una raíz **simple** si y sólo si $\alpha \in B$; nótese que ésta definición es claramente equivalente a la Definición 3.10. $\Phi^\pm$

Si examinamos los sistemas de raíces de rango 2 vistos en la Sección 4.2, es fácil cerciorarse de que las raíces $\{\alpha, \beta\}$ con las cuales generábamos dichos sistemas forman en todos los casos una base de Φ. Además, en todos los sistemas de rango 2 se cumple obviamente la condición $(\alpha, \beta) \leq 0$. Esto es claramente general:

Proposición 4.5. *Si B es base de Φ, entonces se cumple* $\alpha, \beta \in B \Rightarrow (\alpha, \beta) \leq 0$

$$(\alpha, \beta) \leq 0, \qquad \forall \alpha, \beta \in B. \tag{4.31}$$

Demostración. Consecuencia inmediata de la Proposición 4.4 y del apartado 2 de la definición de base. *Q.E.D.*

Teorema 4.6 (propiedades de las bases)**.**

1. *Todo sistema de raíces tiene una base*
2. *El grupo de Weyl $\mathcal{W}$ actúa* transitivamente *sobre el conjunto de las bases de Φ:*

$$B,\, B' \text{ bases de } \Phi \quad \Longrightarrow \quad \exists \sigma \in \mathcal{W} \text{ tal que } B' = \sigma(B)$$

3. *La acción de $\mathcal{W}$ sobre el conjunto de las bases de Φ es* simplemente transitiva*:*

$$B \text{ base de } \Phi,\ \sigma \in \mathcal{W},\ \sigma(B) = B \quad \Longrightarrow \quad \sigma = I$$

4. *Si B es una base de Φ, para toda raíz $\alpha \in \Phi$ existe $\sigma \in \mathcal{W}$ tal que $\sigma(\alpha) \in B$*
5. *$\mathcal{W}$ está generado por las reflexiones σ_α correspondientes a raíces* **simples** *$\alpha \in B$:*

$$\mathcal{W} = \{\sigma_\alpha \sigma_\beta \cdots \sigma_\omega \mid \alpha, \beta, \dots, \omega \in B\}$$

Para probar las propiedades anteriores, es fundamental el concepto de **cámaras de Weyl** de un sistema de raíces, que son las componentes conexas del conjunto $E - \cup_{\alpha\in\Phi} P_\alpha$ (siendo, como antes, P_α el hiperplano ortogonal a α). Si escogemos arbitrariamente una cámara de Weyl $\mathcal{C}$, y llamamos $\Phi^+(\mathcal{C})$ al conjunto de raíces α tales que $(\alpha, x) > 0$ para todo $x \in \mathcal{C}$, entonces el conjunto de las raíces *indescomponibles* en $\Phi^+(\mathcal{C})$

Cámaras de Weyl

$\Phi^+(\mathcal{C})$, $B(\mathcal{C})$

$$B(\mathcal{C}) = \{\alpha \in \Phi^+(\mathcal{C}) \mid \nexists \alpha_1, \alpha_2 \in \Phi^+(\mathcal{C}) \text{ tal que } \alpha = \alpha_1 + \alpha_2\}$$

es una base de Φ. Además, es fácil ver que cualquier base B se obtiene de la forma anterior, tomando

$$\mathcal{C} = \{x \in E \mid (x, \alpha) > 0, \forall \alpha \in B\}.$$

4.5 Sistemas irreducibles

Un sistema de raíces Φ se dice **irreducible** si Φ no es de la forma $\Phi_1 \cup \Phi_2$, con $\Phi_1, \Phi_2 \neq \emptyset$ y $\Phi_1 \perp \Phi_2$. (Nótese que si $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ es reducible entonces $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \emptyset$.) Por ejemplo, el único sistema de rango dos reducible es obviamente $\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_1$.

Irreducibilidad

Si B es una base de un sistema de raíces Φ diremos, análogamente, que B es irreducible si no es de la forma $B_1 \cup B_2$, con $B_1, B_2 \neq \emptyset$ y $B_1 \perp B_2$.

Proposición 4.7. *Si B es una base de Φ, entonces Φ es irreducible si y sólo si B es irreducible.*

Φ irred. $\Leftrightarrow$ B irred.

Demostración. Si $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ es reducible, es claro que B también lo es (basta tomar $B_i = B \cap \Phi_i$, $i = 1, 2$). Por otra parte, si $B = B_1 \cup B_2$ es reducible, definimos

$$\Phi_i = \mathcal{W}(B_i), \qquad i = 1, 2.$$

Es claro entonces que Φ_1 y Φ_2 son no vacíos, y $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ en virtud del apartado 4 del Teorema anterior. Para ver, por último, que $\Phi_1 \perp \Phi_2$, basta observar que

$$\Phi_i \subset \operatorname{lin} B_i \qquad i = 1, 2\,.$$

En efecto, para probar que (p. ej.) $\Phi_1 \subset \operatorname{lin} B_1$ demostraremos la afirmación equivalente $\operatorname{lin}\Phi_1 \subset \operatorname{lin} B_1$. En virtud del apartado 5 del Teorema 4.6, basta comprobar que $\sigma_\alpha(x) \in \operatorname{lin} B_1$ para todo $\alpha \in B$ y $x \in \operatorname{lin} B_1$. Pero esto es evidente, ya que si $x \in \operatorname{lin} B_1$ y $\alpha \in B_2$ entonces $\sigma_\alpha(x) = x$, mientras que si $\alpha \in B_1$ se tiene $\sigma_\alpha(x) = x - \langle x, \alpha\rangle\, \alpha \in \operatorname{lin} B_1$. *Q.E.D.*

Si Φ_1 y Φ_2 son sistemas de raíces en E_1 y E_2, respectivamente, siendo $E_1 \perp E_2$ dos subespacios ortogonales de un espacio euclidiano, entonces $\Phi_1 \cup \Phi_2$ es claramente un sistema de raíces (reducible) en $E \equiv E_1 \oplus E_2$, que se suele denotar por $\Phi_1 \times \Phi_2$. Recíprocamente, si $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ es un sistema de raíces reducible, entonces es inmediato comprobar que cada Φ_i, $1 \le i \le 2$, es un sistema de raíces en $E_i \equiv \operatorname{lin}\Phi_i$, con $E_1 \perp E_2$ y $E_1 \oplus E_2 = E$, y por tanto $\Phi = \Phi_1 \times \Phi_2$. Por inducción, es claro que todo sistema de raíces es de la forma $\Phi_1 \times \Phi_2$

$$\Phi = \Phi_1 \times \Phi_2 \times \cdots \times \Phi_m,$$

siendo Φ_i un sistema irreducible de raíces en $E_i \equiv \operatorname{lin}\Phi_i$, con $\Phi_i \perp \Phi_j$ y $E_i \perp E_j$ para todo $i \neq j$ y $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_m$. En consecuencia, podemos limitarnos en lo que sigue sin pérdida de generalidad a estudiar los sistemas de raíces irreducibles. El resultado anterior recuerda la descomposición análoga de las álgebras de Lie semisimples en suma directa de sus ideales simples. Este parecido no es en modo alguno accidental, en virtud de la proposición siguiente:

Proposición 4.8. *Un álgebra de Lie semisimple compleja $\mathfrak{g}$ de dimensión finita es* simple *si y sólo si su sistema de raíces Φ (respecto de una subálgebra de Cartan cualquiera $\mathfrak{h}$) es* irreducible. $\mathfrak{g}$ *simple* $\Leftrightarrow$ Φ *irred.*

Demostración.

$\Longrightarrow$) Veamos, equivalentemente, que si $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ es reducible entonces $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ es la suma de dos ideales propios. En efecto, si definimos $\mathfrak{h}_i = \sum_{\alpha\in\Phi_i} \mathbf{C} H_\alpha$, basta tomar Φ *red.* $\Rightarrow \mathfrak{g}$ *no simple*

$$\mathfrak{g}_i = \mathfrak{h}_i + \sum_{\alpha\in\Phi_i} \mathfrak{g}^\alpha, \qquad i = 1, 2.$$

(Los detalles de esta verificación, que son totalmente elementales, se los proponemos al lector como ejercicio.)

$\Longleftarrow$) Basta probar que si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ es la suma de dos ideales propios entonces Φ es reducible. Para verlo, nótese en primer lugar que Φ es reducible si y sólo si cualquier otro sistema de raíces isomorfo a Φ lo es. (En efecto, $(\alpha, \beta) = 0$ si y sólo si $\sigma_\alpha(\beta) = \beta$, y si $\gamma \mapsto \gamma'$ es un isomorfismo de sistemas de raíces se cumple $[\sigma_\alpha(\beta)]' = \sigma_{\alpha'}(\beta')$.) Como todos los sistemas de raíces de un álgebra de Lie compleja semisimple son isomorfos, podemos suponer sin pérdida de generalidad que Φ es el sistema de raíces de $\mathfrak{g}$ asociado a la subálgebra de Cartan $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$ de $\mathfrak{g}$, siendo $\mathfrak{h}_i$ una subálgebra de Cartan cualquiera de $\mathfrak{g}_i$, $1 \le i \le 2$. (El que $\mathfrak{h}$ es subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ es inmediato de verificar.) Si Φ_1 es el sistema de raíces de $\mathfrak{g}_1$ respecto de $\mathfrak{h}_1$, entonces identificaremos canónicamente Φ_1 con un subconjunto del subespacio de los funcionales en $\mathfrak{h}_{1,\mathbf{R}} \oplus \mathfrak{h}_{2,\mathbf{R}}$ que se anulan en $\mathfrak{h}_{2,\mathbf{R}}$, y haremos lo propio con Φ_2. De esta forma, podemos considerar a Φ_1 y Φ_2 como subconjuntos de $(\mathfrak{h}_{1,\mathbf{R}} \oplus \mathfrak{h}_{2,\mathbf{R}})^*$. $\mathfrak{g}$ *no simple* $\Rightarrow \Phi$ *red.*

Probemos a continuación que $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$. Sea α una raíz de $\mathfrak{g}$ respecto de $\mathfrak{h} \equiv \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$, y sea $X_\alpha = X_\alpha^1 + X_\alpha^2 \in \mathfrak{g}^\alpha - \{0\}$, con $X_\alpha^i \in \mathfrak{g}_i$. Entonces para todo $H_i \in \mathfrak{h}_i$ se tiene:

$$\big[H_i, X_\alpha\big] = \alpha(H_i) X_\alpha \in \mathfrak{g}_i \quad \Longrightarrow \quad \alpha(H_1) X_\alpha^2 = \alpha(H_2) X_\alpha^1 = 0\,.$$

Por tanto una de las dos proyecciones X_α^i de X_α se anula. Si, por ejemplo, $X_\alpha^2 = 0$ entonces $X_\alpha^1 \neq 0$, y por tanto $\alpha(H_2) = 0$ para todo $H_2 \in \mathfrak{h}_2$, y $[H_1, X_\alpha^1] = \alpha(H_1)X_\alpha^1$, lo cual implica que $\alpha \in \Phi_1$. Análogamente, si $X_\alpha^1 = 0$ entonces $\alpha \in \Phi_2$.

Evidentemente Φ_1 y Φ_2 son ambos no vacíos, y también es inmediato probar que son ortogonales. En efecto, al ser $\mathfrak{g}_1$ y $\mathfrak{g}_2$ ideales las subálgebras de Cartan $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{g}_1$ y $\mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{g}_2$ son ortogonales. De esto se sigue que si $\alpha \in \Phi_i$ entonces $H_\alpha \in \mathfrak{h}_i$, ya que si $H_j \in \mathfrak{h}_j$ (con $j \neq i$) se tiene

$$K(H_\alpha, H_j) = \alpha(H_j) = 0 \quad \Longrightarrow \quad H_\alpha \perp \mathfrak{h}_j\,.$$

Pero entonces[1]

$$\alpha_i \in \Phi_i, \quad \alpha_j \in \Phi_j \quad \Longrightarrow \quad (\alpha_i, \alpha_j) = K\big(H_{\alpha_i}, H_{\alpha_j}\big) = 0\,,$$

lo cual demuestra que $\Phi_1 \perp \Phi_2$. *Q.E.D.*

Los sistemas de raíces irreducibles tienen las siguientes propiedades:

Prop. de los sist. irreducibles

Teorema 4.9. *Si Φ es un sistema* irreducible *de raíces, entonces se cumple:*

1. *$\mathcal{W}$ actúa* irreduciblemente *en E (es decir, E no tiene subespacios propios invariantes bajo $\mathcal{W}$)*

2. *Si $\alpha \in \Phi$, la órbita de α bajo $\mathcal{W}$ genera E, es decir* $\operatorname{lin} \mathcal{W}(\alpha) = E$.

3. *En Φ hay raíces de a lo sumo* **2** *longitudes distintas*

4. *Dos raíces de igual longitud están conjugadas bajo $\mathcal{W}$*

Demostración.

1. Si $\emptyset \neq E_1 \subsetneq E$ es un subespacio invariante bajo $\mathcal{W}$, entonces $E_2 \equiv E_1^\perp$ es también invariante, ya que las reflexiones son transformaciones *simétricas*: $(\sigma_\alpha x, y) = (\sigma_a^2 x, \sigma_\alpha y) = (x, \sigma_\alpha y)$. Si $\alpha \in \Phi$, como por hipótesis E_1 es invariante bajo σ_α entonces, o bien $\alpha \in E_1$, o bien $\alpha \perp E_1$, es decir $\alpha \in E_2$. Esto demuestra que $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$, siendo $\Phi_i = \Phi \cap E_i$. Claramente, $\Phi_1 \perp \Phi_2$, y tanto Φ_1 como Φ_2 son no vacíos, ya que en caso contrario $\operatorname{lin} \Phi$ no sería todo E.

2. Inmediato, ya que si $\alpha \in \Phi$ es evidente que $\operatorname{lin} \mathcal{W}(\alpha)$ es un subespacio invariante bajo $\mathcal{W}$.

3. Sea $\alpha \in \Phi$ una raíz. Por el apartado anterior, si β es otra raíz entonces β no puede ser ortogonal a $\mathcal{W}(\alpha)$, por lo que debe existir $\sigma \in \mathcal{W}$ tal que $\big(\beta, \sigma(\alpha)\big) \neq 0$. En virtud de la Sección 4.2, se tiene entonces que

$$\frac{\|\beta\|^2}{\|\sigma(\alpha)\|^2} = \frac{\|\beta\|^2}{\|\alpha\|^2} \in \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\right\}.$$

Si hubiera tres raíces $\alpha_i, 1 \leq i \leq 3$, de longitudes distintas $\|\alpha_1\| < \|\alpha_2\| < \|\alpha_3\|$ entonces

$$1 < \frac{\|\alpha_2\|^2}{\|\alpha_1\|^2} < \frac{\|\alpha_3\|^2}{\|\alpha_1\|^2},$$

[1] De lo anterior se deduce también fácilmente que $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}} = \mathfrak{h}_{1,\mathbf{R}} \oplus \mathfrak{h}_{2,\mathbf{R}}$.

de donde

$$\frac{\|\alpha_2\|^2}{\|\alpha_1\|^2} = 2, \qquad \frac{\|\alpha_3\|^2}{\|\alpha_1\|^2} = 3$$

y llegaríamos a una contradicción:

$$\frac{\|\alpha_3\|^2}{\|\alpha_2\|^2} = \frac{3}{2}.$$

4. Sean $\alpha, \beta \in \Phi$ dos raíces de igual longitud. Como antes, existe $\sigma \in \mathcal{W}$ tal que $(\beta, \sigma(\alpha)) \neq 0$. Evidentemente, basta probar que β está conjugada bajo $\mathcal{W}$ con $\alpha' \equiv \sigma(\alpha)$, siendo $(\beta, \alpha') \neq 0$. Llamando otra vez α a α', si $\beta = \pm\alpha$, entonces $\beta = I \cdot \alpha$ ó $\beta = \sigma_\alpha(\alpha)$, y ya hemos terminado. Supongamos, por tanto, que $\beta \neq \pm\alpha$. Por los resultados de la Sección 4.2, se tiene entonces que

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle = \pm 1.$$

Si $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle = 1$, entonces

$$\sigma_\alpha \sigma_\beta \sigma_\alpha(\beta) = \sigma_\alpha \sigma_\beta(\beta - \alpha) = \sigma_\alpha(-\beta - \alpha + \beta) = \sigma_\alpha(-\alpha) = \alpha,$$

lo que prueba que α y β están efectivamente conjugados bajo $\mathcal{W}$. El caso $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle = -1$ se reduce al anterior notando que

$$\langle \sigma_\alpha(\alpha), \beta \rangle = -\langle \alpha, \beta \rangle = 1.$$

Q.E.D.

Raíces cortas y largas

Si Φ es un sistema (irreducible) de raíces con dos longitudes distintas, las raíces de Φ se suelen dividir en dos tipos—**cortas** y **largas**—según su longitud. (Si todas las raíces de Φ tienen la misma longitud, todas ellas se suelen considerar por convenio *largas*.)

Ejercicio 4.2. Probar que si Φ es un sistema irreducible tanto las raíces cortas como las largas forman un sistema de raíces. (Por ejemplo, si $\Phi = \mathrm{G}_2$ y $\{\alpha, \beta\}$ es la base de G_2 construida en la Sección 4.2, entonces tanto las raíces cortas (de longitud $\|\alpha\|$) como las largas (de longitud $\|\beta\| = \sqrt{3}\,\|\alpha\|$) forman un sistema de raíces de tipo A_2.)

4.6 Matriz de Cartan

Matriz de Cartan

Dado un sistema de raíces Φ y una base $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ de Φ, la **matriz de Cartan** de Φ respecto de B es la matriz de orden $r = \operatorname{rank} \Phi$ cuyos elementos de matriz son los enteros

$$a_{ij} = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle, \qquad 1 \leq i, j \leq r, \tag{4.32}$$

cf. (3.37). La *clase de equivalencia* de la matriz de Cartan (en el sentido de la definición de la Sección 3.6) está bien definida, ya que si $B' = \{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_r\}$ es otra base de Φ entonces (Teorema 4.6.2) existe $\sigma \in \mathcal{W}$ tal que $\alpha'_i = \sigma(\alpha_{\pi(i)})$ (siendo π una permutación de $\{1, \ldots, r\}$), y por tanto

$$\left\langle \alpha'_i, \alpha'_j \right\rangle = \left\langle \sigma(\alpha_{\pi(i)}), \sigma(\alpha_{\pi(j)}) \right\rangle = \left\langle a_{\pi(i)}, a_{\pi(j)} \right\rangle, \qquad 1 \leq i, j \leq r.$$

También es fácil ver que la matriz de Cartan es **no singular**, pues en caso contrario se tendría

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = 0, \qquad 1 \leq j \leq r$$

para algún $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbf{R}^r$, lo cual implicaría que el vector $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \alpha_i$ es ortogonal a B, y por tanto

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \alpha_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0,$$

por la independencia lineal de B.

La matriz de Cartan det. el sist. de raíces salvo isom.

Si $\varphi : E \to E'$ es un isomorfismo entre los sistema de raíces (Φ, E) y (Φ', E'), es inmediato ver que la imagen bajo φ de una base B de Φ es una base $\varphi(B)$ de Φ', y que las matrices de Cartan de Φ y Φ' respecto de las bases B y $\varphi(B)$ son iguales. Recíprocamente, se puede demostrar (cf. [2, p. 55]) que **la matriz de Cartan caracteriza completamente el sistema de raíces** salvo isomorfismos: si $\Phi \subset E$ y $\Phi' \subset E'$ son sistemas de raíces con bases $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ y $\{\alpha'_1, \dots, \alpha'_r\}$ tales que $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \langle \alpha'_i, \alpha'_j \rangle$, entonces el isomorfismo lineal definido por $\alpha_i \mapsto \alpha'_i$, $1 \leq i \leq r$, es un isomorfismo de sistemas de raíces.

Altura

De hecho, hay una demostración constructiva de este resultado que consiste en probar que la expresión de cualquier raíz como combinación lineal de las raíces de una base está determinada de forma algorítmica por la matriz de Cartan correspondiente. Para ver esto, dada una raíz $\alpha \in \Phi$ definimos su **altura** $\mathrm{ht}(\alpha)$ respecto de una base dada $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ mediante

$$\mathrm{ht}(\alpha) = \sum_{i=1}^{r} k_i, \qquad \text{si} \quad \alpha = \sum_{i=1}^{r} k_i \alpha_i. \tag{4.33}$$

Nótese que, por las propiedades de las bases, $\mathrm{ht}(\alpha)$ es un entero no nulo, $\mathrm{ht}(\alpha) > 0$ si y sólo si α es una raíz positiva y $\mathrm{ht}(\alpha) = 1$ si y sólo si α es una raíz simple (es decir, $\alpha \in B$).

Lema 4.10. *Sea Φ un sistema de raíces, y sea $\alpha \in \Phi^+$ una raíz positiva con $\mathrm{ht}(\alpha) > 1$. Entonces existe una raíz positiva α' con $\mathrm{ht}(\alpha') = \mathrm{ht}(\alpha) - 1$ y una raíz simple α_i tales que $\alpha = \alpha' + \alpha_i$.*

Demostración. Evidentemente, basta probar que existe una raíz simple α_i tal que $\alpha - \alpha_i \in \Phi$. Pero si $\alpha - \alpha_i \notin \Phi$ para todo $i = 1, \dots, r \equiv \operatorname{rank} \Phi$ entonces $(\alpha, \alpha_i) \leq 0$ para todo i en virtud de la Proposición 4.4 (ya que $\alpha \neq \pm\alpha_i$ para todo i por la condición $\mathrm{ht}(\alpha) > 1$). Pero entonces, si $\alpha = \sum_{i=1}^{r} k_i \alpha_i$, como $k_i \geq 0$ para todo i se tendría

$$(\alpha, \alpha) = \sum_{i=1}^{r} k_i (\alpha, \alpha_i) \leq 0,$$

y por tanto $\alpha = 0$. *Q.E.D.*

Corolario 4.11. *Si $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ es una base de Φ entonces toda raíz positiva $\alpha \in \Phi^+$ admite la descomposición*

$$\alpha = \sum_{k=1}^{p} \alpha_{i_k},$$

donde $\sum_{k=1}^{j} \alpha_{i_k}$ es raíz para $j = 1, 2, \dots, p$.

Evidentemente, basta con indicar como construir las raíces positivas $\alpha \in \Phi^+$ a partir de la matriz de Cartan. Esto se puede hacer por inducción sobre $\mathrm{ht}(\alpha)$, ya que las raíces de altura 1 son conocidas (son las raíces simples). Supongamos, pues, que conocemos todas las raíces de altura $h \geq 1$, y veamos entonces como encontrar las de altura $h+1$. Como $h+1 \geq 2$, por el Lema anterior basta con determinar todos los valores de $i = 1, 2, \ldots, r$ tales que $\alpha + \alpha_i \in \Phi^+$, siendo α una raíz cualquiera de altura h. Si S_{α,α_i} es la α_i-serie por α, por las propiedades de las α-series S_{α,α_i} es de la forma (4.28), con $\alpha - s\,\alpha_i \in \Phi^+$ en virtud de la ecuación (4.30). Al ser $0 < \mathrm{ht}(\alpha - s\,\alpha_i) = h - s \leq h$ conocemos s, pues todas las raíces de altura $\leq h$ se suponen conocidas por hipótesis de inducción. Por otra parte, una vez hallado s se puede calcular q mediante la matriz de Cartan, pues si $\alpha = \sum_{j=1}^{r} k_j \alpha_j$ entonces por (4.29) se tiene

Construcción de Φ^+

$$s - q = \langle \alpha, \alpha_i \rangle = \sum_{i=1}^{r} k_j \left\langle \alpha_j, \alpha_i \right\rangle. \tag{4.34}$$

Como $\alpha + \alpha_i \in \Phi$ si y sólo si $q > 0$, podemos calcular todas las raíces de altura $h+1$ a partir de las de altura h utilizando (4.34), lo que concluye el proceso de inducción.

Ejemplo 4.2. Como ilustración, vamos a calcular a continuación el sistema de raíces de G_2 a partir de su matriz de Cartan

Constr. de G_2

$$(\left\langle \alpha_i, \alpha_j \right\rangle)_{1 \leq i,j \leq 2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \tag{4.35}$$

donde $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ es la base $\{\alpha, \beta\}$ de la Sección 4.2.

Altura 1: Las raíces de altura 1 son, evidentemente, α_1 y α_2.

Altura 2: Para la α_2-serie por α_1, utilizando (4.34) y la matriz de Cartan (4.35) se obtiene

$$q = -\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = 1 \quad \Longrightarrow \quad S_{\alpha_1,\alpha_2} = \{\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2\}. \tag{4.36}$$

Análogamente, para la α_1-serie por α_2 se obtiene

$$q = -\langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle = 3 \quad \Longrightarrow \quad S_{\alpha_2,\alpha_1} = \{\alpha_2, \alpha_2 + \alpha_1, \alpha_2 + 2\alpha_1, \alpha_2 + 3\alpha_1\}. \tag{4.37}$$

Por tanto, la única raíz de altura 2 es

$$\alpha_1 + \alpha_2.$$

Altura 3: Para calcular la α_1-serie por $\alpha_1 + \alpha_2$, basta observar que obviamente $S_{\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1} = S_{\alpha_2,\alpha_1}$. Análogamente, $S_{\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2} = S_{\alpha_1,\alpha_2}$. Por tanto, la única raíz de altura 3 es

$$\alpha_2 + 2\alpha_1.$$

Altura 4: Como antes, la α_1-serie por $\alpha_2 + 2\alpha_1$ es simplemente $S_{\alpha_2+2\alpha_1,\alpha_1} = S_{\alpha_2,\alpha_1}$, lo cual proporciona la raíz $\alpha_2 + 3\alpha_1$ de altura 4. Por otra parte, como $(\alpha_2 + 2\alpha_1) - \alpha_2 = 2\,\alpha_1$ y $(\alpha_2 + 2\alpha_1) + \alpha_2 = 2(\alpha_1 + \alpha_2)$ no pueden ser raíces (por serlo α_1 y $\alpha_1 + \alpha_2$), la serie

$$S_{\alpha_2+2\alpha_1,\alpha_2} = \{\alpha_2 + 2\alpha_1\} \tag{4.38}$$

no contribuye ninguna raíz de altura 4. Por tanto, la única raíz de altura 4 es

$$\alpha_2 + 3\alpha_1.$$

Altura 5: Como antes, se tiene $S_{\alpha_2+3\alpha_1,\alpha_1} = S_{\alpha_2,\alpha_1}$, que no proporciona ninguna raíz de altura 5. Por otra parte, $S_{\alpha_2+3\alpha_1,\alpha_2} = \{\alpha_2 + 3\alpha_1, \ldots, \alpha_2 + (3+q)\alpha_1\}$, con

$$0 - q = \langle \alpha_2 + 3\alpha_1, \alpha_2 \rangle = 2 + 3\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = 2 - 3 = -1$$

de donde

$$S_{\alpha_2+3\alpha_1,\alpha_2} = \{\alpha_2 + 3\alpha_1, 2\alpha_2 + 3\alpha_1\}. \tag{4.39}$$

Por tanto, la única raíz de altura 5 es

$$2\alpha_2 + 3\alpha_1.$$

Altura 6: En primer lugar, $S_{2\alpha_2+3\alpha_1,\alpha_1} = \{2\alpha_2 + 3\alpha_1\}$, porque ni $2\alpha_2 + 2\alpha_1 = 2(\alpha_1 + \alpha_2)$ ni $2\alpha_2 + 4\alpha_1 = 2(\alpha_2 + 2\alpha_1)$ pueden ser raíces. Análogamente, $S_{2\alpha_2+3\alpha_1,\alpha_2} = \{\alpha_2 + 3\alpha_1, 2\alpha_2 + 3\alpha_1\}$. Por tanto, no hay ninguna raíz de altura mayor que cinco, y el sistema de raíces es

$$G_2 = \pm\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + 2\alpha_2\}. \tag{4.40}$$

4.7 Diagramas de Dynkin

Si $\alpha, \beta \in \Phi^+$ son dos raíces positivas con $\alpha \neq \beta$, por la discusión de la Sección 4.2 se tiene

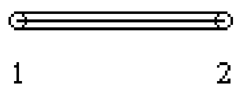
$$\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle = m \in \{0, 1, 2, 3\}. \tag{4.41}$$

Si $r = \operatorname{rank} \Phi$, el **gráfico de Coxeter** asociado a Φ es un gráfico de r vértices, tal que los vértices i y j están unidos por

Gráfico de Coxeter

$$m_{ij} = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle$$

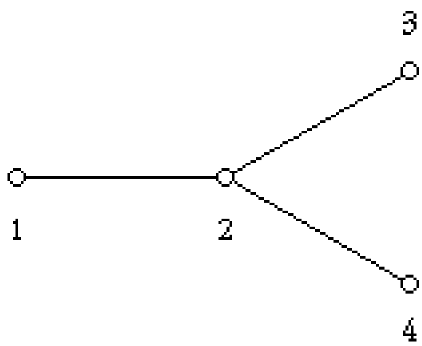
líneas, para todo $i \neq j$. Por ejemplo, en virtud de (4.35) el gráfico de Coxeter de G_2 es



Ejemplo 4.3. La matriz de Cartan de $\mathfrak{d}_4 = \mathfrak{so}(8, \mathbf{C})$ es

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{4.42}$$

Por tanto, el gráfico de Coxeter de $\mathfrak{d}_4$ es



Nota. Del mismo modo que la matriz de Cartan sólo está definida módulo una permutación de las filas y las columnas, el diagrama de Coxeter de un sistema de raíces está determinado salvo por la numeración de los vértices. Por lo tanto, a partir de ahora normalmente omitiremos la numeración de los vértices.

Diagrama de Dynkin

Evidentemente, el gráfico de Coxeter de un sistema de raíces no determina la matriz de Cartan. Sin embargo, nótese que para poder calcular $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$ a partir de m_{ij} basta con conocer cuál de las dos raíces α_i ó α_j es la mayor. En efecto, si $m_{ij} = 0$ evidentemente $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle = 0$, mientras que si $m_{ij} = 1$ entonces $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle = -1$ en virtud de la discusión de la Sección 4.2 (nótese que $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \leq 0$ por las propiedades de las bases.) Por último, si $m_{ij} = 2$ ó 3 entonces, de nuevo por los resultados de la Sección 4.2 se tiene

$$\begin{aligned} \|\alpha_i\| < \|\alpha_j\| \quad &\Longrightarrow \quad \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = -1, \quad \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle = -m_{ij} \\ \|\alpha_j\| < \|\alpha_i\| \quad &\Longrightarrow \quad \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = -m_{ij}, \quad \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle = -1. \end{aligned}$$

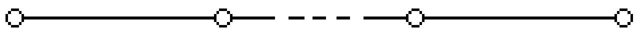
Si $m_{ij} = 2$ ó 3, añadiremos al gráfico de Coxeter una flecha apuntando (por convenio) en la dirección de la raíz más **corta** del par (α_i, α_j). De esta forma obtenemos a partir del gráfico de Coxeter el **diagrama de Dynkin** de un sistema de raíces que, como veremos a continuación, será de importancia fundamental en la clasificación de los sistemas de raíces. De lo dicho anteriormente se desprende que el diagrama de Dynkin (definido, como el gráfico de Coxeter, módulo la numeración de los vértices) proporciona la matriz de Cartan (módulo equivalencia), y por tanto caracteriza (salvo isomorfismos) al sistema de raíces. En otras palabras, se cumple:

El diagrama de Dynkin det. el sist. de raíces salvo isom.

Teorema 4.12. *Dos sistemas de raíces son isomorfos si y sólo si sus diagramas de Dynkin difieren a lo sumo en la numeración de los vértices.*

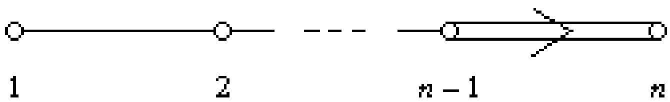
A_n

Ejemplo 4.4. En virtud de (3.54), el diagrama de Dynkin del sistema de raíces A_n asociado al álgebra clásica $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{sl}(n+1, \mathbf{C})$ es simplemente



B_n

Ejemplo 4.5. Consideremos a continuación el diagrama de Dynkin



que corresponde al sistema de raíces B_n del álgebra clásica $\mathfrak{b}_n = \mathfrak{so}(2n+1, \mathbf{C})$. Claramente, los únicos elementos extradiagonales no nulos de la matriz de Cartan son

$$\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = \langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle = \ldots = \langle \alpha_{n-2}, \alpha_{n-1} \rangle = \langle \alpha_{n-1}, \alpha_{n-2} \rangle = -1,$$

y

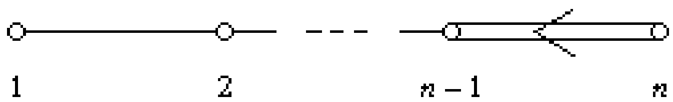
$$\langle \alpha_{n-1}, \alpha_n \rangle = -2, \quad \langle \alpha_n, \alpha_{n-1} \rangle = -1.$$

Por tanto, la matriz de Cartan de B_n es

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -2 \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{4.43}$$

Nótese, en particular, que en B_n hay $n-1$ raíces largas y una corta (α_n en la ordenación de la base que hemos utilizado para numerar los vértices del diagrama de Dynkin).

Ejemplo 4.6. Sea ahora el diagrama de Dynkin, C_n



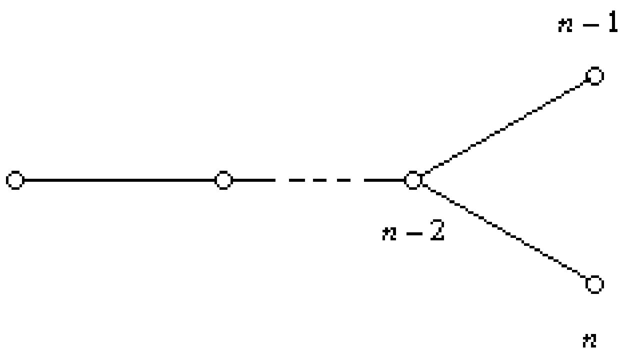
que corresponde al sistema de raíces C_n del álgebra clásica $\mathfrak{c}_n = \mathfrak{sp}(n, \mathbf{C})$. La matriz de Cartan asociada es

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}. \tag{4.44}$$

Aunque este diagrama sólo difiere del anterior en la dirección de la flecha entre las dos última raíces (y, por tanto, los gráficos de Coxeter de B_n y C_n son idénticos), esta diferencia es fundamental. En efecto, en B_n hay $n-1$ raíces largas y una (la última, en nuestra ordenación) corta, mientras que en C_n hay $n-1$ raíces cortas y una larga. Por tanto, si $n > 2$ los sistemas de raíces B_n y C_n **no** pueden ser isomorfos, ya que un isomorfismo preserva los cocientes entre raíces no ortogonales (pues $\|\beta\|^2 / \|\alpha\|^2 = \langle\beta,\alpha\rangle / \langle\alpha,\beta\rangle$ si $(\alpha,\beta) \neq 0$). Si $n = 2$, entonces es fácil ver que los diagramas de Dynkin de B_2 y C_2 sólo difieren en el orden de los vértices, y por tanto los sistemas de raíces B_2 y C_2 son isomorfos.

Nota. En general, si Φ' es el sistema dual de Φ, es inmediato comprobar que el diagrama de Dynkin de Φ' se obtiene del de Φ sin más que invertir el sentido de todas las flechas; en particular, los gráficos de Coxeter de Φ y Φ' son idénticos. (Por ejemplo, el sistema de raíces C_n es isomorfo al dual de B_n, y viceversa.) De hecho, se puede probar que dos sistemas de raíces tienen grupos de Weyl isomorfos si y sólo si sus gráficos de Coxeter difieren a lo sumo en la numeración de los vértices. *Diag. de Dynkin de* Φ'

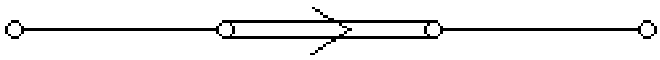
Por último, se puede probar mediante un cálculo directo (cf. [1]) que el diagrama de Dynkin del sistema de raíces D_n asociado a $\mathfrak{d}_n = \mathfrak{so}(2n, \mathbf{C})$ es D_n



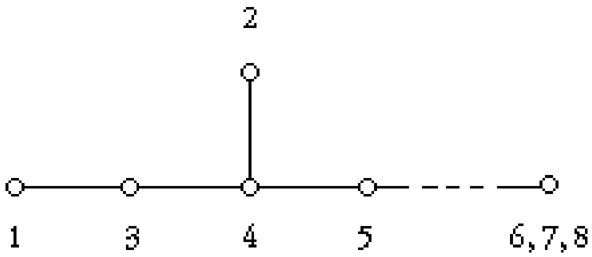
La matriz de Cartan correspondiente es

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 2 & -1 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & -1 & 2 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{4.45}$$

Aparte de los diagramas de Dynkin asociados a los sistemas de raíces de las álgebras clásicas, existe un número finito de **diagramas excepcionales**, que pasamos a enumerar:

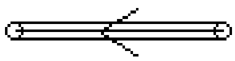
F_4 :  F_4

Matriz: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$E_{6,7,8}$: 

$E_{6,7,8}$

Matriz (para E_8): $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

G_2 :  G_2

Matriz: cf. (4.35).

A la vista de los diagramas de Dynkin de las álgebras clásicas, y en virtud del Teo- *Isom. entre las álg. clásicas* rema 4.12, podemos señalar los siguientes isomorfismos:

$$\mathfrak{a}_1 \approx \mathfrak{b}_1 \approx \mathfrak{c}_1 \qquad \big(\mathfrak{sl}(2) \approx \mathfrak{so}(3) \approx \mathfrak{sp}(1)\big) \tag{4.46}$$

$$\mathfrak{b}_2 \approx \mathfrak{c}_2 \qquad \big(\mathfrak{so}(5) \approx \mathfrak{sp}(2)\big) \tag{4.47}$$

$$\mathfrak{d}_2 \approx \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_1 \qquad \big(\mathfrak{so}(4) \approx \mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2)\big) \tag{4.48}$$

$$\mathfrak{d}_3 \approx \mathfrak{a}_3 \qquad \big(\mathfrak{so}(6) \approx \mathfrak{sl}(4)\big) \tag{4.49}$$

Además, de nuevo por el Teorema 4.12, no existe ningún isomorfismo entre las restantes álgebras clásicas $\mathfrak{a}_n$ $(n \geq 1)$, $\mathfrak{b}_n$ $(n \geq 2)$, $\mathfrak{c}_n$ $(n \geq 3)$ y $\mathfrak{d}_n$ $(n \geq 4)$.

4.8 Clasificación

Por lo visto en la Sección 4.5, basta con clasificar los sistemas de raíces irreducibles módulo isomorfismos. En términos del diagrama de Dynkin, es fácil ver que el concepto de irreducibilidad se corresponde con el de diagrama conexo:

Definición 4.13. Un diagrama de Dynkin es **conexo** si todo par de vértices distintos puede unirse mediante una sucesión de líneas del diagrama. *Diag. conexos*

Escribiremos a partir de ahora $i \leftrightarrow j$ ó $\alpha_i \leftrightarrow \alpha_j$ para indicar que los vértices i y j correspondientes a las raíces simples α_i y α_j de un diagrama de Dynkin están conectados por una sucesión de líneas del diagrama.

Proposición 4.14. *Un sistema de raíces es irreducible si y sólo si su diagrama de Dynkin es conexo.* *Φ irred. $\Leftrightarrow$ su diag. de Dynkin es conexo*

Demostración. Supongamos, en primer lugar, que el diagrama de Dynkin de un sistema de raíces Φ respecto de la base B es disconexo. Si, por ejemplo, el i-ésimo vértice del diagrama no está conectado con el j-ésimo entonces $B = B_1 \cup B_2$, siendo

$$B_1 \equiv \{\alpha \in B \mid \alpha \leftrightarrow \alpha_i\}, \qquad B_2 = B - B_1 .$$

Es claro que $B_1, B_2 \neq \emptyset$, ya que $\alpha_i \in B_1$ y $\alpha_j \in B_2$. Por otra parte, si $\alpha \in B_1$ y $\beta \in B_2$ entonces $(\alpha, \beta) = 0$, ya que en caso contrario $\alpha_i \leftrightarrow \alpha \leftrightarrow \beta$ implicaría que $\alpha_i \leftrightarrow \beta \in B_2$. Por tanto $B_1 \perp B_2$, y la base B es reducible. Por la Proposición 4.7, el sistema de raíces es también reducible.

Sea ahora Φ, y por tanto B, reducible, es decir $B = B_1 \cup B_2$ con $B_i \neq \emptyset$ y $B_1 \perp B_2$. Si $\alpha \in B_1$ y $\beta \in B_2$ entonces α y β no pueden estar conectadas por una sucesión de líneas del diagrama. En efecto, en caso contrario existiría una sucesión de raíces simples $\alpha_1 \equiv \alpha, \dots, \alpha_n \equiv \beta$ con $(\alpha_i, \alpha_{i+1}) \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, n-1$. Pero en tal caso habría un índice $j \in \{1, \dots, n-1\}$ tal que $\alpha_j \in B_1$ y $\alpha_{j+1} \in B_2$, lo que implicaría que $(\alpha_j, \alpha_{j+1}) \neq 0$ en contradicción con la ortogonalidad de B_1 y B_2. *Q.E.D.*

Por tanto, basta clasificar todos los diagramas de Dynkin conexos (módulo la numeración de los vértices). El resultado final es el siguiente:

Teorema 4.15. *Si Φ es un sistema irreducible de raíces, su diagrama de Dynkin es igual (salvo a lo sumo en la ordenación de los vértices) a exactamente uno de los diagramas inequivalentes siguientes:* A_n $(n \geq 1)$, B_n $(n \geq 2)$, C_n $(n \geq 3)$, D_n $(n \geq 4)$, G_2, F_4, E_6, E_7 *y* E_8. *Recíprocamente, si $\mathcal{D}$ es uno de los diagramas anteriores existe un sistema de raíces Φ cuyo diagrama de Dynkin es $\mathcal{D}$.* *Clasificación*

Demostración. La demostración (cf. [2, pp. 57–63]) es un simple cálculo, largo pero elemental. Se puede dividir en tres etapas:

Etapa 1) En primer lugar, se clasifican todos los posibles gráficos de Coxeter. Para ello basta clasificar todos los sistemas de vectores unitarios $\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_r\}$ ($\epsilon_i = \alpha_i / \|\alpha_i\|$) tales que

$$4(\epsilon_i, \epsilon_j)^2 \equiv m_{ij} \in \{0, 1, 2, 3\}; \qquad (\epsilon_i, \epsilon_j) \leq 0, \quad 1 \leq i \neq j \leq r, \tag{4.50}$$

módulo transformaciones ortogonales.

Etapa 2) De los gráficos de Coxeter de la etapa anterior se obtienen sin ninguna dificultad todos los diagramas de Dynkin correspondientes. En efecto, nótese que sólo en el caso de $\mathrm{B}_n \Leftrightarrow C_n$ el gráfico de Coxeter no determina el diagrama de Dynkin. Pero en este caso la existencia de B_n implica la de C_n (y viceversa), ya que estos dos diagramas son duales uno del otro.

Etapa 3) Para cada uno de los *posibles* diagramas de Dynkin $\mathcal{D}$ hallados en la etapa anterior (A_n–D_n, G_2, F_4, E_6–E_8), hay que comprobar que existe de hecho un sistema de raíces cuyo diagrama de Dynkin es $\mathcal{D}$. En el caso de los diagramas A_n–D_n, esto se puede hacer directamente sin más que observar que estos son precisamente los diagramas de Dynkin de los sistemas de raíces de las álgebras clásicas. Sin embargo, este procedimiento no se puede utilizar para los diagramas excepcionales—de hecho, no es trivial dar una realización explícita sencilla de las álgebras excepcionales—y no hay más remedio que construir explícitamente los sistemas de raíces asociados. La ventaja de esto último es que se obtienen también los correspondientes grupos de Weyl; cf. [2, p. 63], [1, p. 471]). *Q.E.D.*

Clasificación de las álgebras simples

Una vez clasificados todos los diagramas de Dynkin conexos, y por tanto todos los sistemas irreducibles de raíces abstractos, sólo falta clasificar las álgebras de Lie complejas simples (de las que se obtienen todas las semisimples mediante sumas directas, como ya hemos visto). Lo único no trivial es ver si para cada uno de los sistemas de raíces del Teorema 4.15 existe un álgebra de Lie simple compleja con dicho sistema de raíces. Esto es evidentemente cierto para las álgebras clásicas, y se puede probar también (con mucha más dificultad) para los diagramas de Dynkin excepcionales. Se obtienen así las llamadas **álgebras excepcionales**, denotadas por $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{f}_4$, $\mathfrak{e}_6$–$\mathfrak{e}_8$, respectivamente de dimensión 14, 52, 78, 133 y 244. Como hemos dicho antes, no se conoce ninguna realización sencilla de estas álgebras al estilo de las álgebras clásicas. Quizás el álgebra excepcional que admite una interpretación más sencilla es G_2, que puede realizarse como el álgebra de las derivaciones del álgebra no conmutativa ni asociativa de los octoniones. (De hecho, G_2 admite también una realización como una subálgebra de $\mathfrak{o}(7, \mathbf{C})$; cf. [2, pp. 103–106].) Una forma alternativa más elegante de probar la existencia de las álgebras excepcionales en bloque es la debida a J.P. Serre. En efecto, Serre demuestra que si $A = (a_{ij})$ es la matriz de Cartan asociada a uno cualquiera de los diagramas del Teorema 4.15 entonces el **álgebra de Lie libre** $\mathfrak{g}$ **con generadores** $\{H_i, X_i, Y_i \mid 1 \leq i \leq r\}$ **y relaciones** (3.41)–(3.46) es un álgebra semisimple compleja de dimensión finita, cuyo sistema de raíces respecto del álgebra de Cartan $\mathfrak{h} = \sum_{i=1}^r \mathbf{C} H_i$ tiene por matriz de Cartan a A (cf. [1, pp. 482–490]). Finalmente otra forma de proceder, totalmente elemental pero mucho más farragosa desde el punto de vista computacional, es la de J. Tits. Más precisamente, Tits se basa en las relaciones de conmutación (3.32)–(3.35), expresando en primer lugar las constantes de estructura $N_{\alpha\beta}$ en función de la matriz de Cartan, y luego demostrando que el conjunto de constantes de estructura determinado por (3.32)–(3.35) satisface la identidad de Jacobi.

Álg. excepcionales

Bibliografía

[1] Helgason, S., *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces.* Academic Press, Nueva York, 1978.

[2] Humphreys, J. E., *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory.* Springer–Verlag, Nueva York, 1972.

[3] Jacobson, N., *Lie Algebras.* Dover, Nueva York, 1979.

[4] Postnikov, M., *Leçons de géométrie. Groupes et algèbres de Lie.* Mir, Moscú, 1985.

[5] Sattinger, D. H. y Weaver, O. L., *Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry and Mechanics.* Springer–Verlag, Nueva York, 1986.

[6] Tits, J., Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **31**, 21–58 (1966).

[7] Varadarajan, V. S., *Lie Groups, Lie Algebras, and their Representations.* Prentice Halls, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1974.