Manual de

Variable Compleja

Artemio González López

Madrid, octubre de 2009

Edita: Universidad Complutense de Madrid
Área de Ciencias Exactas y de la Naturaleza

Departamento de Física Teórica II
Facultad de Ciencias Físicas
Avenida Complutense s/n
Ciudad Universitaria
28040 Madrid

Universidad Complutense de Madrid

Autor:
Artemio González López

ISBN: 978-84-692-4886-7
Depósito Legal:
Impreso en Madrid

Índice general

Capítulo 1

Funciones analíticas

1.1 Definición y propiedades algebraicas de los números complejos

Definición 1.1. $\mathbb{C} = \left\{\mathbb{R}^2, +, \cdot\right\}$ (espacio vectorial *real)*, con la **suma** y el **producto** definidos por

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\\ (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).\end{aligned}$$

Justificación:

- La suma y la multiplicación de los pares de la forma $(x, 0) \in \mathbb{C}$ coinciden con la de los números reales $x \in \mathbb{R}$

  $\Longrightarrow$ podemos identificar el complejo $(x, 0)$ con el número real $x \in \mathbb{R}$

  $\Longrightarrow$ podemos identificar $\mathbb{R}$ con el subconjunto $\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$ (*eje real*)

- Nótese que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y) = (\lambda, 0)(x, y)$

- $\mathrm{i} \equiv (0, 1) \Longrightarrow \mathrm{i}^2 = \mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) \equiv -1$

- $(x, y) = (x, 0) + y(0, 1) \equiv x + \mathrm{i}\,y$

  $$\Longrightarrow (x_1 + \mathrm{i}\,y_1)(x_2 + \mathrm{i}\,y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1)\,,$$

  que es la fórmula "tradicional" para multiplicar los números complejos $x_1 + \mathrm{i}\,y_1$ y $x_2 + \mathrm{i}\,y_2$.

- Si $z = x + \mathrm{i}\,y$ $(x, y \in \mathbb{R})$, se define $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$ (partes *real* e *imaginaria* del complejo z)

- Al ser $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ (como *conjuntos*), la **igualdad** en $\mathbb{C}$ se define mediante

  $$z = x + \mathrm{i}\,y = w = u + \mathrm{i}\,v \Longleftrightarrow x = u, y = v\,.$$

  En particular,

  $$z = x + \mathrm{i}\,y = 0 \Longleftrightarrow x = y = 0.$$

Proposición 1.2. $\mathbb{C}$ *es un* **cuerpo***: para todo $z, w, s \in \mathbb{C}$ se cumple*

$$\begin{aligned}
z + w &= w + z & z\,w &= w\,z\\
z + (w + s) &= (z + w) + s & z\,(w\,s) &= (z\,w)\,s\\
z + 0 &= z & 1\,z &= z\\
\exists -z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } z + (-z) &= 0 & z \neq 0 \Longrightarrow \exists z^{-1} \in \mathbb{C} \text{ t.q. } z\,z^{-1} &= 1
\end{aligned}$$

$$z(w + s) = z\,w + z\,s.$$

Demostración. Obviamente, $z = x + \mathrm{i}\,y \Longrightarrow -z = -x - \mathrm{i}\,y$. La existencia de inverso respecto del producto para todo $z = x + \mathrm{i}\,y \neq 0$ se deduce del siguiente cálculo:

$$\begin{aligned}
z^{-1} = u + \mathrm{i}v \Longrightarrow z\,z^{-1} &= (x\,u - y\,v) + \mathrm{i}\,(x\,v + y\,u) = 1 \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} x\,u - y\,v = 1 \\ y\,u + x\,v = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow u = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad v = -\frac{y}{x^2+y^2} \quad (\text{nótese que } z \neq 0 \Longrightarrow x^2+y^2 \neq 0) \\
&\Longleftrightarrow z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} - \mathrm{i}\,\frac{y}{x^2+y^2}.
\end{aligned}$$

Las demás propiedades se comprueban fácilmente a partir de la definición de las operaciones en $\mathbb{C}$. *Q.E.D.*

N.B. Como en todo cuerpo, los inversos $-z$ y z^{-1} (si $z \neq 0$) del número $z \in \mathbb{C}$ respecto de la suma y el producto son *únicos*.

Notación: $\dfrac{z}{w} \equiv z\,w^{-1}$, $\quad z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{n \text{ veces}} \quad (n \in \mathbb{N})$.

- $\mathbb{C}$ *no* es un cuerpo ordenado: si lo fuera,

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = -1 \geqslant 0.$$

- *Raíces cuadradas* (método algebraico):

Si $z = x + \mathrm{i}\,y$, queremos hallar todos los $w \equiv u + \mathrm{i}v \in \mathbb{C}$ tales que $w^2 = z$:

$$\begin{aligned}
w^2 = z &\Longleftrightarrow u^2 - v^2 + 2\mathrm{i}uv = x + \mathrm{i}\,y \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} u^2 - v^2 = x \\ 2\,u\,v = y \end{cases} \\
&\Longrightarrow x^2 + y^2 = (u^2+v^2)^2 \Longrightarrow u^2 + v^2 = \sqrt{x^2+y^2} \\
&\Longrightarrow u^2 = \frac{1}{2}\Big(x + \sqrt{x^2+y^2}\Big), \quad v^2 = \frac{1}{2}\Big(-x + \sqrt{x^2+y^2}\Big)
\end{aligned}$$

Como (por la segunda ecuación) el signo de uv ha de coincidir con el de y, de esto se sigue que

$$w = \begin{cases} \pm\left(\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}} + \mathrm{i}\,\operatorname{sgn} y\,\sqrt{\frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}}\right), & y \neq 0 \\ \pm\sqrt{x}, & y = 0,\ x \geqslant 0 \\ \pm\mathrm{i}\sqrt{-x}, & y = 0,\ x < 0. \end{cases}$$

Las raíces cuadradas de un número complejo $z \neq 0$ son por tanto *dos* números complejos distintos (de signos opuestos). Las raíces cuadradas de z son *reales* si y sólo si $z \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, e **imaginarias puras** si y sólo si $z \in \mathbb{R}^-$.

Ejemplo 1.3. Las raíces cuadradas de $3 - 4\,\mathrm{i}$ son

$$\pm\left(\sqrt{\frac{8}{2}} - \mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{2}}\right) = \pm(2 - \mathrm{i}).$$

Los siguientes resultados, bien conocidos en el campo real, son consecuencia inmediata de la estructura de *cuerpo* que posee $\mathbb{C}$:

- Cualquier ecuación cuadrática con coeficientes *complejos* se puede resolver utilizando la fórmula usual:

$$a\,z^2 + b\,z + c = 0 \iff z = \frac{1}{2a}\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right) \qquad a, b, c \in \mathbb{C}\,,\; a \neq 0.$$

- El teorema del *binomio de Newton* es válido en el campo complejo:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\,, \qquad a, b \in \mathbb{C},\; n \in \mathbb{N}\,.$$

1.2 Conjugación. Módulo y argumento. Fórmula de de Moivre. Raíces.

- Geométricamente, los números complejos se pueden identificar con los puntos del *plano* haciendo corresponder al complejo $z = x + \mathrm{i}\,y$ el punto de coordenadas (x, y). De ahí que el conjunto $\mathbb{C}$ reciba el nombre de **plano complejo.** Es también corriente cuando se utiliza esta representación geométrica de $\mathbb{C}$ denominar *eje real* al eje horizontal y *eje imaginario* al vertical (fig. 1.1).

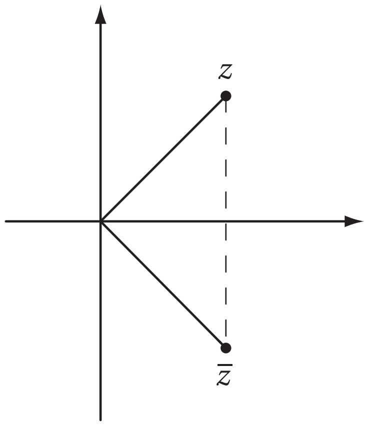

Figura 1.1: Plano complejo.

- Si $z = x + \mathrm{i}\,y \in \mathbb{C}$, se definen el *módulo* y el *complejo conjugado* de z respectivamente como sigue:

$$\begin{cases} |z| = \sqrt{x^2 + y^2} & \text{(distancia de } z \text{ al origen)} \\ \bar{z} = x - \mathrm{i}\,y & \text{(reflexión de } z \text{ respecto del eje real)} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \qquad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \bar{z})\,.$$

El número $z \in \mathbb{C}$ es *real* si y sólo $z = \bar{z}$, e *imaginario puro* si y sólo $z = -\bar{z}$.

- Propiedades:

  i) $\bar{\bar{z}} = z$

  ii) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$

  iii) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w} \implies \overline{1/z} = 1/\bar{z}$ (si $z \neq 0$)

iv) $|\bar{z}| = |z|$

v) $z\bar{z} = |z|^2 \implies \begin{cases} z \neq 0 & \implies z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} \\ |z| = 1 & \iff \bar{z} = z^{-1} \end{cases}$

vi) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ (elevar al cuadrado) $\implies \left|z^{-1}\right| = |z|^{-1}$ (si $z \neq 0$)

vii) $w \neq 0 \implies \overline{z/w} = \bar{z}/\bar{w}, \quad |z/w| = |z| \,/\, |w|$ (consecuencia de iii) y vi))

viii) $|\operatorname{Re} z| \leqslant |z|\,, \quad |\operatorname{Im} z| \leqslant |z|$ (i.e., $-|z| \leqslant \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \leqslant |z|$)

- *Desigualdad triangular:* $|z + w| \leqslant |z| + |w|$

  En efecto:

$$|z + w|^2 = (z + w)(\overline{z + w}) = |z|^2 + |w|^2 + (z\bar{w} + \bar{z}w) = |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w})$$
$$\leqslant |z|^2 + |w|^2 + 2\,|z\bar{w}| = |z|^2 + |w|^2 + 2\,|z|\,|w| = (|z| + |w|)^2.$$

- Consecuencias:

  i) $||z| - |w|| \leqslant |z - w|$

  En efecto:

$$|z| = |(z - w) + w| \leqslant |z - w| + |w| \implies |z| - |w| \leqslant |z - w|\ ,$$

  y cambiando z por w se obtiene la desigualdad $|w| - |z| \leqslant |z - w|$.

  ii) $|z| > |w| \implies \dfrac{1}{|z - w|} \leqslant \dfrac{1}{|z| - |w|}$

1.2.1 Argumento

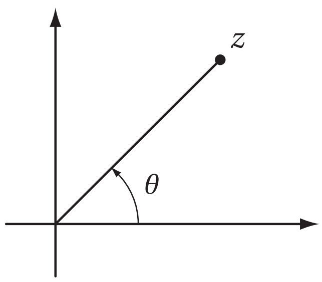

Figura 1.2: Definición de argumento.

- Dado $0 \neq z \in \mathbb{C}$, existe $\theta \in \mathbb{R}$ t.q.

$$z = |z|\,(\cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta) \qquad \text{(cf. fig. 1.2).}$$

  El número θ es el ángulo que forma el eje real positivo con el vector z, y está por tanto definido módulo un múltiplo entero de 2π. Por ejemplo,

$$z = \mathrm{i} \implies \theta \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \pm 2\pi, \frac{\pi}{2} \pm 4\pi, \dots\right\} = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Definición 1.4. $\arg z$ (**argumento** de z): *cualquier* $\theta \in \mathbb{R}$ t.q. $z = |z|\,(\cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta)$.

En otras palabras, $\arg z$ es *cualquiera* de los ángulos orientados formados por el eje real positivo con el vector z. Por tanto $\arg z$ toma *infinitos* valores, que difieren entre sí en un *múltiplo entero* de 2π. Nótese, en particular, que arg ***no** es una función*.

Ejemplos:

$$\arg \mathrm{i} \in \left\{\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\},$$
$$\arg(-1-\mathrm{i}) \in \left\{\tfrac{5\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{-\tfrac{3\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

- Para que θ sea *único,* basta imponerle la condición adicional de que pertenezca a un cierto intervalo semiabierto I de longitud 2π (como $[0, 2\pi)$, $(-\pi, \pi]$, $\big(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3\pi}{2}\big]$, etc.). Escoger este intervalo I se conoce como tomar la **determinación** del argumento $\arg_I$; nótese, en particular, que $\arg_I : \mathbb{C} - \{0\} \to I$ es una *función*.

Definición 1.5. $\arg_I(z) \equiv$ *único* valor de $\arg z$ que pertenece a I

Ejemplo: $\arg_{[0,2\pi)}(-1-\mathrm{i}) = 5\pi/4$, $\arg_{(-\pi,\pi]}(-1-\mathrm{i}) = -3\pi/4$.

- **Determinación principal** del argumento:

$$\operatorname{Arg} \equiv \arg_{(-\pi,\pi]}$$

Ejemplo:

z	1	$1+i$	i	-1	$-1-\mathrm{i}$	$-\mathrm{i}$	$1-\mathrm{i}$
$\operatorname{Arg} z$	0	$\pi/4$	$\pi/2$	π	$-3\pi/4$	$-\pi/2$	$-\pi/4$

- Claramente, $\operatorname{Arg} : \mathbb{C} - \{0\} \to (-\pi, \pi]$ es una función *discontinua* en $\mathbb{R}^- \cup \{0\}$. Análogamente, $\arg_{[0,2\pi)}$ es discontinua en $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. En general, la determinación $\arg_{[\theta_0,\theta_0+2\pi)}$ (ó $\arg_{(\theta_0,\theta_0+2\pi]}$) es discontinua en la semirrecta cerrada que forma un ángulo θ_0 con el eje real positivo.

- Forma *trigonométrica* ó *polar* de los números complejos:

$$z \neq 0 \implies z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta), \qquad r = |z|, \quad \theta = \arg z.$$

- $z, w \neq 0$; $z = w \iff \big(|z| = |w|, \quad \arg z = \arg w \mod 2\pi\big)$.

- Interpretación geométrica del producto en $\mathbb{C}$: si $z_k = r_k(\cos\theta_k + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta_k \neq 0)$ $(k = 1, 2)$ entonces

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta_1)\, r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta_2) \\ &= r_1 r_2\left[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2) + \mathrm{i}(\cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2)\right] \\ &= r_1 r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + \mathrm{i}\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2)\right] \end{aligned}$$

De este cálculo se sigue que $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$ (cf. la propiedad vi) de la pág. 4), junto con

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \mod 2\pi. \tag{1.1}$$

- Nótese que, en general, $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) \neq \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$. Por ej.,

$$\operatorname{Arg}(-\mathrm{i}) = -\frac{\pi}{2} \neq \operatorname{Arg}(-1) + \operatorname{Arg}\mathrm{i} = \frac{3\pi}{2}.$$

- Consecuencias: si $z, w \neq 0$ se cumple

$$\begin{aligned} (zz^{-1} = 1 \implies) &\qquad \arg(z^{-1}) = -\arg z &&\mod 2\pi \\ (z\bar{z} = |z|^2 \geqslant 0 \implies) &\qquad \arg(\bar{z}) = -\arg z &&\mod 2\pi \\ \implies &\qquad \arg(z/w) = \arg z - \arg w &&\mod 2\pi. \end{aligned}$$

1.2.2 Fórmula de de Moivre

- Si $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta)$, a partir de (1.1) se demuestra por inducción la *fórmula de de Moivre*

$$z^n = r^n\big[\cos(n\theta) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(n\theta)\big], \quad n \in \mathbb{N}.$$

- $z^{-1} = r^{-1}\big[\cos(-\theta) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(-\theta)\big] \implies$ la fórmula vale para todo $n \in \mathbb{Z}$.
- La fórmula de de Moivre permite expresar $\cos(n\theta)$ y $\mathrm{sen}(n\theta)$ como un polinomio en $\cos\theta$ y $\mathrm{sen}\,\theta$. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}(\cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta)^3 &= \cos(3\theta) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(3\theta)\\ &= (\cos^3\theta - 3\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\theta) + \mathrm{i}(3\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - \mathrm{sen}^3\theta)\\ &\implies \begin{cases}\cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\theta\\ \mathrm{sen}(3\theta) = 3\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - \mathrm{sen}^3\theta.\end{cases}\end{aligned}$$

1.2.3 Raíces n-ésimas

- Si $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta) \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$, las raíces n-ésimas de z son las soluciones $w \in \mathbb{C}$ de la ecuación $w^n = z$:

$$\begin{aligned}w \neq 0 &\implies w = \rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\varphi)\\ w^n &= \rho^n\big[\cos(n\varphi) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(n\varphi)\big] = r(\cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta)\\ &\iff \begin{cases}\rho^n = r \iff \rho = \sqrt[n]{r} \equiv r^{1/n}\\ n\varphi = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\end{cases}\end{aligned}$$

$$\iff w = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right], \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

(ya que k y $k + ln$, con $l \in \mathbb{Z}$, dan lugar al mismo número w).

$\therefore$ *Un número complejo no nulo tiene n raíces n-ésimas distintas.*

Ejemplo: las raíces cúbicas de i son los números

$$\begin{aligned}w &= \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2\\ &\iff w = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + \mathrm{i}),\ \frac{1}{2}(-\sqrt{3} + \mathrm{i}),\ -\mathrm{i}.\end{aligned}$$

- En particular, las n raíces n-ésimas de la unidad ($z = 1$) son los números

$$\varepsilon_{n,k} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

(vértices de un polígono regular de n lados inscrito en la circunferencia unidad).

- Nótese que $\varepsilon_{n,k} = (\varepsilon_n)^k$, siendo $\varepsilon_n \equiv \varepsilon_{n,1} = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.
Ejemplo: las raíces sextas de la unidad son

$$\begin{aligned}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]^k &= \frac{1}{2^k}(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})^k, \quad k = 0, 1, \dots, 5\\ &= 1,\ \frac{1}{2}(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}),\ \frac{1}{2}(-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}),\ -1,\ -\frac{1}{2}(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}),\ \frac{1}{2}(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}).\end{aligned}$$

Ejercicio. Probar que las n raíces n-ésimas de $z \neq 0$ están dadas por

$$\sqrt[n]{z} \cdot (\varepsilon_n)^k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

donde $\sqrt[n]{z}$ denota *cualquier* raíz n-ésima de z.

1.3 La función exponencial, funciones trigonométricas e hiperbólicas, logaritmos y potencias

1.3.1 Función exponencial

Si $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^t &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \\ \cos t &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} \\ \operatorname{sen} t &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}. \end{aligned}$$

Si $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ (con $x, y \in \mathbb{R}$), la propiedad $\mathrm{e}^{t_1+t_2} = \mathrm{e}^{t_1}\mathrm{e}^{t_2}$ sugiere definir $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$. A su vez, procediendo formalmente se obtiene

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{i}^n \frac{y^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{i}^{2k} \frac{y^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{i} \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{i}^{2k} \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \cos y + \mathrm{i} \operatorname{sen} y \quad (\text{ya que } \mathrm{i}^{2k} = (\mathrm{i}^2)^k = (-1)^k). \end{aligned}$$

Definición 1.6. Para todo $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ (con $x, y \in \mathbb{R}$), definimos

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x (\cos y + \mathrm{i} \operatorname{sen} y).$$

Nota: Si $z \in \mathbb{R}$, la exponencial compleja se reduce obviamente a la exponencial real.

Valores particulares:

$$\mathrm{e}^0 = 1, \ \ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} = \mathrm{i}, \ \ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1, \ \ \mathrm{e}^{3\pi\mathrm{i}/2} = -\mathrm{i}, \ \ \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = 1.$$

Propiedades: Para todo $z, w \in \mathbb{C}$ se tiene

i) $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\operatorname{Re} z}$, $\quad \arg(\mathrm{e}^z) = \operatorname{Im} z \mod 2\pi$.

ii) $\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z\mathrm{e}^w$.

iii) $\mathrm{e}^z \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

iv) $\mathrm{e}^z = 1 \iff z = 2k\pi\mathrm{i}$, con $k \in \mathbb{Z}$.

v) e^z es una función periódica, cuyos períodos son los números $2k\pi\mathrm{i}$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Demostración:

i) Consecuencia inmediata de la definición.

ii) Si $z = x + \mathrm{i}y$, $w = u + \mathrm{i}v$, de la propiedad anterior y la ec. (1.1) se sigue que

$$\mathrm{e}^z \mathrm{e}^w = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^u \left[\cos(y+v) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(y+v)\right] = \mathrm{e}^{x+u} \left[\cos(y+v) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(y+v)\right] = \mathrm{e}^{z+w}.$$

iii) $\mathrm{e}^z \mathrm{e}^{-z} = \mathrm{e}^0 = 1 \implies (\mathrm{e}^z)^{-1} = \mathrm{e}^{-z}$.

iv) $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\, y) = 1 \iff \mathrm{e}^x = 1,\ \ y = 0 \mod 2\pi \iff x = 0,\ \ y = 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

v) $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z+w} \iff \mathrm{e}^w = 1 \iff w = 2k\pi\mathrm{i} \ (k \in \mathbb{Z})$.

- $z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg z}$; $\qquad \overline{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{\bar z}$.

1.3.2 Funciones trigonométricas e hiperbólicas

Si y es real entonces

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \cos y + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\, y,\ \ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y} = \cos y - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\, y \implies \cos y = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}\right),\ \ \mathrm{sen}\, y = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}\right).$$

Definición 1.7. Para todo $z \in \mathbb{C}$ se define

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right),\ \ \mathrm{sen}\, z = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right).$$

Evidentemente, si z es real $\cos z$ y $\mathrm{sen}\, z$ se reducen a las correspondientes funciones reales.

Propiedades: para todo $z, w \in \mathbb{C}$ se tiene

i) $\cos(-z) = \cos(z)$, $\quad \mathrm{sen}(-z) = -\,\mathrm{sen}\, z$.

ii) $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \mathrm{sen}\, z\, \mathrm{sen}\, w$, $\quad \mathrm{sen}(z+w) = \mathrm{sen}\, z \cos w + \cos z\, \mathrm{sen}\, w$.

iii) $\cos z = \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2} \pm z\right)$.

iv) $\cos^2 z + \mathrm{sen}^2 z = 1$.

v) $\overline{\cos z} = \cos(\bar z)$, $\ \overline{\mathrm{sen}\, z} = \mathrm{sen}(\bar z)$.

vi) $\mathrm{sen}\, z = 0 \iff z = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$, $\cos z = 0 \iff z = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

vii) $\cos z$ y $\mathrm{sen}\, z$ son funciones periódicas de período $2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Demostración:

i) Inmediato.

ii) Por ejemplo,

$$\begin{aligned}\cos z \cos w - \mathrm{sen}\, z\, \mathrm{sen}\, w &= \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}\right) + \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}\right) \\ &= \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}) = \cos(z+w).\end{aligned}$$

iii) Caso particular de las fórmulas anteriores.

iv) Hacer $w = -z$ en la fórmula para $\cos(z+w)$.

v) Consecuencia de $\overline{\mathrm{e}^w} = \mathrm{e}^{\bar w}$.

vi) $\operatorname{sen} z = 0 \iff \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} = 0 \iff \mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} = 1 \iff 2\mathrm{i}z = 2k\pi\mathrm{i}\ (k \in \mathbb{Z}) \iff z = k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$. Del apartado iii) se sigue la fórmula correspondiente para los ceros de cos.

vii) Por el apartado iii), basta probar la afirmación para la función sen. De la identidad

$$\operatorname{sen}(z+w) - \operatorname{sen} z \equiv \operatorname{sen}\left(z + \frac{w}{2} + \frac{w}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(z + \frac{w}{2} - \frac{w}{2}\right) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{w}{2}\right)\cos\left(z + \frac{w}{2}\right)$$

se sigue que $\operatorname{sen}(z+w) - \operatorname{sen} z = 0$ para todo z si y sólo si $\operatorname{sen}(w/2) = 0$ (tomar $z = -w/2$). Por el apartado anterior, esto es equivalente a que w sea un múltiplo entero de 2π.

Como en el caso real, a partir de sen y cos se definen las demás funciones trigonométricas:

$$\tan z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}, \quad \sec z = \frac{1}{\cos z} \qquad \left(z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right);$$
$$\cot z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z} = \frac{1}{\tan z}, \quad \csc z = \frac{1}{\operatorname{sen} z} \qquad (z \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}).$$

Funciones hiperbólicas: para todo $z \in \mathbb{C}$ se define

$$\cosh z = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}\right), \quad \operatorname{senh} z = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}\right).$$

$\implies \quad \cosh z = \cos(\mathrm{i}z), \quad \operatorname{senh} z = -\mathrm{i}\operatorname{sen}(\mathrm{i}z)$

De estas igualdades se deducen las propiedades de las funciones hiperbólicas. Por ejemplo:

- $\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$.
- $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen}(x + \mathrm{i}y) = \operatorname{sen} x \cos(\mathrm{i}y) + \cos x \operatorname{sen}(\mathrm{i}y) = \operatorname{sen} x \cosh y + \mathrm{i}\cos x \operatorname{senh} y$.

  En particular, nótese que $\operatorname{sen} z$ es real si z es real, o si $z = \frac{\pi}{2} + \mathrm{i}y + k\pi$ con $y \in \mathbb{R}$ arbitrario y $k \in \mathbb{Z}$. Análogamente, $\cos z$ es real si $z \in \mathbb{R}$, o si $z = \mathrm{i}y + k\pi$ con $y \in \mathbb{R}$ arbitrario y $k \in \mathbb{Z}$.
- $\tanh z \equiv \dfrac{\operatorname{senh} z}{\cosh z} = -\mathrm{i}\tan(\mathrm{i}z)$ $\ (z \neq \frac{\mathrm{i}\pi}{2} + k\pi\mathrm{i},\ k \in \mathbb{Z})$, etc.

Ejercicio. Si $z = x + \mathrm{i}y$ (con $x, y \in \mathbb{R}$), probar que $|\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y$, $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y$. Deducir que $|\operatorname{senh} y| \leqslant |\operatorname{sen} z|, |\cos z| \leqslant \cosh y$. En particular, sen y cos *no están acotadas* en $\mathbb{C}$.

1.3.3 Logaritmos

- En $\mathbb{R}$, $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ (donde $\exp(t) \equiv \mathrm{e}^t$) es una aplicación biyectiva. Su inversa es la función $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Por definición,

$$\log x = y \iff x = \mathrm{e}^y \quad (\implies x > 0).$$

- En $\mathbb{C}$, exp *no* es invertible al no ser inyectiva (por ser periódica). Por definición, los posibles logaritmos de $z \in \mathbb{C}$ son *todos* los complejos $w \in \mathbb{C}$ tales que $\mathrm{e}^w = z$. Se tiene entonces:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^w = z \ &\implies\ z \neq 0;\\
w = u + \mathrm{i}v \ &\implies\ \mathrm{e}^u(\cos v + \mathrm{i}\operatorname{sen} v) = z \neq 0\\
&\iff \begin{cases} \mathrm{e}^u = |z| \iff u = \log|z| \\ v = \arg z \mod 2\pi \end{cases}\\
&\iff w = \log|z| + \mathrm{i}\arg z \mod 2\pi\mathrm{i}.
\end{aligned}$$

Si $z \neq 0$, la ecuación $\mathrm{e}^w = z$ tiene por tanto *infinitas* soluciones, que difieren entre sí en múltiplos enteros de $2\pi\mathrm{i}$. A cada uno de estos (infinitos) w se les denomina **logaritmos** de $z \neq 0$. En otras palabras,

$$z \neq 0 \implies \log z = \log|z| + \mathrm{i}\arg z + 2k\pi\mathrm{i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Nótese, en particular, que log (al igual que arg) *no* es una función.

- Ejemplo:

$$\log(-2\mathrm{i}) = \log 2 - \frac{\mathrm{i}\pi}{2} + 2k\pi\mathrm{i}\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Definición 1.8. Si I es un intervalo semiabierto de anchura 2π, se define la **determinación** I del logaritmo mediante

$$\log_I z = \log|z| + \mathrm{i}\arg_I z, \qquad \forall z \neq 0.$$

Por ejemplo, $\log_{[0,2\pi)}(-2) = \log 2 + \frac{3\pi\mathrm{i}}{2}$.

- Nótese que $\log_I : \mathbb{C} - \{0\} \to \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} s \in I\}$ es una *función.*
- La **determinación principal** del logaritmo se define por

$$\operatorname{Log} = \log_{(-\pi,\pi]}\,.$$

Ejemplo: $\operatorname{Log}(-2\mathrm{i}) = \log 2 - \dfrac{\mathrm{i}\pi}{2}$, $\operatorname{Log}(-1) = \mathrm{i}\pi$, $\operatorname{Log}(-1-\mathrm{i}) = \dfrac{1}{2}\log 2 - \dfrac{3\mathrm{i}\pi}{4}$.

Propiedades:

i) Para todo $z \neq 0$, $\mathrm{e}^{\log_I z} = z$.

ii) $\log_I(\mathrm{e}^w) = w \mod 2\pi\mathrm{i}$. En particular, $\log_I(\mathrm{e}^w) = w \iff \operatorname{Im} w \in I$.

iii) $\log_I : \mathbb{C} - \{0\} \to \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} s \in I\}$ es biyectiva, siendo su inversa la función $\exp : \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} s \in I\} \to \mathbb{C} - \{0\}$ (donde $\exp(z) \equiv \mathrm{e}^z$).

iv) $z, w \neq 0 \implies \log_I(z \cdot w) = \log_I z + \log_I w \mod 2\pi\mathrm{i}$.

Demostración:

i) $z \neq 0 \implies \mathrm{e}^{\log_I z} = \mathrm{e}^{\log|z| + \mathrm{i}\arg_I z} = \mathrm{e}^{\log|z|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg_I z} = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg_I z} = z$.

ii) Si $w = u + \mathrm{i}v$ entonces

$$\log_I(\mathrm{e}^w) = \log(\mathrm{e}^u) + \mathrm{i}\arg_I(\mathrm{e}^w) = u + \mathrm{i}v \equiv w \mod 2\pi\mathrm{i}\,,$$

ya que $\arg_I(\mathrm{e}^w) = \operatorname{Im} w \mod 2\pi$. Por otra parte, del cálculo anterior se sigue que

$$\log_I(\mathrm{e}^w) = w \iff \arg_I(\mathrm{e}^w) = v \iff v \equiv \operatorname{Im} w \in I\,.$$

iii) Para establecer la biyectividad de $\log_I$, hay que probar que para todo w con $\operatorname{Im} w \in I$ existe un único $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ tal que $\log_I z = w$. Esto es cierto por los apartados anteriores, siendo $z = \mathrm{e}^w \equiv \exp(w)$.

iv) Las exponenciales de ambos miembros coinciden; por tanto, esta propiedad se sigue de la prop. ii). Otra forma de deducirla es observando que

$$\begin{aligned}\log_I(zw) &= \log|zw| + \mathrm{i}\arg_I(zw)\\ &= \log|z| + \log|w| + \mathrm{i}(\arg_I z + \arg_I w) \mod 2\pi\mathrm{i}\\ &= (\log|z| + \mathrm{i}\arg_I z) + (\log|w| + \mathrm{i}\arg_I w) \mod 2\pi\mathrm{i}\\ &\equiv \log_I z + \log_I w \mod 2\pi\mathrm{i}.\end{aligned}$$

Nota: En general, $\operatorname{Log}(zw) \neq \operatorname{Log} z + \operatorname{Log} w$. Por ejemplo,

$$\operatorname{Log}(-\mathrm{i}) = -\frac{\pi\mathrm{i}}{2} \neq \operatorname{Log}(-1) + \operatorname{Log}\mathrm{i} = \mathrm{i}\pi + \frac{\mathrm{i}\pi}{2} = \frac{3\pi\mathrm{i}}{2}.$$

1.3.4 Potencias complejas

Si $a, b \in \mathbb{C}$ y $a \neq 0, \mathrm{e}$, definimos

$$a^b = \mathrm{e}^{b\log a}, \quad \text{donde} \quad \log a = \log_I a + 2k\pi\mathrm{i}, \;\; k \in \mathbb{Z}.$$

Por tanto, en general a^b denota un *conjunto* de números complejos:

$$a^b = \mathrm{e}^{2kb\pi\mathrm{i}}\mathrm{e}^{b\log_I a}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Más concretamente, se tiene:

i) $b \in \mathbb{Z} \implies a^b$ tiene un valor *único*: $\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{b \text{ veces}}$ si $b > 0$, 1 si $b = 0$, $\underbrace{a^{-1} \cdot a^{-1} \cdot \cdots \cdot a^{-1}}_{-b \text{ veces}}$ si $b < 0$.

ii) Si $b = p/q \in \mathbb{Q}$, con $p \in \mathbb{Z}$ y $1 < q \in \mathbb{N}$ primos entre sí, entonces $a^b = a^{p/q}$ toma exactamente q valores (las q raíces q-ésimas de a^p).

iii) En los demás casos ($b \in \mathbb{C} - \mathbb{Q}$), a^b tiene infinitos valores que difieren entre sí en un factor de la forma $\mathrm{e}^{2kb\pi\mathrm{i}}$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Ejemplo:

$$\begin{aligned}(-1+\mathrm{i})^{\mathrm{i}} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}[\operatorname{Log}(-1+\mathrm{i})+2k\pi\mathrm{i}]} = \mathrm{e}^{-2k\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{1}{2}\log 2+\frac{3\pi\mathrm{i}}{4}\right)} \quad (k \in \mathbb{Z})\\ &= \mathrm{e}^{\frac{5\pi}{4}+2n\pi}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\log 2} \quad (n \in \mathbb{Z}).\end{aligned}$$

- Si $a \neq 0, e$, cada determinación de log define una *función* $a_I^z \equiv \mathrm{e}^{z\log_I a}$.

Ejercicio: dados $a, b \in \mathbb{C}$ con $a \neq 0, \mathrm{e}$, estudiar si se cumple la igualdad

$$a^{b+c} = a^b a^c.$$

1.4 Límites y continuidad

1.4.1 Conceptos topológicos básicos

i) Un **entorno** de $a \in \mathbb{C}$ es cualquier disco abierto de centro $a \in \mathbb{C}$ y radio $r > 0$

$$D(a;r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < r\}.$$

Denotaremos por $\overline{D}(a;r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| \leqslant r\}$ el correspondiente disco cerrado

ii) **Entorno perforado** de $a \in \mathbb{C} \equiv D(a;r) - \{a\} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-a| < r\}$.

iii) $A \subset \mathbb{C}$ es **abierto** si contiene un entorno de cada uno de sus puntos:

$$\forall a \in A,\ \exists r > 0 \quad \text{t.q.} \quad D(a;r) \subset A.$$

iv) $A \subset \mathbb{C}$ **cerrado** $\Longleftrightarrow \mathbb{C} - A$ es abierto.

v) $A \subset \mathbb{C}$ es **compacto** $\Longleftrightarrow$ A es cerrado y **acotado** (se dice que A es acotado si $\exists R > 0$ t.q. $A \subset D(0;R)$).

vi) $A \subset \mathbb{C}$ *abierto* es **conexo** si para todo par de puntos $z, w \in A$ hay una curva *continua* $\gamma : [0,1] \to A$ t.q. $\gamma(0) = z$, $\gamma(1) = w$. [*Nota:* de hecho, se puede demostrar que en la definición anterior se puede sustituir la palabra “continua” por “diferenciable”.]

vii) Una **región** ó **dominio** es un subconjunto abierto conexo y no vacío de $\mathbb{C}$.

1.4.2 Límites

Notación:

$$\begin{gathered} f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z = x + \mathrm{i}y \mapsto f(z) \equiv u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y). \end{gathered}$$

Nota: La notación $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *no* significa que f esté definida en todo $\mathbb{C}$.

- $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (la parte real e imaginaria de f, resp.) son funciones escalares *reales.*

Definición 1.9. Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ está definida en un entorno perforado de $a \in \mathbb{C}$ y $l \in \mathbb{C}$, diremos que $\lim_{z\to a} f(z) = l$ si

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \ \text{ t.q. } \ 0 < |z-a| < \delta \implies |f(z) - l| < \varepsilon.$$

Nota: al ser el módulo de un número complejo $w = u + \mathrm{i}v$ igual a la norma del vector $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, la definición anterior de límite coincide con la usual para una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Propiedades de los límites:

i) Si existe $\lim_{z\to a} f(z)$, dicho límite es único.

ii) $\lim_{z\to a} f(z) = l \Longleftrightarrow \lim_{(x,y)\to a} u(x,y) = \operatorname{Re} l$ y $\lim_{(x,y)\to a} v(x,y) = \operatorname{Im} l$.

iii) $\exists \lim_{z\to a} f(z), \lim_{z\to a} g(z) \implies \lim_{z\to a} [f(z) + g(z)] = \lim_{z\to a} f(z) + \lim_{z\to a} g(z)$.

iv) $\exists \lim_{z\to a} f(z), \lim_{z\to a} g(z) \implies \lim_{z\to a} [f(z)g(z)] = \lim_{z\to a} f(z) \cdot \lim_{z\to a} g(z)$.

v) $\lim_{z\to a} g(z) \neq 0 \implies \lim_{z\to a} \dfrac{1}{g(z)} = \dfrac{1}{\lim_{z\to a} g(z)}$.

Demostración:
i)–iii) son propiedades conocidas de los límites de funciones $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
iv)–v) se demuestran como en el caso real, reemplazando el valor absoluto por el módulo.

1.4.3 Continuidad

Definición 1.10. Sean $a \in \mathbb{C}$ y $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida en un entorno de a. Diremos que f es **continua** en $a \in A$ si

$$\lim_{z \to a} f(z) = f(a)\,.$$

Diremos que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es continua en $A \subset \mathbb{C}$ si y sólo si f es continua en todos los puntos de A.

Propiedades:

i) f y g continuas en $a \implies f + g$ y fg continuas en a.

ii) Si, además, $g(a) \neq 0$, entonces f/g es continua en a.

iii) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua en a y $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua en $f(a) \implies h \circ f$ continua en a.

Demostración:

i)–ii) son consecuencia inmediata de las propiedades de los límites iii)–v), mientras que iii) se demuestra como en el caso de funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Ejemplo: los *polinomios* y las *funciones racionales* son funciones continuas en todos los puntos de su dominio.

1.5 Derivabilidad

Definición 1.11.

- $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida en un *entorno* de $a \in \mathbb{C}$ es **derivable** en a si existe
$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \equiv f'(a).$$
- $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es **analítica** (u **holomorfa**) en un *abierto* A si es derivable en todos los puntos de A.
- f es analítica en un conjunto *arbitrario* B si es analítica en un abierto $A \supset B$ o, equivalentemente, si es analítica en un entorno de cada punto de B.

En particular, f es analítica en un punto $a \in \mathbb{C}$ si es derivable en un *entorno* de a. (Nótese que f *analítica en* a es por tanto más fuerte que f *derivable en* a.)

Proposición 1.12. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *derivable en* $a \in A \implies f$ *continua en* a.

Demostración. En efecto,

$$\lim_{z \to a} [f(z) - f(a)] = \lim_{z \to a} \left[\frac{f(z) - f(a)}{z - a} \cdot (z - a) \right] = \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \cdot \lim_{z \to a} (z - a) = f'(a) \cdot 0 = 0.$$

Q.E.D.

Propiedades algebraicas:

Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ son derivables en $z \in \mathbb{C}$, y $a, b \in \mathbb{C}$, se tiene:

i) $af + bg$ es derivable en z, siendo $(af + bg)'(z) = af'(z) + bg'(z)$.

ii) fg es derivable en z, siendo $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$ (*regla de Leibniz*).

iii) Si $g(z) \neq 0$, f/g es derivable en z, siendo
$$(f/g)'(z) = \frac{g(z)f'(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}.$$

Ejemplo: los polinomios y las funciones racionales son derivables en todos los puntos de su dominio, y sus derivadas se calculan como en el caso real.

1.5.1 Ecuaciones de Cauchy–Riemann

- Si $a = a_1 + \mathrm{i}a_2 \in \mathbb{C}$, denotaremos por $M_a : \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por
$$M_a \cdot z = a\,z\,, \qquad \forall z \in \mathbb{C}\,.$$
La matriz de M_a en la base canónica $\{1, \mathrm{i}\}$ de $\mathbb{R}^2$ es $\begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}$.

- Recordemos que una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida en un entorno de $z_0 \in \mathbb{C}$ es diferenciable *en sentido real* en z_0 si existe una *aplicación lineal* $Df(z_0) : \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ tal que
$$\lim_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0) - Df(z_0) \cdot (z - z_0)|}{|z - z_0|} = 0.$$
(Nótese de nuevo que el *módulo* de $z = x + \mathrm{i}\,y \in \mathbb{C}$ es la *norma* del correspondiente vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.) A la aplicación $Df(z_0)$ se le denomina *derivada en sentido real* de f en z_0. La matriz de $Df(z_0)$ en la base canónica de $\mathbb{R}^2$, llamada la *matriz jacobiana* de f en z_0, está dada por
$$Jf(z_0) = \begin{pmatrix} u_x(z_0) & u_y(z_0) \\ v_x(z_0) & v_y(z_0) \end{pmatrix},$$
donde hemos utilizado la notación habitual $u_x \equiv \dfrac{\partial u}{\partial x}$, y análogamente u_y, v_x, v_y.

Teorema 1.13. *Sea $f = u + \mathrm{i}\,v : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida en un entorno de $z_0 = x_0 + \mathrm{i}\,y_0 \in \mathbb{C}$. Entonces f es derivable (en sentido complejo) en z_0* si y sólo si *se cumplen las* dos *condiciones siguientes:*

i) *f es diferenciable* en sentido real *en* (x_0, y_0).

ii) *Se verifican las* **ecuaciones de Cauchy–Riemann**
$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Demostración.
$\Longrightarrow$) f es diferenciable (en sentido real) en $z_0 = (x_0, y_0)$ con derivada $Df(z_0) = M_{f'(z_0)}$, ya que
$$\lim_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)|}{|z - z_0|} = \lim_{z \to z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{z - z_0} \right|$$
$$= \lim_{z \to z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| = 0\,.$$

Denotemos abreviadamente $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)$ por u_x, y análogamente para las demás derivadas parciales de u y v en (x_0, y_0). Igualando la matriz de $Df(z_0)$ en la base canónica de $\mathbb{R}^2$ —es decir, la matriz jacobiana $Jf(z_0)$— con la de $M_{f'(z_0)}$ se obtiene
$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f'(z_0) & -\operatorname{Im} f'(z_0) \\ \operatorname{Im} f'(z_0) & \operatorname{Re} f'(z_0) \end{pmatrix},$$
de donde se deducen las ecs. de Cauchy–Riemann, junto con las relaciones
$$f'(z_0) = u_x + \mathrm{i}v_x = \frac{1}{\mathrm{i}}(u_y + \mathrm{i}v_y).$$

$\Longleftarrow$) Por las ecs. de Cauchy–Riemann, la matriz jacobiana de f en z_0 es de la forma

$$\begin{pmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{pmatrix},$$

y por tanto dicha matriz es igual a la del operador lineal M_c, con $c \equiv u_x + \mathrm{i} v_x$. De esto se sigue que $Df(z_0) = M_c$, es decir $Df(z_0) \cdot (z - z_0) = c(z - z_0)$, y por tanto

$$0 = \lim_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0) - c(z - z_0)|}{|z - z_0|} = \lim_{z \to z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - c \right| \Longleftrightarrow \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = c\,.$$

Esto demuestra que f es derivable (en sentido complejo) en z_0, siendo

$$f'(z_0) = c \equiv u_x + \mathrm{i} v_x = \frac{1}{\mathrm{i}}(u_y + \mathrm{i} v_y),$$

donde la última igualdad es consecuencia de las ecuaciones de Cauchy–Riemann. *Q.E.D.*

• De la demostración del teorema se sigue que si $f = u + \mathrm{i} v$ es derivable en sentido complejo en $z_0 = x_0 + \mathrm{i} y_0$ entonces

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= u_x(x_0, y_0) + \mathrm{i} v_x(x_0, y_0) \equiv \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \\ &= \frac{1}{\mathrm{i}}\big(u_y(x_0, y_0) + \mathrm{i} v_y(x_0, y_0)\big) \equiv \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\partial f}{\partial y}(z_0). \end{aligned}$$

Estas igualdades se deducen también fácilmente de la definición de derivada 1.11 (ejercicio). Nótese también que las ecuaciones de Cauchy–Riemann son equivalentes a la relación

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\partial f}{\partial y}(z_0).$$

• El teorema anterior puede formularse también de la siguiente forma alternativa:

Teorema 1.14. *$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida en un entorno de $z_0 = x_0 + \mathrm{i} y_0 \in \mathbb{C}$ es derivable en z_0 si y sólo si se cumplen las dos condiciones siguientes:*

i) f es diferenciable en sentido real en (x_0, y_0)

ii) Existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $Df(x_0, y_0) = M_c$.

Además, si se cumplen las condiciones anteriores entonces $f'(z_0) = c$.

Derivabilidad de la función exponencial:

$f(z) = \mathrm{e}^z \implies u(x, y) = \mathrm{e}^x \cos y,\ v(x, y) = \mathrm{e}^x \operatorname{sen} y \implies u$ y v de clase C^∞ en $\mathbb{R}^2 \implies$ f diferenciable en sentido real en todo $\mathbb{R}^2$. Además,

$$u_x = \mathrm{e}^x \cos y = v_y, \quad u_y = -\mathrm{e}^x \operatorname{sen} y = -v_x.$$

Por tanto, e^z es derivable (en sentido complejo) en $\mathbb{C}$, siendo

$$(\mathrm{e}^z)' = u_x + \mathrm{i} v_x = \mathrm{e}^x \cos y + \mathrm{i} \mathrm{e}^x \operatorname{sen} y = \mathrm{e}^z, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Una consecuencia inmediata del Teorema 1.13 es la siguiente

Proposición 1.15. *Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es analítica en una* región *A, y $f'(z) = 0$ para todo $z \in A$, entonces f es constante en A.*

Demostración. En efecto, f derivable en sentido complejo en $z \in A$ implica que f es derivable en sentido real en dicho punto, siendo $Df(z) = M_{f'(z)} = 0$. El resultado anterior se sigue entonces de su análogo para funciones $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. *Q.E.D.*

1.5.2 Regla de la cadena

Proposición 1.16. *Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es derivable en z y $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es derivable en $f(z)$, entonces $g \circ f$ es derivable en z, y se tiene*

$$(g \circ f)'(z) = g'\big(f(z)\big) \cdot f'(z). \tag{1.2}$$

Demostración. En efecto, utilizando la continuidad de f en z y el hecho de que g está definida en un entorno de $f(z)$ (por ser derivable en dicho punto), es fácil ver que $g \circ f$ está definida en un entorno de z. Además, por el teorema anterior f y g son derivables en sentido real en z y $f(z)$, resp., siendo

$$Df(z) = M_{f'(z)}\,, \qquad Dg\big(f(z)\big) = M_{g'(f(z))}\,.$$

Por la regla de la cadena para funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, $g \circ f$ es derivable en sentido real en z, y se tiene:

$$D(g \circ f)(z) = Dg\big(f(z)\big) \cdot Df(z) = M_{g'(f(z))} \cdot M_{f'(z)} = M_{g'(f(z))f'(z)}\,,$$

que implica (1.2) por el Teorema 1.14. *Q.E.D.*

Derivabilidad de las funciones trigonométricas e hiperbólicas:

De las propiedades de la derivada compleja (linealidad y regla de la cadena) y la derivabilidad de la función exponencial $f(z) = \mathrm{e}^z$ se sigue que sen y cos son derivables en $\mathbb{C}$, siendo

$$(\operatorname{sen} z)' = \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} = \cos z, \quad (\cos z)' = \frac{1}{2}(\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}) = -\operatorname{sen} z.$$

De estas fórmulas se deduce la derivabilidad de las restantes funciones trigonométricas en todos los puntos de sus dominios. Por ejemplo,

$$(\tan z)' = \frac{\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z}{\cos^2 z} = \sec^2 z, \quad \forall z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Al igual que en el caso real, la derivabilidad de la exponencial junto con la regla de la cadena proporciona inmediatamente la derivabilidad de las funciones senh y cosh, junto con las fórmulas usuales para derivar dichas funciones:

$$(\operatorname{senh} z)' = \cosh z\,, \qquad (\cosh z)' = \operatorname{senh} z\,,$$

De nuevo, de estas fórmulas se deduce la derivabilidad de las restantes funciones hiperbólicas en todos los puntos de sus dominios. Por ejemplo,

$$(\tanh z)' = \frac{\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z}{\cosh^2 z} = \operatorname{sech}^2 z, \quad \forall z \neq \frac{\mathrm{i}\pi}{2} + k\pi\mathrm{i} \ \ (k \in \mathbb{Z}).$$

1.5.3 Teorema de la función inversa

Teorema 1.17. *Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica en el abierto A (con f' continua[1] en A). Si $a \in A$ y $f'(a) \neq 0$, existen sendos abiertos $U \ni a$ y $V \ni f(a)$ tales que $U \subset A$, f' no se anula en U y $f : U \to V$ es biyectiva. Además, $f^{-1} : V \to U$ es analítica en V, siendo*

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(w)\big)}, \quad \forall w \in V.$$

[1] Veremos más adelante (Sección 2.3.3) que si f es analítica en A entonces f' es automáticamente continua en A.

Demostración. f es derivable en sentido real en todo $z \in A$, y su matriz jacobiana

$$Jf(z) = \begin{pmatrix} u_x(z) & -v_x(z) \\ v_x(z) & u_x(z) \end{pmatrix}$$

tiene determinante $u_x^2(z) + v_x^2(z) = |f'(z)|^2$. En particular, de esto se sigue que $\det Df(a) = |f'(a)|^2 \neq 0$. Por el teorema de la función inversa para funciones $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (nótese que la continuidad de f' implica la continuidad de las derivadas parciales de u y v), hay sendos abiertos $U \ni a$ y $V \ni f(a)$ tales que $U \subset A$, $f : U \to V$ es biyectiva, Df es invertible en U y $f^{-1} : V \to U$ es diferenciable en sentido real en V, con

$$D(f^{-1})(w) = \left[Df\left(f^{-1}(w)\right)\right]^{-1}, \quad \forall w \in V.$$

Nótese que f' no se anula en U, al ser $|f'(z)|^2 = \det Df(z)$. Llamando $z = f^{-1}(w)$ se tiene, por el Teorema 1.14:

$$D(f^{-1})(w) = [Df(z)]^{-1} = M_{f'(z)}^{-1} = M_{1/f'(z)}\,.$$

De nuevo por el Teorema 1.14, de esto se deduce que f^{-1} es derivable en sentido complejo en w, con derivada $1/f'(z)$. *Q.E.D.*

Derivabilidad de $\log_I$*:*

- $\operatorname{Log} : \mathbb{C} - \{0\} \to \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Im} z \leqslant \pi\}$ es discontinua en $\mathbb{R}_- \cup \{0\}$ (por la discontinuidad de Arg), y por tanto *no* es derivable en dicho conjunto.

- Sin embargo, Log es derivable en el abierto $B = \mathbb{C} - (\mathbb{R}_- \cup \{0\})$. En efecto, Log es la inversa *global* de

$$\exp : A = \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\} \to B,$$

  y exp satisface las condiciones del teorema de la función inversa en todo punto de A ($\exp' = \exp$ no se anula y es continua en A).

- Si $z \in A$ y $w = e^z \in B$, hay dos abiertos $U \ni z$ y $V \ni w$ tales que $\exp : U \subset A \to V$ es invertible en U, y

$$(\exp^{-1})'(w) = \frac{1}{\exp'(z)} = \frac{1}{e^z} = \frac{1}{w}.$$

  Al ser $U \subset A$ se tiene $\exp^{-1} = \operatorname{Log}$, y por tanto

$$(\operatorname{Log} w)' = \frac{1}{w}, \quad \forall w \in \mathbb{C} - (\mathbb{R}_- \cup \{0\}).$$

  Del mismo modo se prueba la derivabilidad de $\log_I$ (con $I = [y_0, y_0 + 2\pi)$ ó $(y_0, y_0 + 2\pi]$) en el abierto $\mathbb{C} - (\{w \mid \arg w = y_0 \mod 2\pi\} \cup \{0\})$, siendo de nuevo $\log_I'(w) = 1/w$.

1.5.4 Funciones armónicas

Definición 1.18. Una función $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es **armónica** en el abierto $A \subset \mathbb{R}^2$ si $u \in C^2(A)$, y se cumple

$$\nabla^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ en } A.$$

Proposición 1.19. *Si $f : A \to \mathbb{C}$ es analítica en el abierto A entonces $u = \operatorname{Re} f$ y $v = \operatorname{Im} f$ son armónicas en A. (Se dice entonces que u y v son funciones* **armónicas conjugadas** *en A).*

Demostración. En efecto, veremos más adelante (Sección 2.3.3) que f analítica en $A \implies u, v \in C^\infty(A)$. De las ecuaciones de Cauchy–Riemann se sigue entonces que

$$u_{xx} = \frac{\partial v_y}{\partial x} = v_{yx} = v_{xy} = -\frac{\partial u_y}{\partial y} = -u_{yy},$$

y análogamente para v. (Nótese que $v_{xy} = v_{yx}$, por ser v de clase $C^2(A)$.) *Q.E.D.*

Proposición 1.20. *Si $u : \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ es armónica en el abierto A, $z_0 \in A$ y $U \subset A$ es un entorno de z_0, hay una función $f : U \to \mathbb{C}$ analítica en U tal que* $\operatorname{Re} f = u$.

Demostración. En efecto, si $z = x + \mathrm{i}y \in U$ entonces $v = \operatorname{Im} f$ debería cumplir:

$$\begin{aligned}
&v_y = u_x \implies v(x,y) = \int_{y_0}^{y} u_x(x,t)\,dt + h(x);\\
&v_x(x,y) = \int_{y_0}^{y} u_{xx}(x,t)\,dt + h'(x) = -\int_{y_0}^{y} u_{yy}(x,t)\,dt + h'(x)\\
&\quad = -u_y(x,y) + u_y(x,y_0) + h'(x) = -u_y(x,y) \iff h'(x) = -u_y(x,y_0)\\
&\quad \implies h(x) = -\int_{x_0}^{x} u_y(t,y_0)\,dt + c \qquad (c \in \mathbb{R})\\
&\quad \implies v(x,y) = \int_{y_0}^{y} u_x(x,t)\,dt - \int_{x_0}^{x} u_y(t,y_0)\,dt + c\,, \qquad \forall (x,y) \in U\,.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Si v está dada por la fórmula anterior $f = u + \mathrm{i}v$ cumple las ecuaciones de Cauchy–Riemann en U y es diferenciable en sentido real en U (al ser u, y por tanto v, de clase C^2 en dicho conjunto) $\implies f$ es analítica en U.

Q.E.D.

Comentarios

- La proposición anterior garantiza la existencia de una *armónica conjugada de u* en cualquier disco abierto contenido en A (aunque no necesariamente en todo A, como veremos a continuación).

- En una *región*, la armónica conjugada v (si existe) está determinada a menos de una constante. En efecto, si v_1 y v_2 son armónicas conjugadas de la misma función armónica u en la región A, las funciones $f_1 = u + \mathrm{i}v_1$ y $f_2 = u + \mathrm{i}v_2$ son analíticas en A, por lo que $f = f_1 - f_2 = \mathrm{i}(v_1 - v_2)$ también es analítica en A. Al ser $\operatorname{Re} f = 0$ en A, las ecuaciones de Cauchy–Riemann implican que las derivadas parciales de $\operatorname{Im} f$ se anulan en A. Por ser A una región, $\operatorname{Im} f = v_1 - v_2$ ha de ser constante en A.

- Podemos reescribir la fórmula (1.3) para la armónica conjugada v como

  $$v(z) = \int_{\gamma_0} (u_x\,\mathrm{d}y - u_y\,\mathrm{d}x) + c \equiv \int_{\gamma_0} (-u_y, u_x)\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + c\,, \qquad \forall z \in U\,,$$

  donde $\mathrm{d}\mathbf{r} \equiv (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$ y γ_0 es la línea quebrada formada por el segmento horizontal que une $z_0 \equiv x_0 + \mathrm{i}y_0$ con $x + \mathrm{i}y_0$ y el segmento vertical que une este último punto con $z \equiv x + \mathrm{i}y$. Como el campo vectorial $(-u_y, u_x)$ es *conservativo* (al ser u armónica), esta integral de línea es *independiente del camino,* por lo que también podemos escribir

  $$v(z) = \int_{\gamma} (u_x\,\mathrm{d}y - u_y\,\mathrm{d}x) + c\,, \qquad \forall z \in U\,,$$

  donde γ es *cualquier* curva (diferenciable) contenida en U que une z_0 con z.

- La existencia de armónica conjugada de una función armónica en un abierto A no está asegurada *globalmente* en A. Consideremos, por ejemplo, la función $u : A = \mathbb{R}^2 - \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $u(x, y) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$. Si U es un disco abierto cualquiera contenido en A entonces la función $\log_I z = \log |z| + \mathrm{i} \arg_I z$ es analítica en U, si escogemos la determinación I de forma que la semirrecta en que $\arg_I$ es discontinuo no corte a U. Por tanto $\operatorname{Re} f = u$ es armónica en U, y $v = \arg_I z + c$ (con $c \in \mathbb{R}$) es una armónica conjugada de u en U. Esto prueba, en particular, que u es armónica en todo A, como se puede comprobar fácilmente calculando sus derivadas parciales.

  Veamos ahora que u *no* admite una armónica conjugada definida en todo A. En efecto, si existiera f analítica en A con $\operatorname{Re} f = u$ entonces f y Log (p. ej.) diferirían en una constante (imaginaria pura) en la región $B = \mathbb{C} - (\mathbb{R}_- \cup \{0\}) \subset A$ (ya que Log es analítica en B, y $\operatorname{Re} \operatorname{Log} z = u(z)$). Pero esto es imposible, ya que si $x < 0$ se tendría (al ser f continua en A y $f = \operatorname{Log} + c$ en B)

  $$2\pi \mathrm{i} = \lim_{y \to 0+} \big[\operatorname{Log}(x + \mathrm{i}y) - \operatorname{Log}(x - \mathrm{i}y)\big] = \lim_{y \to 0+} \big[f(x + \mathrm{i}y) - f(x - \mathrm{i}y)\big] = f(x) - f(x) = 0\,.$$

Capítulo 2

El teorema de Cauchy

2.1 Integración sobre arcos

- Si $h_1, h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son integrables (por ej., continuas) en $[a,b] \subset \mathbb{R}$ y $h = h_1 + \mathrm{i}h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, definimos
$$\int_a^b h \equiv \int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b h_1(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^b h_2(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{C}.$$
Ejemplo: $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \cos t\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} t\,\mathrm{d}t = 2\mathrm{i}.$

- Un **arco continuo** (ó **curva continua**) es una aplicación $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ continua en $[a,b]$ (i.e., $\operatorname{Re}\gamma$ e $\operatorname{Im}\gamma$ son continuas en $[a,b]$).

- El arco continuo γ es **C^1 a trozos** si existe una subdivisión *finita* $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$ de $[a,b]$ tal que γ' existe y es continua en cada subintervalo $[a_{i-1}, a_i]$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.
En otras palabras, γ es continua en $[a,b]$ y C^1 en $[a,b] - \{a_0, \ldots, a_n\}$, y existen $\lim_{t\to a+} \gamma'(t)$, $\lim_{t\to b-} \gamma'(t)$ y $\lim_{t\to a_i\pm} \gamma'(t)$ para $i = 1, \ldots, n-1$, aunque los límites por la izquierda y por la derecha en a_i no coincidan.

- Si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es un arco de clase C^1 a trozos, $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es continua en el abierto A y $\gamma([a,b]) \subset A$, definimos
$$\int_\gamma f \equiv \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{C}.$$
Nótese que $f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)$ es continua en cada uno de los subintervalos $[a_i, a_{i-1}]$, por lo que cada una de las integrales que aparecen en la fórmula anterior tiene sentido.

- Si $f = u + \mathrm{i}v$ y $\gamma(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$, entonces (suponiendo por sencillez que γ es C^1 en $[a,b]$)
$$\begin{aligned}\int_\gamma f &= \int_a^b \big[u\big(x(t),y(t)\big) + \mathrm{i}v\big(x(t),y(t)\big)\big]\big[x'(t) + \mathrm{i}y'(t)\big]\,\mathrm{d}t\\ &= \int_a^b \big[u\big(x(t),y(t)\big)\,x'(t) - v\big(x(t),y(t)\big)\,y'(t)\big]\,\mathrm{d}t\\ &\quad + \mathrm{i}\int_a^b \big[u\big(x(t),y(t)\big)\,y'(t) + v\big(x(t),y(t)\big)\,x'(t)\big]\,\mathrm{d}t\\ &= \int_\gamma (u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y) + \mathrm{i}\int_\gamma (v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y).\end{aligned}$$

2.1.1 Propiedades de $\int_\gamma f$

Linealidad. Para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ se cumple

$$\int_\gamma (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_\gamma f + \mu \int_\gamma g.$$

Cadenas. Si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es una curva C^1 a trozos, se define la curva C^1 a trozos $-\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ mediante

$$(-\gamma)(t) = \gamma(a+b-t), \qquad \forall t \in [a,b].$$

En otras palabras, $-\gamma$ difiere de γ únicamente en el *sentido* en que está recorrida. Si $\gamma([a,b]) \subset A$ abierto y $f : A \to \mathbb{C}$ es continua en A se cumple

$$\int_{-\gamma} f = \int_a^b f\big(\gamma(a+b-t)\big)\big(-\gamma'(a+b-t)\big)\,\mathrm{d}t \overset{s=a+b-t}{=} \int_b^a f\big(\gamma(s)\big)\gamma'(s)\,\mathrm{d}s \tag{2.1}$$

$$= -\int_a^b f\big(\gamma(s)\big)\gamma'(s)\,\mathrm{d}s = -\int_\gamma f. \tag{2.2}$$

Si $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ y $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{C}$ son curvas C^1 a trozos con $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$, definimos la curva C^1 a trozos $\gamma_1 + \gamma_2 : [a, b+d-c] \to \mathbb{C}$ mediante

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a,b] \\ \gamma_2(c-b+t), & t \in [b, b+d-c]. \end{cases}$$

De forma análoga se define la curva C^1 a trozos $\gamma_1 + \cdots + \gamma_n$, si el extremo final de cada curva γ_i coincide con el inicial de la curva siguiente γ_{i+1}. Del mismo modo, si γ_1 y γ_2 son curvas C^1 a trozos tales que el extremo final de γ_1 coincide con el de γ_2, se define $\gamma_1 - \gamma_2 = \gamma_1 + (-\gamma_2)$. Si $\gamma_1([a,b]), \gamma_2([c,d]) \subset A$ abierto, y $f : A \to \mathbb{C}$ es continua en A, se tiene

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f.$$

Análogamente,

$$\int_{\gamma_1+\cdots+\gamma_n} f = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f.$$

Combinando este resultado con la ecuación (2.1) se obtiene la expresión más general

$$\int_{\varepsilon_1\gamma_1+\cdots+\varepsilon_n\gamma_n} f = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \int_{\gamma_i} f\,,$$

donde $\varepsilon_i = \pm 1$ para cada i, y se supone que el extremo final de $\varepsilon_i\gamma_i$ coincide con el inicial de $\varepsilon_{i+1}\gamma_{i+1}$. A la expresión $\varepsilon_1\gamma_1 + \cdots + \varepsilon_n\gamma_n$ se le denomina **cadena**.

Invariancia bajo reparametrizaciones. Si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es C^1 a trozos, una **reparametrización** de γ es una curva $\tilde{\gamma} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \to \mathbb{C}$ de la forma $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi$, siendo $\phi : [\tilde{a}, \tilde{b}] \to \phi([\tilde{a}, \tilde{b}]) = [a,b]$ una aplicación de clase C^1 en $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ con derivada *positiva* en $[\tilde{a}, \tilde{b}]$.

Nótese que, al ser $\phi' > 0$ en $[\tilde{a}, \tilde{b}]$, ϕ es una función *creciente* en $[\tilde{a}, \tilde{b}]$, y por tanto (al ser ϕ suprayectiva por hipótesis) $\phi(\tilde{a}) = a$, $\phi(\tilde{b}) = b$. Evidentemente, si el arco γ es C^1 a trozos también lo es $\tilde{\gamma}$, y $\gamma([a,b]) = \tilde{\gamma}([\tilde{a}, \tilde{b}])$ (es decir, γ y $\tilde{\gamma}$ tienen la misma imagen). Obsérvese, por último, que el teorema de la función inversa implica que $\phi^{-1} : [a,b] \to [\tilde{a}, \tilde{b}]$ es de clase C^1 con derivada positiva en $[a,b]$, y por tanto $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \phi^{-1}$ es una reparametrización de $\tilde{\gamma}$.

Ejemplo: $\tilde{\gamma}(s) = e^{is}$ $\left(s \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]\right)$ es una reparametrización de $\gamma(t) = -t + i\sqrt{1-t^2}$ $\left(t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right)$. En efecto, $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(-\cos s)$, siendo en este caso $\phi(s) = -\cos s$ de clase C^1 y $\phi'(s) = \operatorname{sen} s > 0$ en $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

Proposición 2.1. *Si $\tilde{\gamma} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \to \mathbb{C}$ es una reparametrización de $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\gamma([a,b]) \subset A$, y $f : A \to \mathbb{C}$ es continua en el abierto A, se cumple:*

$$\int_{\tilde{\gamma}} f = \int_{\gamma} f.$$

Demostración. Supongamos por sencillez que γ es de clase C^1 en $[a,b]$, y sea $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi$ con $\phi : [\tilde{a}, \tilde{b}] \to [a,b]$. Entonces se tiene:

$$\int_{\tilde{\gamma}} f = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f\big(\tilde{\gamma}(s)\big)\tilde{\gamma}'(s)\,\mathrm{d}s = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f\big(\gamma(\phi(s))\big)\gamma'\big(\phi(s)\big)\phi'(s)\,\mathrm{d}s \overset{t=\phi(s)}{=} \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\gamma} f.$$

Q.E.D.

2.1.2 Integral respecto de la longitud de arco

Si $f : A \to \mathbb{C}$ es continua en al abierto A, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es C^1 a trozos y $\gamma([a,b]) \subset A$, se define

$$\int_{\gamma} f(z)\ |\mathrm{d}z| = \int_a^b f\big((\gamma(t)\big)\,\big|\gamma'(t)\big|\ \mathrm{d}t.$$

Nótese que si $\gamma(t) = x(t) + i y(t)$ entonces $|\gamma'(t)|\ \mathrm{d}t = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\ \mathrm{d}t$ es el elemento de longitud de arco $\mathrm{d}s$ a lo largo de la curva γ. Por tanto si $f = u + i v$ entonces

$$\int_{\gamma} f(z)\ |\mathrm{d}z| = \int_{\gamma} u\,\mathrm{d}s + i\int_{\gamma} v\,\mathrm{d}s\,.$$

En particular,

$$\int_{\gamma} |\mathrm{d}z| = \int_{\gamma} \mathrm{d}s = l(\gamma) \equiv \textit{longitud de } \gamma.$$

Propiedades:

i) $\displaystyle\int_{\gamma} \big(\lambda f(z) + \mu g(z)\big)\ |\mathrm{d}z| = \lambda \int_{\gamma} f(z)\ |\mathrm{d}z| + \mu \int_{\gamma} (z)\ |\mathrm{d}z|\,, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$

ii) $\displaystyle\int_{-\gamma} f(z)\ |\mathrm{d}z| = \int_{\gamma} f(z)\ |\mathrm{d}z|.$

iii) $\displaystyle\int_{\varepsilon_1\gamma_1+\cdots+\varepsilon_n\gamma_n} f(z)\ |\mathrm{d}z| = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f(z)\ |\mathrm{d}z|.$

iv) Si $\tilde{\gamma}$ es una reparametrización de γ, entonces $\displaystyle\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\ |\mathrm{d}z| = \int_{\gamma} f(z)\ |\mathrm{d}z|.$

Desigualdad fundamental: $\displaystyle\left|\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_{\gamma} |f(z)|\,|\mathrm{d}z|.$

En particular, si $\displaystyle\max_{t\in[a,b]} \big|f\big(\gamma(t)\big)\big| = M$ entonces

$$\left|\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant M\,l(\gamma).$$

En efecto, la segundad desigualdad es consecuencia de la primera (por las propiedades de la integral de funciones reales de una variable real). Si $\int_\gamma f = 0$, la primera desigualdad se cumple trivialmente. En caso contrario, llamando $\theta = \operatorname{Arg}(\int_\gamma f)$ se tiene:

$$\left|\int_\gamma f\right| = \operatorname{Re}\left[e^{-i\theta}\int_\gamma f\right] = \int_a^b \operatorname{Re}\left[e^{-i\theta} f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\right] dt \leqslant \left|\int_a^b \operatorname{Re}\left[e^{-i\theta} f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\right] dt\right|$$
$$\leqslant \int_a^b \left|\operatorname{Re}\left[e^{-i\theta} f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\right]\right| dt \leqslant \int_a^b \left|f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\right| dt = \int_\gamma |f(z)|\,|dz|\,.$$

2.1.3 Teorema fundamental del Cálculo. Independencia del camino

Lema 2.2. *Si $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es derivable en $t \in \mathbb{R}$ (es decir, si $\operatorname{Re}\gamma, \operatorname{Im}\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son derivables en t) y $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es derivable en $\gamma(t)$, entonces $f \circ \gamma$ es derivable en t, con derivada*

$$(f \circ \gamma)'(t) = f'\big(\gamma(t)\big)\,\gamma'(t)\,.$$

Demostración. Por el Teorema 1.13, la función $f : \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ es diferenciable en sentido real en $\gamma(t)$, siendo $Df\big(\gamma(t)\big) = M_{f'(\gamma(t))}$. La regla de la cadena para funciones $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ implica que la función compuesta $f \circ \gamma$ es derivable en t, con derivada

$$(f \circ \gamma)'(t) = Df\big(\gamma(t)\big)\,\gamma'(t) = M_{f'(\gamma(t))}\,\gamma'(t) \equiv f'\big(\gamma(t)\big)\,\gamma'(t)\,.$$

Q.E.D.

Teorema fundamental del Cálculo. *Sea $F : A \to \mathbb{C}$ analítica en el abierto A (con F' continua*[1] *en A). Si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es C^1 a trozos y $\gamma([a,b]) \subset A$ entonces se cumple:*

$$\int_\gamma F' = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big).$$

En particular, si γ es **cerrada** *(i.e., $\gamma(b) = \gamma(a)$) se tiene*

$$\int_\gamma F' = 0.$$

Demostración.

$$\int_\gamma F' = \int_a^b F'\big(\gamma(t)\big)\,\gamma'(t)\,dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t)\,dt = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big),$$

por el teorema fundamental del Cálculo para funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Q.E.D.*

Independencia del camino. *Si $f : A \to \mathbb{C}$ es continua en una* región *A, las siguientes afirmaciones son* equivalentes*:*

i) *$\int_\gamma f$ es* **independiente del camino***: $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$ para todo par de curvas C^1 a trozos γ_1 y γ_2 contenidas en A que unen cualquier punto $z_1 \in A$ con cualquier otro punto $z_2 \in A$.*

ii) *$\int_\Gamma f = 0$ para toda curva* cerrada *C^1 a trozos Γ contenida en A.*

iii) *f admite una* **antiderivada** *(ó* **primitiva***) en A, es decir, existe $F : A \to \mathbb{C}$ analítica en A y tal que $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in A$.*

[1] Veremos más adelante (Sección 2.3.3) que si F es analítica en A entonces F' es automáticamente continua en dicho conjunto.

Demostración.

ii) $\Longrightarrow$ i) Si γ_1 y γ_2 son dos curvas C^1 a trozos contenidas en A que unen $z_1 \in A$ con $z_2 \in A$ entonces $\Gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ es una curva cerrada, y por tanto

$$\int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_2} f = \int_{\gamma_1 - \gamma_2} f = \int_{\Gamma} f = 0\,.$$

i) $\Longrightarrow$ ii) Sea Γ una curva cerrada C^1 a trozos contenida en A. Si Γ se reduce a un punto $z_0 \in A$ (es decir, si $\Gamma(t) = z_0$ para todo $t \in [a, b]$), la integral $\int_\Gamma f$ es claramente nula, ya que $\Gamma'(t) = 0$. En caso contrario, podemos escoger dos puntos $z_1 \neq z_2 \in \Gamma\big([a, b]\big)$ y escribir $\Gamma = \gamma_1 - \gamma_2$, siendo γ_1 y γ_2 curvas contenidas en A con extremos z_1 y z_2. Entonces

$$\int_{\Gamma} f = \int_{\gamma_1 - \gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_2} f = 0\,.$$

iii) $\Longrightarrow$i) Por el teorema fundamental del Cálculo (ya que $F' = f$ es continua por hipótesis).

i)$\Longrightarrow$iii) Fijemos (arbitrariamente) un punto $z_0 \in A$. Si z es un punto cualquiera de A, por ser A una *región* hay una curva (C^1 a trozos) γ contenida en A que une z_0 con z. Definimos entonces

$$F(z) = \int_\gamma f.$$

Nótese que, por hipótesis, F *no* depende de la curva $\gamma \subset A$ que utilicemos para unir z_0 con z.

Probemos finalmente que F es diferenciable en todo punto $z \in A$, con $F'(z) = f(z)$. Si $\varepsilon > 0$, al ser A abierto y f continua en A, existe $\delta > 0$ tal que $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$ si $\zeta \in D(z; \delta) \subset A$. Dado un punto cualquiera $w \in D(z; \delta)$ distinto de z, sea $L \subset D(z; \delta) \subset A$ el segmento que une z con w. Entonces se tiene:

$$F(w) - F(z) = \int_{\gamma + L} f - \int_\gamma f = \int_L f.$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo, $w - z = \int_L d\zeta$ (ya que $1 = \zeta'$), y por tanto $(w - z) f(z) = f(z) \int_L d\zeta = \int_L f(z)\, d\zeta$. Luego

$$\left|\frac{F(w) - F(z)}{w - z} - f(z)\right| = \frac{|F(w) - F(z) - (w - z) f(z)|}{|w - z|} = \frac{\left|\int_L f(\zeta)\, d\zeta - \int_L f(z)\, d\zeta\right|}{|w - z|}$$
$$= \frac{\left|\int_L [f(\zeta) - f(z)]\, d\zeta\right|}{|w - z|} \leqslant \frac{\varepsilon\, l(L)}{|w - z|} = \varepsilon.$$

Q.E.D.

2.2 Teorema de Cauchy–Goursat. Homotopía. Antiderivadas

- Una curva cerrada $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ es **simple** si $a < s < t < b \Longrightarrow \gamma(s) \neq \gamma(t)$.

Teorema de Cauchy (versión original). *Si γ es una curva cerrada simple C^1 a trozos y $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es analítica* con derivada continua *en γ y en el interior de γ, entonces* $\displaystyle\int_\gamma f = 0$.

Demostración. Por el teorema de Green (orientando la curva en sentido antihorario, de modo que el interior D de γ quede a la izquierda de γ), si $f = u + \mathrm{i} v$ se tiene

$$\int_\gamma f \,\mathrm{d}z = \int_\gamma (u \,\mathrm{d}x - v \,\mathrm{d}y) + \mathrm{i} \int_\gamma (u \,\mathrm{d}y + v \,\mathrm{d}x) = -\int_D (u_y + v_x) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y + \mathrm{i} \int_D (u_x - v_y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = 0,$$

en virtud de las ecuaciones de Cauchy–Riemann. *Q.E.D.*

- Este resultado es insuficiente, ya que no hace falta suponer que f' sea *continua* (probaremos que esta hipótesis se deduce de la *analiticidad* de f). Además, el resultado es válido para curvas mucho más generales que las cerradas simples.

Teorema de Cauchy–Goursat para un rectángulo. *Sea R un rectángulo* cerrado *con los lados paralelos a los ejes, y sea ∂R la frontera de R. Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es analítica en R se cumple:*

$$\int_{\partial R} f = 0.$$

Demostración. Orientemos ∂R en sentido antihorario (obviamente, el resultado es independiente de la orientación de ∂R). Si dividimos R en cuatro subrectángulos congruentes $R^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, 4)$ (también orientados en sentido antihorario) entonces

$$\int_{\partial R} f = \sum_{i=1}^{4} \int_{\partial R^{(i)}} f\,,$$

ya que las integrales a lo largo de los lados interiores de los rectángulos $R^{(i)}$ se cancelan a pares. Por tanto, existe $k \in \{1, \ldots, 4\}$ tal que

$$\left| \int_{\partial R^{(k)}} f \right| \geqslant \frac{1}{4} \left| \int_{\partial R} f \right|.$$

Llamemos $R_1 = R^{(k)}$. Repitiendo indefinidamente el proceso anterior, obtenemos una sucesión de rectángulos cerrados encajados $R_0 \equiv R \supset R_1 \supset R_2 \supset \cdots \supset R_n \supset R_{n+1} \supset \ldots$ tales que

$$\left| \int_{\partial R_n} f \right| \geqslant \frac{1}{4} \left| \int_{\partial R_{n-1}} f \right| \implies \left| \int_{\partial R_n} f \right| \geqslant \frac{1}{4^n} \left| \int_{\partial R} f \right|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Además, si P_i y D_i denotan respectivamente el perímetro y la diagonal del i-ésimo rectángulo y $P \equiv P_0$, $D \equiv D_0$, se tiene:

$$P_i = \frac{P}{2^i}, \quad D_i = \frac{D}{2^i}, \qquad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Por el teorema de encaje de Cantor, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} R_n = \{a\}$, con $a \in R$. Nótese que

$$z \in R_n \implies |z - a| \leqslant D_n = 2^{-n} D,$$

al ser $a \in R_n$ cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$. Si $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta > 0$ suficientemente pequeño de modo que f sea analítica en $D(a;\delta)$ y además se verifique

$$\left| f(z) - f(a) - (z-a) f'(a) \right| < \varepsilon\, |z - a|\,, \quad \forall z \in D(a;\delta), \;\; z \neq a.$$

(Nótese que, por hipótesis, f es derivable en un entorno de cada punto de R.) Escojamos ahora n suficientemente grande para que $D_n = 2^{-n} D < \delta$, de modo que $R_n \subset D(a;\delta)$. Nótese que, por el teorema fundamental del Cálculo,

$$\int_{\partial R_n} \mathrm{d}z = \int_{\partial R_n} z\, \mathrm{d}z = 0.$$

De esto se sigue que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial R} f \right| &\leqslant 4^n \left| \int_{\partial R_n} f \right| = 4^n \left| \int_{\partial R_n} \left[f(z) - f(a) - f'(a)(z-a) \right] \mathrm{d}z \right| \\ &\leqslant 4^n \int_{\partial R_n} \varepsilon\, |z - a|\; |\mathrm{d}z| \leqslant 4^n \cdot 2^{-n} D\varepsilon \cdot P_n = 4^n \cdot 2^{-n} D\varepsilon \cdot 2^{-n} P = PD\varepsilon. \end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario y PD es constante, el teorema está demostrado. *Q.E.D.*

Teorema de Cauchy–Goursat generalizado. *Sea a un punto interior a R, y supongamos que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es analítica en $R - \{a\}$ y $\lim_{z \to a} [(z-a) f(z)] = 0$. Entonces $\int_{\partial R} f = 0$.*

Demostración. Sea $Q \subset R$ un cuadrado con lados paralelos a los ejes coordenados de centro a y lado $l > 0$ suficientemente pequeño de forma que que $|(z-a) f(z)| < \varepsilon$ si $z \in Q - \{a\}$. Prolongando los lados de Q podemos subdividir el rectángulo R en 9 subrectángulos $R_0 \equiv Q, R_1, \dots, R_8$. Por tanto

$$\int_{\partial R} f = \int_{\partial Q} f + \sum_{i=1}^{8} \int_{\partial R_i} f \,.$$

La función f es analítica en cada uno de los rectángulos R_i, ya que $a \notin R_i \subset R$. Por el teorema de Cauchy–Goursat $\int_{\partial R_i} f = 0$ si $i = 1, \dots, 8$, y por tanto

$$\left| \int_{\partial R} f \right| = \left| \int_{\partial Q} f \right| \leqslant \varepsilon \int_{\partial Q} \frac{|\mathrm{d}z|}{|z-a|} \leqslant \varepsilon \cdot \frac{2}{l} \cdot 4l = 8\varepsilon \,,$$

lo que demuestra el teorema. *Q.E.D.*

2.2.1 Homotopía. Teorema de Cauchy

- Sea $A \subset \mathbb{C}$ una región, y sean γ_1 y γ_2 dos curvas continuas contenidas en A con los mismos extremos $z_1, z_2 \in A$ ($z_1 \neq z_2$), ó dos curvas cerradas continuas contenidas en A. Diremos que γ_1 es **homótopa** a γ_2 en A si se puede deformar *de manera continua* hasta transformarse en γ_2 *sin salirse de A*. En el primer caso (*homotopía de curvas abiertas con extremos fijos*), los extremos de todas las curvas deformadas han de mantenerse iguales a z_1 y z_2, mientras que en el segundo (*homotopía de curvas cerradas*) todas las curvas deformadas han de ser cerradas.

  Es importante observar que el concepto de homotopía *depende de la región A* considerada. En otras palabras, dos curvas homótopas en una cierta región A pueden no serlo en otra región A'.

- Nótese que un punto $z_0 \in A$ es una curva cerrada constante: $\gamma(t) = z_0$, $\forall t \in [a, b]$. En particular, $\int_{z_0} f = 0$ para toda f.

- Una *región $A \subset \mathbb{C}$* es **simplemente conexa** si toda curva cerrada continua γ contenida en A es homótopa a un punto en A.

Ejemplo: $\mathbb{C}$ es simplemente conexo. Un disco abierto es una región simplemente conexa. Un disco abierto sin uno de sus puntos no lo es. El plano complejo menos una semirrecta es simplemente conexo.

Teorema de la deformación. *Sean γ_1 y γ_2 dos curvas C^1 a trozos homótopas en una región A, y sea $f : A \to \mathbb{C}$ analítica en A. Entonces se verifica*

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f.$$

Teorema de Cauchy. *Sea γ una curva cerrada C^1 a trozos homótopa a un punto en una región A. Si $f : A \to \mathbb{C}$ es analítica en A se cumple*

$$\int_{\gamma} f = 0. \tag{2.3}$$

Se demuestra que cualquiera de los dos teoremas anteriores implica el otro, por lo que basta con probar uno de ellos. Véase, por ejemplo, el libro *Basic Complex Analysis,* de J.E. Marsden y M.J. Hoffman, para una demostración detallada y rigurosa de cualquiera de estos teoremas. Aplicando el teorema de Cauchy a una región *simplemente conexa* se deducen los dos corolarios siguientes:

Corolario 2.3. *Si $A \subset \mathbb{C}$ es una región* simplemente conexa *y $f : A \to \mathbb{C}$ es analítica en A entonces*

$$\int_\gamma f = 0,$$

para toda curva cerrada γ contenida en A.

Nota. A partir de ahora, supondremos sin mencionarlo en los enunciados que todas las curvas con que tratemos son C^1 a trozos, a menos que no se indique explícitamente lo contrario.

Demostración. En efecto, si A es una región simplemente conexa toda curva cerrada γ contenida en A es homótopa a punto en A, por lo que $\int_\gamma f = 0$ en virtud del teorema de Cauchy. *Q.E.D.*

Corolario 2.4. *Si $f : A \to \mathbb{C}$ es analítica en una región* simplemente conexa *A entonces f admite una primitiva en A.*

Demostración. Por el corolario anterior, $\int_\gamma f = 0$ para toda curva cerrada γ contenida en A. Esto implica que f tiene una primitiva en A, en virtud de la equivalencia ii) $\Longleftrightarrow$ iii) del teorema sobre la independencia del camino de la pág. 24. *Q.E.D.*

Necesitaremos también la siguiente generalización del teorema de Cauchy, que se prueba utilizando el teorema de Cauchy–Goursat generalizado:

Teorema de Cauchy generalizado. *Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ una curva cerrada homótopa a un punto en una región A, y sea $z_0 \in A - \gamma([a,b])$. Si f es analítica en $A - \{z_0\}$ y $\lim_{z\to z_0} [(z - z_0) f(z)] = 0$ entonces $\int_\gamma f = 0$.*

Idea de la demostración. Si z_0 es exterior a la curva, entonces γ es homótopa a un punto en la región $A - \{z_0\}$, e $\int_\gamma f = 0$ por el teorema de Cauchy aplicado a dicha región. Si, por el contrario, z_0 es interior a γ, al ser dicha curva homótopa a un punto en A puede probarse que existe un cuadrado suficientemente pequeño $Q \subset A$ centrado en z_0 tal que γ es homótopa a Q en $A - \{z_0\}$. Por el teorema de la deformación aplicado a f en la región $A - \{z_0\}$,

$$\int_\gamma f = \int_{\partial Q} f = 0\,,$$

donde la última igualdad es consecuencia del teorema de Cauchy–Goursat generalizado. *Q.E.D.*

2.3 Índice. Fórmula integral de Cauchy y sus consecuencias

2.3.1 Índice

- Si γ es una curva cerrada y $a \notin \gamma$, definimos el **índice** de a respecto de γ mediante

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a}.$$

- Si γ es una circunferencia de centro a y radio $r > 0$ recorrida n veces en sentido antihorario ($\gamma(t) = a + r\,e^{it}$, con $t \in [0, 2n\pi]$) entonces

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2n\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}}\,dt = n.$$

Análogamente, si γ es la circunferencia de centro a y radio $r > 0$ recorrida n veces en sentido horario,

$$n(\gamma, a) = -n.$$

En virtud del teorema de la deformación, esto sugiere que $n(\gamma, a)$ es el *número de vueltas que da la curva γ alrededor de a,* contando como positivas las vueltas dadas en sentido antihorario.

Ejemplo: Si z_0 es un punto exterior a una circunferencia (ó a cualquier curva cerrada simple) γ, entonces $(z-z_0)^{-1}$ es analítica en $A = \mathbb{C}-\{z_0\}$ y γ es homótopa a un punto en $A \Longrightarrow n(\gamma, z_0) = 0$, por el teorema de Cauchy.

Proposición 2.5. *$n(\gamma, z_0)$ es un entero.*

Demostración. Supongamos, por sencillez, que $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ es C^1 en $[a, b]$. Si definimos

$$h(t) = \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0}\, \mathrm{d}s\,,$$

entonces $n(\gamma, z_0) = h(b)/(2\pi \mathrm{i})$. Por otra parte, h es derivable en $[a, b]$ (el integrando es continuo, ya que el denominador no se anula), y

$$h'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{-h(t)}\,[\gamma(t) - z_0]\right) = 0, \quad \forall t \in [a, b].$$

Por tanto $\mathrm{e}^{-h(t)}\big(\gamma(t) - z_0\big)$ es constante en $[a, b]$, de donde se deduce (al ser $h(a) = 0$) que

$$\gamma(a)-z_0 = \mathrm{e}^{-h(b)}(\gamma(b)-z_0) = \mathrm{e}^{-h(b)}(\gamma(a)-z_0) \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{e}^{-h(b)} = 1 \overset{z_0\notin\gamma}{\Longrightarrow} h(b) = 2n\pi\mathrm{i}, \;\; n \in \mathbb{Z}.$$

Q.E.D.

2.3.2 Fórmula integral de Cauchy

Sea $f : A \to \mathbb{C}$ analítica en una región A, sea γ una curva homótopa a un punto en A, y sea $a \in A$ un punto que no esté sobre γ. Entonces se verifica

$$n(\gamma, a) \cdot f(a) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - a}\, \mathrm{d}z.$$

Demostración. La función

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(a)}{z - a}, & z \neq a \\ f'(a), & z = a \end{cases}$$

es analítica en $A - \{a\}$ y $\lim_{z\to a}[(z - a)g(z)] = \lim_{z\to a}[f(z) - f(a)] = 0$. Por el teorema de Cauchy generalizado,

$$0 = \int_\gamma g = \int_\gamma \frac{f(z) - f(a)}{z - a}\, \mathrm{d}z = \int_\gamma \frac{f(z)}{z - a}\, \mathrm{d}z - f(a) \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - a} = \int_\gamma \frac{f(z)}{z - a}\, \mathrm{d}z - f(a) \cdot 2\pi\mathrm{i}\, n(\gamma, a).$$

Q.E.D.

Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una función analítica en una región A y $z \in A$, podemos aplicar la fórmula integral de Cauchy a la circunferencia γ de centro z y radio r suficientemente pequeño para que $D(z; 2r) \subset A$, ya que γ es homótopa a un punto en $D(z; 2r)$ y, por tanto, en A. Si orientamos la circunferencia γ positivamente (en sentido antihorario) entonces $n(\gamma, z) = 1$, y por tanto la fórmula integral de Cauchy permite expresar $f(z)$ como

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} \, \mathrm{d}w.$$

Derivando esta fórmula *formalmente* respecto de z bajo el signo integral obtenemos

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z)^{k+1}} \, \mathrm{d}w, \quad k \in \mathbb{N}\,. \tag{2.4}$$

En particular, si se verifica (2.4) *f es infinitas veces diferenciable en cualquier punto $z \in A$*. Veamos a continuación cómo se justifica rigurosamente la derivación bajo la integral que conduce a la ecuación (2.4):

Lema 2.6. *Consideremos la* integral de tipo Cauchy

$$G(z) = \int_\gamma \frac{g(w)}{w - z} \, \mathrm{d}w,$$

donde $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una función continua *sobre una curva γ (no necesariamente cerrada) y $z \notin \gamma([a, b])$. Entonces G es infinitas veces derivable en todo punto $z_0 \notin \gamma([a, b])$, siendo*

$$G^{(k)}(z_0) = k! \int_\gamma \frac{g(w)}{(w - z_0)^{k+1}} \, \mathrm{d}w. \tag{2.5}$$

Demostración. La demostración es por inducción sobre k.
i) Supongamos, en primer lugar, que $k = 1$. Sea $z_0 \notin \gamma([a, b])$, y definamos

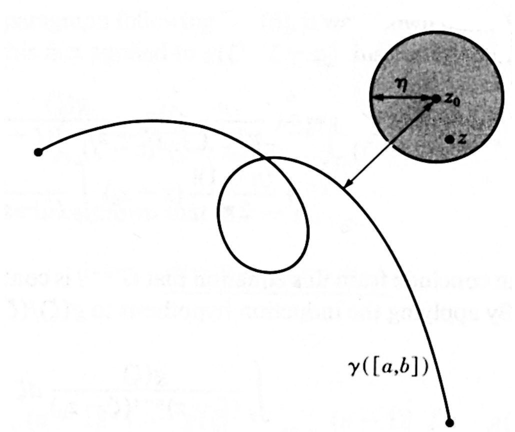

Figura 2.1: integral de tipo Cauchy

$$2\eta = \min_{t \in [a,b]} |\gamma(t) - z_0| > 0, \quad M = \max_{t \in [a,b]} \left| g\big(\gamma(t)\big) \right|.$$

Nótese que $\eta > 0$ y $M < \infty$ por la continuidad de γ y $g \circ \gamma$ en el compacto $[a, b]$. Si $z \in D(z_0; \eta)$ con $z \neq z_0$ se tiene

$$\frac{G(z) - G(z_0)}{z - z_0} = \int_\gamma \frac{1}{z - z_0} \left[\frac{1}{w - z} - \frac{1}{w - z_0} \right] g(w) \, \mathrm{d}w.$$

Pero

$$\frac{1}{z-z_0}\left[\frac{1}{w-z}-\frac{1}{w-z_0}\right]=\frac{1}{(w-z)(w-z_0)}=\frac{1}{(w-z_0)^2}\,\frac{w-z_0}{w-z}=\frac{1}{(w-z_0)^2}\left(1+\frac{z-z_0}{w-z}\right). \tag{2.6}$$

Si w está sobre la curva γ, por definición de M y η se tiene:

$$|g(w)|\leqslant M\,,\qquad |w-z_0|\geqslant 2\eta\,,\qquad |w-z|\geqslant \eta\,.$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\left|\frac{G(z)-G(z_0)}{z-z_0}-\int_\gamma \frac{g(w)}{(w-z_0)^2}\,\mathrm{d}w\right| &= |z-z_0|\left|\int_\gamma \frac{g(w)}{(w-z_0)^2(w-z)}\,\mathrm{d}w\right|\\ &\leqslant |z-z_0|\cdot\frac{M\,l(\gamma)}{4\eta^2\cdot\eta}\xrightarrow[z\to z_0]{} 0.\end{aligned}$$

ii) Supongamos ahora el lema cierto para $k=1,\dots,n-1$, y probémoslo para $k=n$. Veamos, en primer lugar, que $G^{(n-1)}$ es continua en $z_0\in\mathbb{C}-\gamma([a,b])$. En efecto, por la hipótesis de inducción se tiene

$$G^{(n-1)}(z)=(n-1)!\int_\gamma \frac{g(w)}{(w-z)^n}\,\mathrm{d}w\,.$$

Multiplicando la primera identidad (2.6) por $1/(w-z)^{n-1}$ se obtiene

$$\frac{1}{(w-z)^n}=\frac{1}{(w-z)^{n-1}(w-z_0)}+\frac{z-z_0}{(w-z)^n(w-z_0)}\,,$$

y por tanto

$$\begin{aligned}G^{(n-1)}(z)-G^{(n-1)}(z_0)&=(n-1)!\left[\int_\gamma \frac{g(w)}{(w-z)^{n-1}(w-z_0)}\,\mathrm{d}w-\int_\gamma\frac{g(w)}{(w-z_0)^n}\,\mathrm{d}w\right]\\&\quad+(n-1)!\,(z-z_0)\int_\gamma \frac{g(w)}{(w-z)^n(w-z_0)}\,\mathrm{d}w\,.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Por la hipótesis de inducción aplicada a $g(w)/(w-z_0)$ (que también es continua sobre γ, ya que $z_0\notin\gamma([a,b])$), la función

$$\int_\gamma \frac{g(w)}{(w-z)^{n-1}(w-z_0)}\,\mathrm{d}w$$

es derivable, y por tanto continua, si $z\in\mathbb{C}-\gamma([a,b])$, lo cual implica que el término entre corchetes en el miembro derecho de (2.7) tiende a 0 si $z\to z_0$. En cuanto a la integral que aparece en el segundo término del MD de dicha ecuación, procediendo como en el caso $k=1$ se demuestra que

$$\left|\int_\gamma \frac{g(w)}{(w-z)^n(w-z_0)}\,\mathrm{d}w\right|\leqslant\frac{M\,l(\gamma)}{2\eta^{n+1}}\,,\qquad \forall z\in D(z_0;\eta)\,,$$

lo que prueba que el segundo término del MD de (2.7) también tiende a 0 si $z\to z_0$.

Veamos, por último, que $G^{(n-1)}$ es derivable en z_0. En efecto, si $z\in D(z_0;\eta)-\{z_0\}$ dividiendo (2.7) por $z-z_0$ se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{G^{(n-1)}(z)-G^{(n-1)}(z_0)}{z-z_0}&=\frac{(n-1)!}{z-z_0}\left[\int_\gamma \frac{g(w)}{(w-z)^{n-1}(w-z_0)}\,\mathrm{d}w-\int_\gamma\frac{g(w)}{(w-z_0)^n}\,\mathrm{d}w\right]\\&\quad+(n-1)!\int_\gamma \frac{g(w)}{(w-z)^n(w-z_0)}\,\mathrm{d}w\,.\end{aligned} \tag{2.8}$$

De nuevo por la hipótesis de inducción aplicada a $g(w)/(w-z_0)$, cuando $z \to z_0$ el primer término del MD de esta identidad tiende a

$$(n-1)!\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\bigg|_{z=z_0}\int_\gamma \frac{g(w)}{(w-z)^{n-1}(w-z_0)}\,\mathrm{d}w = (n-1)\,\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}\bigg|_{z=z_0}\int_\gamma \frac{g(w)}{(w-z)(w-z_0)}\,\mathrm{d}w$$
$$= (n-1)(n-1)!\int_\gamma \frac{g(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}w\,.$$

En cuanto al segundo término de (2.8), de lo probado anteriormente sobre la continuidad de $G^{(n-1)}(z_0)$ aplicado ahora a la integral de tipo Cauchy

$$\int_\gamma \frac{g(w)}{(w-z)^n(w-z_0)}\,\mathrm{d}w$$

se sigue que esta última integral es una función continua en z_0, y por tanto tiende a

$$\int_\gamma \frac{g(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}w\,.$$

cuando $z \to z_0$. De lo anterior se sigue que $G^{(n-1)}$ es derivable en z_0, siendo

$$G^{(n)}(z_0) = (n-1)(n-1)!\int_\gamma \frac{g(w)}{(w-z_0)^{n+1}} + (n-1)!\int_\gamma \frac{g(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}w$$
$$= n!\int_\gamma \frac{g(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}w\,.$$

Q.E.D.

2.3.3 Fórmula integral de Cauchy para las derivadas

Sea $f : A \to \mathbb{C}$ una función analítica en una región A. Entonces f es infinitas veces derivable *en cualquier punto de A. Además, si $\gamma : [a,b] \to A$ es una curva cerrada homótopa a un punto en A y $z_0 \in A - \gamma([a,b])$ se verifica*

$$n(\gamma, z_0)\cdot f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi \mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\,\mathrm{d}w, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.9}$$

Demostración. Sea $z_0 \in A - \gamma([a,b])$, y sea D cualquier entorno de z_0 que no corte a γ (por ejemplo, el disco $D(z_0;\eta)$ definido en la demostración del lema anterior) contenido en A. Al ser $n(\gamma, z)$ una integral de tipo Cauchy (con $g = 1/2\pi\mathrm{i}$), es una función continua de z para todo $z \in D$, y como es un número *entero* ha de ser *constante* en dicho entorno. Por tanto, si

$$F(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w\,, \qquad z \in D,$$

entonces (en virtud de la fórmula integral de Cauchy)

$$F(z) = n(\gamma, z)f(z) = n(\gamma, z_0)f(z)\,, \qquad \forall z \in D\,. \tag{2.10}$$

Como F es también de tipo Cauchy, aplicando las ecs. (2.5) y (2.10) se obtiene

$$F^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}\,\mathrm{d}w = n(\gamma, z_0)f^{(k)}(z)\,, \qquad \forall z \in D\,.$$

Haciendo $z = z_0$ se deduce (2.9). *Q.E.D.*

A partir del teorema anterior se prueba fácilmente el siguiente resultado fundamental:

Teorema 2.7. *Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es* analítica *en un conjunto* arbitrario C*, entonces f es* infinitas veces derivable *en todo punto de C.*

Demostración. Dado un punto $z \in C$, basta aplicar el teorema anterior en un entorno A de z en que f sea analítica. *Q.E.D.*

2.3.4 Teorema de Morera

Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es continua en una región A y $\int_\gamma f = 0$ para toda curva cerrada γ contenida en A, entonces f es analítica en A.

Demostración. El teorema acerca de la independencia del camino implica que existe $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica en A tal que $f = F'$ en A. Como F es analítica en A, es infinitamente derivable en dicha región, y por tanto $f' = F''$ existe en todo punto de A. *Q.E.D.*

Ejercicio. ¿Es cierto el resultado anterior si sólo suponemos que $\int_\gamma f = 0$ para toda curva cerrada $\gamma \subset A$ *homótopa a un punto* en A?

2.3.5 Desigualdades de Cauchy

Sea f analítica en una región A, sea $a \in A$, y supongamos que $\overline{D}(a; R) \equiv \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leqslant R\} \subset A$. Si $M = \max\limits_{|z-a|=R} |f(z)|$ entonces

$$\left| f^{(k)}(a) \right| \leqslant \frac{k!}{R^k}\, M, \qquad \forall k = 0, 1, 2, \dots .$$

Demostración. Si γ es el círculo de centro a y radio R orientado positivamente, entonces γ es homotópico a un punto en A y $n(\gamma, a) = 1$. La fórmula integral de Cauchy para la k-ésima derivada proporciona entonces

$$\left| f^{(k)}(a) \right| = \frac{k!}{2\pi} \left| \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}\, \mathrm{d}z \right| \leqslant \frac{k!}{2\pi} \int_\gamma \frac{|f(z)|}{|z-a|^{k+1}}\, |\mathrm{d}z| \leqslant \frac{k!}{2\pi} \frac{M}{R^{k+1}}\, 2\pi R = \frac{k!}{R^k}\, M.$$

Q.E.D.

2.3.6 Teorema de Liouville

Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es **entera** *(es decir, analítica en todo $\mathbb{C}$) y $|f|$ está* acotado *en $\mathbb{C}$, entonces f es* constante.

Demostración. La hipótesis implica que existe $K > 0$ tal que $|f(z)| < K$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Si $z \in \mathbb{C}$, de la desigualdad de Cauchy para la primera derivada se deduce que

$$\left| f'(z) \right| < \frac{K}{R}, \quad \forall R > 0$$

(ya que, al ser $A = \mathbb{C}$, las desigualdades de Cauchy son válidas para *cualquier* $R > 0$). De esto se sigue obviamente que $|f'(z)| = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Al ser $\mathbb{C}$ conexo, f ha de ser constante en $\mathbb{C}$. *Q.E.D.*

2.3.7 Teorema fundamental del Álgebra

Un polinomio de grado $n \geqslant 1$ tiene al menos una raíz.

Demostración. Sea $p(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$, con $a_n \neq 0$ y $n \geqslant 1$. Si p no tuviera ninguna raíz, la función $f = 1/p$ sería entera. Probaremos que esto es imposible demostrando que en tal caso f sería también acotada en $\mathbb{C}$ y no constante, en contradicción con el teorema de Liouville.

Para probar que f está acotada, nótese que si $z \neq 0$

$$|p(z)| \geqslant |z|^n \left(|a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \cdots - \frac{|a_0|}{|z|^n} \right).$$

Como $\dfrac{|a_k|}{|z|^{n-k}} \xrightarrow[|z|\to\infty]{} 0 \quad (k = 0, \ldots, n-1)$, existe $M > 1$ tal que

$$|z| > M \implies \frac{|a_k|}{|z|^{n-k}} < \frac{|a_n|}{2n}, \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

Por tanto

$$|z| > M \implies |p(z)| > |z|^n \left(|a_n| - n \cdot \frac{|a_n|}{2n} \right) = \frac{|a_n|}{2} |z|^n > \frac{|a_n|}{2} > 0.$$

Por otra parte, al ser el disco cerrado de centro 0 y radio M compacto, existe $z_0 \in \overline{D}(0; M)$ tal que $|p(z)| \geqslant |p(z_0)| \equiv c > 0$ si $|z| \leqslant M$ (nótese que $c > 0$, al ser, por hipótesis, $p(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$). Por tanto, hemos probado que

$$|f(z)| = \frac{1}{|p(z)|} \leqslant \max\left(\frac{2}{|a_n|}, \frac{1}{c} \right), \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Esto contradice el teorema de Liouville, al ser $f \equiv 1/p$ entera y no constante (p no es constante, ya que $a_n \neq 0$ y $n \geqslant 1$). *Q.E.D.*

2.4 Propiedad del valor medio. Principio del módulo máximo.

2.4.1 Propiedad del valor medio

Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es analítica en el disco cerrado $\overline{D}(a; r)$ se verifica

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(a + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) \mathrm{d}\theta.$$

Demostración. Antes de probar este resultado, nótese que la fórmula anterior expresa que el valor de f en a es la media de los valores de f en el círculo de centro a y radio r.

La demostración es una consecuencia inmediata de la fórmula integral de Cauchy. En efecto, por hipótesis f es analítica en un abierto $A \supset \overline{D}(a; r)$, que puede tomarse como una región (de hecho, como un disco abierto de radio ligeramente mayor que r: cf. Marsden–Hoffman, prob. 1.4.27). La circunferencia γ de centro a y radio r (orientada positivamente) es entonces homótopa a un punto en A. Aplicando la fórmula integral de Cauchy se obtiene:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z \overset{z=a+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{=} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\, \mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(a + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) \mathrm{d}\theta.$$

Q.E.D.

2.4.2 Principio local del módulo máximo

Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica en un abierto A, y supongamos que $|f|$ tiene un máximo relativo en $a \in A$. Entonces f es constante en un entorno de a.

Demostración. Por hipótesis, existe $R > 0$ tal que

$$|f(z)| \leqslant |f(a)|, \qquad \forall z \in D(a; R) \equiv D \subset A.$$

Vamos a probar, en primer lugar, que $|f|$ es constante en D. Para ello, supongamos que existiera $z_0 = a + r e^{i\alpha} \in D$ tal que $|f(z_0)| < |f(a)|$. Por la continuidad de f en $D \subset A$, existen $\varepsilon > 0$ y $0 < \delta \leqslant \pi$ tales que

$$\left|f(a + re^{i\theta})\right| < \left|f(a)\right| - \varepsilon, \qquad \alpha - \delta \leqslant \theta \leqslant \alpha + \delta.$$

En efecto, al ser $\left|f(a)\right| - \left|f(z_0)\right| > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\left|f(z_0)\right| < \left|f(a)\right| - \varepsilon$. Por continuidad de $g(\theta) \equiv \left|f(a + re^{i\theta})\right|$ en $\theta = \alpha$, existe entonces $0 < \delta \leqslant \pi$ tal que para todo $\alpha - \delta \leqslant \theta \leqslant \alpha + \delta$ se verifica

$$\left|f(a+re^{i\theta})\right| - \left|f(a+re^{i\alpha})\right| \equiv \left|f(a+re^{i\theta})\right| - \left|f(z_0)\right| < \left|f(a)\right| - \left|f(z_0)\right| - \varepsilon \iff \left|f(a+re^{i\theta})\right| < \left|f(a)\right| - \varepsilon.$$

Aplicando la propiedad del valor medio a la circunferencia de centro a y radio r obtenemos:

$$\begin{aligned}
|f(a)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})\,d\theta\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} f(a + re^{i\theta})\,d\theta\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\alpha-\pi}^{\alpha-\delta} f(a + re^{i\theta})\,d\theta\right| + \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\alpha-\delta}^{\alpha+\delta} f(a + re^{i\theta})\,d\theta\right| + \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\alpha+\delta}^{\alpha+\pi} f(a + re^{i\theta})\,d\theta\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\Big[\,|f(a)|\,(\pi - \delta) + \big(|f(a)| - \varepsilon\big)(2\delta) + |f(a)|\,(\pi - \delta)\Big] \\
&= |f(a)| - \frac{\delta\varepsilon}{\pi} < |f(a)|,
\end{aligned}$$

lo cual es absurdo. Esto demuestra que $|f|$ es constante en D, lo cual implica que f es también constante en D en virtud de las ecuaciones de Cauchy–Riemann (ejercicio). *Q.E.D.*

Corolario 2.8. *Si $f : A \to \mathbb{C}$ es analítica en una* región *A y $|f|$ tiene un máximo relativo en A, entonces f es constante en A.*

Demostración. Por el principio local del módulo máximo, f es constante en un disco abierto $D \subset A$. Por otra parte, en el capítulo siguiente (cf. el Teorema 3.11) veremos que una función analítica en una *región* A y constante en un entorno de un punto de A ha de ser constante en todo A.

Q.E.D.

2.4.3 Principio global del módulo máximo

Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica en una región acotada *A y continua en la frontera ∂A de A. Si $M = \max\limits_{z \in \partial A} |f(z)|$, entonces se cumple:*

i) $|f(z)| \leqslant M$ *para todo* $z \in A$

ii) *Si* $|f(a)| = M$ *para algún* $a \in A$ *entonces* f *es* constante *en* A.

Demostración. En primer lugar $M \in \mathbb{R}$ existe, al ser ∂A cerrado (la frontera de cualquier conjunto es siempre cerrada) y acotado (por ser A acotado), y $|f|$ continua en ∂A. En segundo lugar, la segunda afirmación es consecuencia de la primera y del corolario del principio local del módulo máximo. Basta por tanto probar la primera afirmación. Para ello, nótese que la función $|f|$ también es continua en el compacto $\overline{A} = A \cup \partial A$ ($\overline{A}$ es acotado, ya que el cierre de un conjunto acotado es acotado), de forma que alcanza un máximo en dicho conjunto. Si dicho máximo se alcanza en ∂A, entonces la primera afirmación se cumple por definición de máximo. Si, por el contrario, el máximo de $|f|$ en $\overline{A}$ se alcanza en un punto $z_0 \in A$, el corolario del principio local del módulo máximo implica que $f(z) = f(z_0)$ para todo $z \in A$. Por continuidad, $f(z) = f(z_0)$ para todo $z \in \overline{A}$, lo cual implica trivialmente la primera afirmación (ya que en este caso f es constante en $\overline{A}$). *Q.E.D.*

Ejercicio. Calcular el máximo de $|\mathrm{e}^z|$ en el disco $|z| \leqslant 1$.

Solución. La función $f(z) = \mathrm{e}^z$ verifica las hipótesis del principio global del módulo máximo en $A = D(0;1)$, y por tanto $|\mathrm{e}^z|$ alcanza su máximo valor en la circunferencia unidad $|z| = 1$. Pero si $z = \mathrm{e}^{i\theta}$ con $0 \leqslant \theta < 2\pi$ entonces $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\cos\theta} \leqslant \mathrm{e}^{\cos 0} = \mathrm{e}$, ya que la exponencial real es una función monótona creciente. Luego el máximo de $|\mathrm{e}^z|$ en el disco $|z| \leqslant 1$ es e, y se alcanza en el punto $z = 1$ de la frontera del disco. Nótese que dicho máximo no puede alcanzarse en ningún punto interior al disco, ya que entonces el principio global del módulo máximo implicaría que f es constante en el disco cerrado.

El resultado anterior se puede también obtener de forma elemental observando que si $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$ (con $0 \leqslant \theta < 2\pi$) entonces $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{r\cos\theta}$, que alcanza su valor máximo cuando $r\cos\theta$ es máximo. Como $r \leqslant 1$, el valor máximo de $r\cos\theta$ se alcanza para $r = 1$ y $\theta = 0$.

Capítulo 3

Representación de funciones analíticas mediante series

3.1 Convergencia de sucesiones y series de funciones

3.1.1 Sucesiones y series de números complejos

- Una **sucesión** de números complejos $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ **converge** a $z \in \mathbb{C}$ ($\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$) si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{t.q.} \quad n \geqslant N \Longrightarrow |z_n - z| < \varepsilon.$$

- $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$, si existe, es único.
- $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z \equiv x + \mathrm{i}\,y \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Re}(z_n) = x,\ \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Im}(z_n) = y.$
- **Criterio de Cauchy:**

$$\exists \lim_{n\to\infty} z_n \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \ \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{t.q.} \quad n, m \geqslant N \Longrightarrow |z_n - z_m| < \varepsilon.$$

  Demostración.

  $\Longrightarrow)$ $|z_n - z_m| \leqslant |z_n - z| + |z_m - z|$

  $\Longleftarrow)$ $z_n = x_n + \mathrm{i}\,y_n \Longrightarrow |x_n - x_m| \leqslant |z_n - z_m|,\ |y_n - y_m| \leqslant |z_n - z_m| \Longrightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergentes (sucesiones reales de Cauchy) $\Longrightarrow \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergente.

- La serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ **converge** a $s \in \mathbb{C}$ $\left(\Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k = s\right)$ si la sucesión de **sumas parciales** $\left\{\sum_{k=1}^{n} z_k\right\}_{n=1}^{\infty}$ converge a s, es decir

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = s \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z_k = s.$$

- $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ convergente $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$. En efecto,

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} z_k - \sum_{k=1}^{n-1} z_k \right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z_k - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} z_k = s - s = 0\,.$$

- Se dice que $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ es **absolutamente convergente** si $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ es convergente.

Proposición 3.1. *Si* $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ *es absolutamente convergente entonces es convergente.*

Demostración. Es consecuencia del criterio de Cauchy, ya que si (por ej.) $m > n$ se tiene

$$\left|\sum_{k=1}^{m} z_k - \sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} z_k\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} |z_k| = \left|\sum_{k=1}^{m} |z_k| - \sum_{k=1}^{n} |z_k|\right|.$$

3.1.2 Sucesiones y series de funciones. Convergencia uniforme

Una **sucesión de funciones** $f_n : A \to \mathbb{C}$ definidas en un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$ **converge puntualmente** a una función f en A si para todo $z \in A$ existe $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$. Análogamente, la **serie de funciones** $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ converge puntualmente a la función g en A si existe $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z) = g(z)$ para todo $z \in A$.

Definición 3.2. La sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ definidas en A **converge uniformemente a f en** A si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{t.q.} \quad n \geqslant N \Longrightarrow |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon,\ \ \textbf{para todo}\ \ z \in A.$$

Análogamente, $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ converge uniformemente a g en A si la sucesión de funciones $\left\{ \sum_{k=1}^{n} g_k \right\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a g en A, es decir si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{t.q.} \quad n \geqslant N \Longrightarrow \left|\sum_{k=1}^{n} g_k(z) - g(z)\right| < \varepsilon,\ \ \textbf{para todo}\ \ z \in A.$$

- Obviamente, si una sucesión ó serie de funciones converge uniformemente a una función f en A entonces dicha sucesión o serie converge puntualmente en A a la misma función. Sin embargo, *la convergencia puntual de una sucesión o serie de funciones no implica, en general, su convergencia uniforme.*

- **Criterio de Cauchy:** $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en A si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{t.q.} \quad n, m \geqslant N \Longrightarrow |f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon,\ \ \textbf{para todo}\ \ z \in A.$$

Demostración. En primer lugar, es claro que la convergencia uniforme de f_n a f en A implica el criterio de Cauchy. Para demostrar el recíproco nótese que, por el criterio de Cauchy para sucesiones numéricas, la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a una función f en A. Haciendo tender m a infinito en la condición de Cauchy uniforme se prueba que si $n \geqslant N$ entonces $|f_n(z) - f(z)| \leqslant \varepsilon$ para todo $z \in A$.

Análogamente, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ converge uniformemente a una función g en A si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{t.q.} \quad m > n \geqslant N \Longrightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{m} g_k(z)\right| < \varepsilon,\ \ \textbf{para todo}\ \ z \in A.$$

Criterio M de Weierstrass. *Sea $g_k : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ($k \in \mathbb{N}$) una sucesión de funciones, y supongamos que $|g_k(z)| \leqslant M_k$ para todo $z \in A$ y para todo $k \in \mathbb{N}$. Si la serie numérica $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ es convergente, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ converge absoluta y uniformemente en A.*

Demostración. Es consecuencia del criterio de Cauchy para la convergencia uniforme, ya que si $m > n$ entonces

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} g_k(z)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} |g_k(z)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} M_k.$$

• Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge *uniformemente* a f en A y $f_n : A \to \mathbb{C}$ es *continua* en A para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces f es *continua* en A. Análogamente, si g_n es continua en A para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ converge uniformemente a g en A entonces g es continua en A.

La demostración de este resultado es idéntica a la del caso real, sin más que reemplazar el valor absoluto por el módulo.

Lema 3.3. *Sea f_n continua en A para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge* uniformemente *a f en A y γ es una curva C^1 a trozos contenida en A entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n = \int_\gamma f \equiv \int_\gamma \lim_{n\to\infty} f_n.$$

En particular, si g_k es continua en A para todo $k \in \mathbb{N}$ y $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ converge uniformemente en A entonces

$$\int_\gamma \sum_{k=1}^{\infty} g_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_\gamma g_k\,.$$

Demostración. En primer lugar, nótese que f es continua, al ser uniforme la convergencia de f_n a f, y por tanto existe la integral $\int_\gamma f$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ para todo $z \in A$ y $n \geqslant N$. Entonces se tiene:

$$n \geqslant N \implies \left|\int_\gamma f_n - \int_\gamma f\right| = \left|\int_\gamma (f_n - f)\right| \leqslant \int_\gamma |f_n(z) - f(z)|\,|\mathrm{d}z| \leqslant \varepsilon\, l(\gamma)\,.$$

Teorema de la convergencia analítica. *Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones analíticas en un abierto A tales que $f_n \to f$ uniformemente en cada disco cerrado contenido en A. Entonces f es analítica en A, y $f_n' \to f'$ uniformemente en cada disco cerrado contenido en A.*

Demostración. En primer lugar, por ser uniforme la convergencia de f_n a f en discos cerrados contenidos en A, f es continua en cada disco cerrado contenido en A, y por tanto es continua en A. Sea $\overline{D}(a;r) \subset A$. Si γ es una curva cerrada C^1 a trozos contenida en $D(a;r)$ entonces f es continua en $D(a;r)$ y

$$\int_\gamma f = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n = 0,$$

por el Lema 3.3 y el teorema de Cauchy (f_n es analítica en $D(a;r) \subset A$ y $D(a;r)$ es simplemente conexo). Por el teorema de Morera, f es analítica en $D(a;r)$, y por tanto en A.

Para probar que $f_n' \to f'$ uniformemente en $\overline{D}(a;r)$, nótese que existe $R > r$ tal que $\overline{D}(a;R) \subset A$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(w) - f(w)| < \varepsilon$ para todo $w \in \overline{D}(a;R)$ y $n \geqslant N$. Si $z \in \overline{D}(a;r)$ y γ es la circunferencia de centro a y radio R (orientada positivamente) se tiene entonces, por la fórmula integral de Cauchy para la primera derivada:

$$\left|f_n'(z) - f'(z)\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_\gamma \frac{f_n(w) - f(w)}{(w-z)^2}\,\mathrm{d}w\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\frac{\varepsilon}{(R-r)^2}\,2\pi R = \frac{\varepsilon R}{(R-r)^2}.$$

Corolario 3.4. *Sea $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ una serie de funciones analíticas en un abierto A uniformemente convergente a g en cada disco cerrado contenido en A. Entonces g es analítica en A, y $\sum_{k=1}^{\infty} g_k'$ converge uniformemente a g' en cada disco cerrado contenido en A.*

En particular, nótese que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{k=1}^{\infty} g_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}g_k}{\mathrm{d}z} \quad \text{en } A\,;$$

en otras palabras, si se cumplen las hipótesis del corolario precedente *la serie se puede derivar término a término en A.*

3.2 Convergencia de series de potencias. Teoremas de Taylor y Laurent.

3.2.1 Series de potencias

Una **serie de potencias** centrada en $z_0 \in \mathbb{C}$ es una serie del tipo

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k, \qquad a_k \in \mathbb{C} \;\; (k=0,1,\dots). \tag{3.1}$$

Teorema de Abel. *Para toda serie de potencias (3.1) hay un R tal que $0 \leqslant R \leqslant \infty$, llamado el* **radio de convergencia** *de la serie, que cumple:*

i) La serie converge absolutamente *para $|z-z_0| < R$. Además, la convergencia es* uniforme *en todo disco cerrado $\overline{D}(z_0; r)$ de radio $r < R$.*

ii) La serie diverge si $|z-z_0| > R$.

iii) Si $R > 0$, la suma de la serie es una función analítica *en el* ***disco de convergencia*** *$D(z_0; R)$, cuya derivada se obtiene derivando término a término la serie dada.*

Demostración. Claramente, de i) y ii) se sigue que R, si existe, es único. Probaremos que

$$R = \sup I\,, \qquad I \equiv \left\{ r \geqslant 0 \mid \{|a_n|\, r^n\}_{n=0}^{\infty} \text{ acotado} \right\}.$$

Nótese que si $\{|a_n|\, r^n\}_{n=0}^{\infty}$ está acotado también lo está $\{|a_n|\, \rho^n\}_{n=0}^{\infty}$ para todo $\rho \leqslant r$, por lo que el conjunto I es un *intervalo* con extremo inferior en 0. En particular, $R = \infty$ si $\{|a_n|\, r^n\}_{n=0}^{\infty}$ está acotado para todo $r \geqslant 0$. Con esta definición, la parte ii) es trivial: en efecto, si $|z-z_0| > R$ la sucesión $\left\{|a_n|\,|z-z_0|^n\right\}_{n=0}^{\infty} = \{|a_n(z-z_0)^n|\}_{n=0}^{\infty}$ no está acotada (ya que $|z-z_0| \notin I$), y por tanto el término general de la serie no tiende a cero cuando $n \to \infty$.

Para probar i), nótese en primer lugar que si $R = 0$ la serie diverge para todo $z \neq z_0$, y no hay nada que probar. Supongamos, por tanto, que $R > 0$, y sea $0 < r < R$. Entonces $r \in I$, y por definición de supremo existen $r < \rho < R$ y $M > 0$ tal que $|a_n|\, \rho^n < M$ para todo n. Si $|z-z_0| \leqslant r$ se tiene:

$$|a_n(z-z_0)^n| = |a_n|\,\rho^n \left(\frac{|z-z_0|}{\rho}\right)^n \leqslant M \left(\frac{r}{\rho}\right)^n .$$

Por el criterio M de Weierstrass, la serie converge absoluta y uniformemente en $\overline{D}(z_0; r)$; en particular, converge absolutamente en $D(z_0; R)$. El apartado iii) se sigue del criterio de la convergencia analítica, ya que de i) se deduce que la serie converge uniformemente en cada disco cerrado $\overline{D}(a; r) \subset D(z_0; R)$ (en efecto, todo disco cerrado contenido en $D(z_0; R)$ está contenido en algún disco cerrado centrado en z_0 de radio menor que R).

• *El radio de convergencia de la derivada de una serie de potencias es igual al radio de convergencia de la serie.*

En efecto, por el teorema de Abel, basta ver que la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k (z-z_0)^{k-1}$ diverge si $|z - z_0| > R$, siendo R el radio de convergencia de la serie original $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$. Y, en efecto,

$$k\,|a_k|\,|z - z_0|^{k-1} = |z - z_0|^{-1} \cdot k\,|a_k|\,|z - z_0|^k \geqslant |z - z_0|^{-1} \cdot |a_k|\,|z - z_0|^k .$$

Por definición de R, el último término *no* está acotado cuando $|z - z_0| > R$. Luego el término general de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1}$ no tiende a cero si $|z - z_0| > R$, por lo que dicha serie diverge si $|z - z_0| > R$.

Aplicando repetidamente el teorema de Abel y el resultado anterior se obtiene el siguiente

Teorema 3.5. *Sea* $0 < R \leqslant \infty$ *el radio de convergencia de la serie* $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^k$. *Entonces* f *es infinitas veces derivable en* $D(z_0; R)$, *y se cumple*

$$\begin{aligned} f^{(n)}(z) &= \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1) a_k (z - z_0)^{k-n} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+n)(k+n-1)\cdots(k+1) a_{k+n} (z - z_0)^k, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ \ \forall z \in D(z_0; R), \end{aligned}$$

siendo el radio de convergencia de todas estas series de potencias igual a R. *Además, los coeficientes* a_n *vienen dados por*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \qquad \forall n = 0, 1, 2, \dots .$$

Corolario 3.6 (unicidad de las series de potencias)**.** *Si existe* $r > 0$ *tal que*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k, \qquad \forall z \in D(z_0, r),$$

entonces $a_k = b_k$ *para todo* $k = 0, 1, 2, \dots$.

Demostración. $a_k = b_k = f^{(k)}(z_0)/k!$, siendo $f(z)$ la suma de cualquiera de las dos series.

• *Los criterios del cociente y de la raíz son válidos en el campo complejo.* En efecto, consideremos la serie $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$, y supongamos que existe (o vale $+\infty$) $\lim_{n\to\infty} |z_{n+1}| / |z_n| \equiv c$. Si $c < 1$ la serie de reales no negativos $\sum_{k=0}^{\infty} |z_k|$ es convergente, por lo que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ converge absolutamente. Si, por el contrario, $c > 1$ (o $c = +\infty$) entonces $|z_n|$ no está acotado para $n \to \infty$, por lo que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ diverge (su término general no tiende a cero si $n \to \infty$). El criterio de la raíz se establece con un razonamiento análogo.

• Si existe (*o vale* $+\infty$) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, *entonces* $R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.

Análogamente, si existe (*o vale* $+\infty$) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ *entonces* $\dfrac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Probemos, por ejemplo, la primera fórmula. Por el criterio del cociente, si $z \neq z_0$ la serie $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\,|z - z_0|^k$ converge si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|\,|z - z_0|^{n+1}}{|a_n|\,|z - z_0|^n} = |z - z_0| \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1,$$

y diverge si

$$|z - z_0| \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1.$$

Análogamente (aplicando el criterio de la raíz) se prueba la segunda fórmula.

• *El radio de convergencia R de la serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ se puede calcular mediante la* fórmula de Hadamard

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Nota: si $x_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{x_k \mid k \geqslant n\}.$$

El límite superior siempre existe, vale infinito si y sólo si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ no está acotada superiormente, y coincide con el límite ordinario cuando dicho límite existe.

Ejemplo 3.7. Consideremos la **serie geométrica** de razón $z \in \mathbb{C}$, dada por $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$. Se trata de una serie de potencias centrada en $z_0 = 0$ y de radio de convergencia 1 (ya que $a_n = 1$ para todo n). Por tanto la serie es absolutamente convergente si el módulo de la razón es menor que uno, y divergente si es mayor que uno. Este resultado se puede probar de forma más elemental observando que si $|z| > 1$ el término general de la serie no está acotado (su módulo tiende a infinito para $n \to \infty$), por lo que la serie es divergente. Por el contrario, si $|z| < 1$ entonces la n-ésima suma parcial de la serie está dada por

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1 - z},$$

ya que $|z|^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ al ser $|z| < 1$. Nótese que la serie geométrica es divergente en todos los puntos de la frontera de su disco de convergencia, ya que si $|z| = 1$ el término general de la serie es de módulo 1, y por tanto no tiende a cero si n tiende a infinito. En definitiva,

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1 - z}, \qquad |z| < 1.$$

3.2.2 Teorema de Taylor

Si f es analítica el disco $D(z_0; r)$ (con $r > 0$), entonces f admite el desarrollo en **serie de Taylor**

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k, \qquad \forall z \in D(z_0; r). \tag{3.2}$$

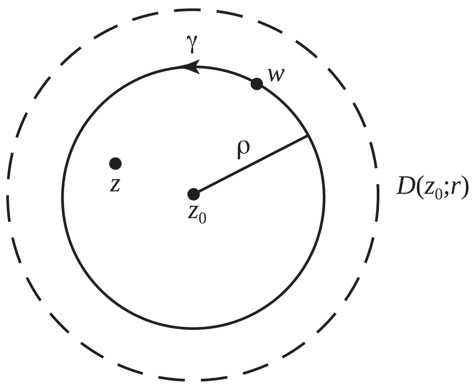

Figura 3.1: teorema de Taylor

Demostración. Fijemos un punto cualquiera $z \in D(z_0; r)$, y sea $\rho > 0$ tal que $|z - z_0| < \rho < r$. Si γ es la circunferencia de centro z_0 y radio ρ (orientada positivamente) se tiene, por la fórmula integral de Cauchy:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} \, dw.$$

Por otra parte,

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{w - z_0} \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{w - z_0}} = \frac{1}{w - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^k,$$

ya que $w \in \gamma \implies |z - z_0| < \rho = |w - z_0|$. Como $f(w)$ es analítica en γ, está acotada en γ (al ser γ un compacto), por lo que

$$\left| \frac{f(w)}{w - z_0} \right| \left| \frac{z - z_0}{w - z_0} \right|^k < \frac{M}{\rho} \left| \frac{z - z_0}{\rho} \right|^k, \qquad \forall w \in \gamma .$$

La serie *numérica* (es decir, independiente de w) $\frac{M}{\rho} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left| \frac{z - z_0}{\rho} \right|^k$ es convergente (se trata de una serie geométrica de razón menor que 1). Por el criterio M de Weierstrass, la serie

$$g(w) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(w)}{w - z_0} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^k$$

converge uniforme y absolutamente en γ. Integrando término a término obtenemos

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(w) \, dw &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} (z - z_0)^k \, dw \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^k \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} \, dw = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k, \end{aligned}$$

por la fórmula integral de Cauchy para las derivadas.

Sea f analítica en un abierto no vacío $A \subset \mathbb{C}$. Si $z_0 \in A$, definimos la **distancia de z_0 a la frontera ∂A de A** por

$$d(z_0; \partial A) = \inf\{|z - z_0| \mid z \in \partial A\} .$$

Es fácil probar que $d(z_0; \partial A) \in (0, \infty]$. Claramente, el disco abierto de centro z_0 y radio $d(z_0; \partial A)$ está contenido en A. Aplicando el teorema de Taylor a dicho disco se obtiene el siguiente

Corolario 3.8. *El radio de convergencia de la serie de Taylor centrada en $z_0 \in A$ de una función f analítica en A es* mayor o igual *que la distancia de z_0 a la frontera de A.*

El radio de convergencia de la serie de Taylor de f (3.2) puede ser *estrictamente mayor* que $d(z_0; \partial A)$. Por ejemplo, esto ocurre si $f(z) = \operatorname{Log} z$ y $z_0 = -1 + i$:

Ejercicio. Probar que la serie de Taylor de $\operatorname{Log} z$ centrada en $-1 + i$ tiene radio de convergencia $\sqrt{2}$, mientras que la distancia de $-1 + i$ a la frontera de la región de analiticidad de Log es igual 1. ¿A qué función converge la serie de Taylor anterior en $D(-1 + i; \sqrt{2})$?

Solución. La función $f(z) = \operatorname{Log} z$ es analítica en $A = \mathbb{C} - \left(\mathbb{R}^- \cup \{0\}\right)$, por lo que $\partial A = \mathbb{R}^- \cup \{0\}$. Si $z_0 = -1 + i$ entonces

$$d(z_0; \partial A) = 1 \equiv d .$$

Por otra parte,

$$f'(z) = \frac{1}{z} \implies f^{(k)}(z) = (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{z^k}, \qquad k = 1, 2, \dots .$$

Por tanto la serie de Taylor de f centrada en z_0 es

$$f(z) = \operatorname{Log}(z) = \operatorname{Log} z_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k z_0^k}(z - z_0)^k \tag{3.3}$$

(nótese que $\operatorname{Log}(z_0) = \frac{1}{2}\log 2 + \frac{3\pi i}{4}$, aunque este hecho no es importante). Por el criterio de la raíz, el radio de convergencia de esta serie es

$$R = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k|z_0|^k} = |z_0| \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = |z_0| = \sqrt{2} > d = 1 .$$

La serie de Taylor de Log centrada en $z_0 \equiv -1 + i$ converge a $F(z) = \log_{[0,2\pi)}$ en $D(z_0; \sqrt{2})$. En efecto, f y F claramente coinciden en $D(z_0; 1)$, por lo que

$$F^{(k)}(z_0) = f^{(k)}(z_0), \qquad k = 0, 1, \dots .$$

Por tanto la serie de Taylor de F centrada en z_0 coincide con la de f. Como F es analítica en el disco $D(z_0; \sqrt{2})$, $F(z)$ es igual a la suma de su serie de Taylor, es decir a la suma de la serie (3.3), en dicho disco.

Proposición 3.9. *Sea f analítica en A, sea $z_0 \in A$, y supongamos que f* no está acotada *en el disco de centro z_0 y radio $d(z_0; \partial A)$. Entonces el radio de convergencia de la serie de Taylor de f centrada en z_0 es* exactamente igual *a $d(z_0; \partial A)$.*

Demostración. Sea R el radio de convergencia de la serie de Taylor de f centrada en z_0, y supongamos que $R > d(z_0; \partial A) \equiv d$. Si

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k, \qquad |z - z_0| < R,$$

entonces $F = f$ en $D(z_0; d)$. Por otra parte, F está acotada en $\overline{D}(z_0; d)$, ya que este disco cerrado está enteramente contenido en $D(z_0; R)$, y F es continua (analítica) en este último disco. En particular, F está acotada en el disco abierto $D(z_0; d)$. Pero esto contradice la hipótesis, ya que $F = f$ en $D(z_0; d)$.

3.2.3 Principio de prolongación analítica

Lema 3.10. *Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función analítica en un punto $a \in \mathbb{C}$, y supongamos que $f(a) = 0$. Entonces o bien f se anula idénticamente en un entorno de a, o bien f no se anula en un entorno reducido de dicho punto.*

Demostración. Si f es analítica en a entonces f es derivable en un cierto entorno $D(a; r) \equiv D$ de a. Por el teorema de Taylor,

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (z - a)^k, \qquad |z - a| < r .$$

Si los coeficientes c_k son todos nulos, entonces $f = 0$ en D. En caso contrario, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$c_0 = \dots = c_{n-1} = 0, \quad c_n \neq 0,$$

y por tanto

$$f(z)=\sum_{k=n}^{\infty}c_k(z-a)^k=(z-a)^n\sum_{k=0}^{\infty}c_{k+n}(z-a)^k\equiv(z-a)^n g(z)\,,\qquad |z-a|<r\,.$$

La función $g(z)$ es analítica en D (ya que es la suma de una serie de potencias convergente en D), y $g(a)=c_n\neq 0$. Al ser g continua en a, existe $0<\delta<r$ tal que $g(z)\neq 0$ para todo $z\in D(a;\delta)$. En particular, $f(z)=(z-a)^n g(z)$ no se anula en el entorno reducido $D(a;\delta)-\{a\}$ de a.

• Sea, como antes, f analítica en $a\in\mathbb{C}$ y no idénticamente nula en un entorno de dicho punto. Si $f(a)=0$, por el lema anterior existe $n\in\mathbb{N}$ tal que

$$f(z)=(z-a)^n g(z)\,,$$

con g analítica y no nula en un entorno de a. Además, en este caso se tiene

$$f(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0,\quad f^{(n)}(a)\neq 0\,,$$

dado que $f^{(k)}(a)=k!c_k$. Se dice entonces que f tiene un **cero de orden** n en a.

Con ayuda del lema anterior se prueba la siguiente propiedad fundamental de las funciones analíticas, que es la base del principio de prolongación analítica:

Teorema 3.11. *Si $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ es analítica en una* región *A, y f se anula en un entorno de un punto $z_0\in A$, entonces f es idénticamente nula en todo A.*

Demostración. Supongamos que $f(w)=0$ para todo $w\in D(z_0;r)\equiv D\subset A$, y sea z un punto cualquiera de A. Al ser A una región, hay una curva continua $\gamma:[a,b]\to A$ tal que $\gamma(a)=z_0$, $\gamma(b)=z$. Definimos entonces

$$T=\sup\big\{t\in[a,b]\mid f\equiv 0 \text{ en un entorno de } \gamma(t)\big\}\equiv\sup B\,;$$

nótese que el supremo existe, al ser el conjunto B no vacío ($a\in B$) y acotado superiormente (por b). Por definición de supremo (y por la continuidad de γ) todo entorno de $\gamma(T)$ contiene algún punto de la forma $\gamma(s)$ con $s\in B$. Al ser $f\big(\gamma(s)\big)=0$ para todo $s\in B$, el punto T ha de pertenecer a B por el lema anterior. Veamos, por último, que $T=b$, lo que prueba (al ser $T\in B$) que

$$f(z)=f\big(\gamma(b)\big)=f\big(\gamma(T)\big)=0\,.$$

En efecto, como $T\in B$ la función f se anula idénticamente en un entorno $U\subset A$ de $f\big(\gamma(T)\big)$. Si fuera $T<b$, por la continuidad de γ existiría $\delta>0$ tal que

$$\gamma(t)\in U\,,\qquad \forall t\in(T-\delta,T+\delta)\,.$$

Pero entonces el intervalo $(T-\delta,T+\delta)$ estaría contenido en B, en contradicción con la definición de supremo.

Se dice que un punto $z\in C\subset\mathbb{C}$ es un punto **aislado** del conjunto C si hay un entorno reducido de z que no contiene ningún punto de C. Combinando el lema y el teorema anteriores se deduce inmediatamente el siguiente

Teorema 3.12. *Sea f analítica y no idénticamente nula en una región A, y sea $Z[f]$ el conjunto de los ceros de f en A. Entonces todos los puntos de $Z[f]$ son* aislados.

El Teorema 3.12 tiene numerosas aplicaciones en relación con el principio de *prolongación analítica*, de las cuales citaremos sólamente el siguiente resultado fundamental:

Proposición 3.13. *Sean f y g funciones analíticas en una* región *A, y supongamos que $f = g$ en un subconjunto $B \subset A$. Si B tiene algún* **punto de acumulación**[1] *perteneciente a A, entonces $f = g$ en A.*

Demostración. Supongamos que B tiene un punto de acumulación $z_0 \in A$. Por definición, todo entorno de z_0 contiene algún punto de B distinto de z_0, y por tanto existe una sucesión de puntos $z_k \in B - \{z_0\}$ ($k \in \mathbb{N}$) que converge a z_0. Consideremos la función $h = f - g$, analítica en A. Como $z_k \in B$ para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene $h(z_k) = f(z_k) - g(z_k) = 0$. Por continuidad,

$$h(z_0) = \lim_{k\to\infty} h(z_k) = 0\,,$$

y por tanto h tiene un cero no aislado en $z_0 \in A$. Por el teorema anterior, $h \equiv 0$ en A.

Corolario 3.14. *Sean f y g funciones analítica en una* región *A cuya intersección con el eje real es no vacía. Si $f = g$ en $\mathbb{R} \cap A$, entonces $f = g$ en A.*

Demostración. Las funciones f y g coinciden en el conjunto $B = \mathbb{R} \cap A$. Si $b \in B$, como A es abierto y $b \in A$ existe $r > 0$ tal que $D(b;r) \subset A$, por lo que el intervalo $(b-r, b+r) = D(b;r)\cap\mathbb{R}$ está contenido en $A \cap \mathbb{R} \equiv B$. Por tanto todos los puntos de B son de acumulación. Al ser B no vacío, por el teorema anterior $h = f - g$ ha de anularse idénticamente en todo A.

El resultado anterior permite extender al campo complejo la mayor parte de las identidades entre funciones elementales válidas en el campo real. Por ejemplo, en la Sección 1.2.2 se demostró que

$$\cos(3z) = \cos^3 z - 3\,\mathrm{sen}^2 z\, \cos z\,, \qquad \forall z \in \mathbb{R}\,.$$

Aplicando la proposición anterior se deduce inmediatamente que dicha igualdad es válida de hecho para todo $z \in \mathbb{C}$.

3.2.4 Teorema de Laurent

Una serie de la forma

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(z-z_0)^k} \tag{3.4}$$

es una serie de potencias en la variable $w = (z-z_0)^{-1}$. Por tanto, si ρ es el radio de convergencia de esta serie de potencias y $R = 1/\rho$ (con $0 \leqslant R \leqslant \infty$), la serie (3.4) converge si $|z - z_0| > R$ y diverge si $|z - z_0| < R$, siendo la convergencia de la serie absoluta y uniforme en el complemento de cualquier disco $D(z_0; r)$ con $r > R$. Además, la función f es analítica en la región de convergencia $|z - z_0| > R$, ya que es la composición de la serie de potencias $g(w) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} b_k\, w^k$, analítica para $|w| < \rho \equiv 1/R$, con la función $h(z) = (z-z_0)^{-1}$.

Consideremos a continuación la expresión más general

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k. \tag{3.5}$$

La primera serie convergerá absolutamente para $|z - z_0| > R_1$, y la segunda si $|z - z_0| < R_2$. Por tanto, f estará definida y será analítica en la **corona circular**

$$C(z_0; R_1, R_2) = \{z \mid R_1 < |z - z_0| < R_2\}\,,$$

[1]Por definición, $z \in \mathbb{C}$ es un *punto de acumulación* de un conjunto $C \subset C$ si todo entorno reducido de z contiene algún punto de C. Nótese que un punto $z \in C$ es punto de acumulación de C si y sólo no es aislado.

llamada **corona de convergencia**, siempre y cuando $0 \leqslant R_1 < R_2 \leqslant \infty$. Además (por los resultados sobre series de potencias) la convergencia de ambas series (3.5) es absoluta y uniforme en toda sub-corona cerrada contenida en $C(z_0; R_1, R_2)$. Una serie del tipo (3.5) se denomina **serie de Laurent** centrada en z_0.

Proposición 3.15. *Si la serie de Laurent*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

converge en la corona $C(z_0; R_1, R_2)$ (con $0 \leqslant R_1 < R_2 \leqslant \infty$), y γ_r es la circunferencia de centro z_0 y radio r (con $R_1 < r < R_2$) orientada positivamente, entonces se tiene:

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} , \qquad \forall n \in \mathbb{Z} .$$

Demostración. En efecto, por definición de f se tiene:

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_r} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-n-1} \, \mathrm{d}z .$$

La serie bajo el signo integral es una serie de Laurent convergente en la corona $C(z_0; R_1, R_2)$, y por tanto converge *uniformemente* en la circunferencia γ_r (por las propiedades de las series de Laurent). Aplicando el Lema 3.3 se obtiene:

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_r} (z - z_0)^{k-n-1} \, \mathrm{d}z .$$

Por el teorema fundamental del Cálculo, para todo entero $j \neq -1$ se tiene

$$\int_{\gamma_r} (z - z_0)^j \, \mathrm{d}z = \int_{\gamma_r} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left[\frac{(z - z_0)^{j+1}}{j+1} \right] \mathrm{d}z = 0 ,$$

y por tanto

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z = a_n \cdot \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_r} \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} = a_n \cdot n(\gamma_r, z_0) = a_n .$$

Corolario 3.16 (unicidad de las series de Laurent)**.** *Si*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k , \qquad R_1 < |z - z_0| < R_2 , \tag{3.6}$$

entonces $a_k = c_k$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Teorema de Laurent. *Sea f una función analítica en la corona $C(z_0; R_1, R_2)$, con $0 \leqslant R_1 < R_2 \leqslant \infty$. Si $R_1 < r < R_2$, sea γ_r la circunferencia de centro z_0 y radio r orientada positivamente, y definamos*

$$a_k = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \, \mathrm{d}z, \qquad \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{3.7}$$

Entonces f admite el ***desarrollo en serie de Laurent***

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k , \qquad R_1 < |z - z_0| < R_2 , \tag{3.8}$$

donde la serie del miembro derecho converge absoluta y uniformemente en cada subcorona cerrada contenida en $C(z_0; R_1, R_2)$.

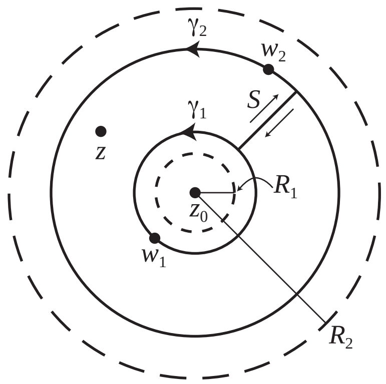

Figura 3.2: teorema de Laurent

Demostración. Sea $z \in C(z_0; R_1, R_2)$ y tomemos r_1 y r_2 tales que $R_1 < r_1 < |z - z_0| < r_2 < R_2$, de modo que la corona cerrada $\overline{A} = \overline{C}(z_0; r_1, r_2)$ está contenida en $C(z_0; R_1, R_2)$. Llamemos $\gamma_{r_1} \equiv \gamma_1$, $\gamma_{r_2} \equiv \gamma_2$. La curva cerrada $S + \gamma_2 - S - \gamma_1$ es homótopa a un punto en $C(z_0; R_1, R_2)$ (véase la fig. 3.2). Por la fórmula integral de Cauchy,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S+\gamma_2-S-\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw \equiv f_2(z) - f_1(z)\,.$$

La demostración del teorema de Laurent consiste, básicamente, en desarrollar f_1 y f_2 como series de potencias en $(z - z_0)^{-1}$ y $z - z_0$, respectivamente. Para f_2, repitiendo el razonamiento que se utilizó para probar el teorema de Taylor se obtiene

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} f(w) \frac{1}{w - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0}\right)^k dw = \sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^k \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}}\,dw,$$

donde el último paso está justificado por la convergencia uniforme de la serie para $w \in \gamma_2$ ($w \in \gamma_2 \implies |z - z_0| / |w - z_0| = |z - z_0| / r_2 < 1$). En cuanto a f_1, basta observar que si $r_1 < |z - z_0|$ se tiene

$$\frac{1}{w - z} = -\frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \dfrac{w - z_0}{z - z_0}} = -\frac{1}{z - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{w - z_0}{z - z_0}\right)^k.$$

De nuevo, la convergencia es uniforme para $w \in \gamma_1$ ($w \in \gamma_1 \implies |w - z_0| / |z - z_0| = r_1 / |z - z_0| < 1$), por lo que

$$\begin{aligned} -f_1(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(w) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(w - z_0)^k}{(z - z_0)^{k+1}}\,dw = \sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^{-k-1} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(w)(w - z_0)^k\,dw \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} (z - z_0)^n \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\,dw. \end{aligned}$$

Por el teorema de la deformación, $\int_{\gamma_r} f(w)(w - z_0)^{-n-1}\,dw$ es independiente de r si $R_1 < r < R_2$, lo que prueba (3.7)–(3.8). La corona de convergencia de la serie de Laurent (3.7)–(3.8) es por lo menos $C(z_0; R_1, R_2)$; por tanto, de las propiedades de las series de Laurent se deduce que la convergencia de dicha serie es absoluta y uniforme en toda subcorona cerrada centrada en z_0 y contenida en $C(z_0; R_1, R_2)$.

3.2.5 Clasificación de singularidades aisladas

Definición 3.17. Una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tiene una **singularidad aislada** en $z_0 \in \mathbb{C}$ si f no es derivable en z_0, pero es analítica en algún entorno reducido $C(z_0; 0, r)$ (con $r > 0$) de z_0.

Por el teorema de Laurent, si f tiene una singularidad aislada en z_0 existe $r > 0$ tal que f admite un desarrollo en serie de Laurent (3.5) en $C(z_0; 0, r)$:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(z - z_0)^k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \qquad \text{si } 0 < |z - z_0| < r.$$

i) Si $b_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, se dice que z_0 es una **singularidad evitable** de f.

ii) Si $b_p \neq 0$ y $b_k = 0$ para todo $k > p$, el punto z_0 es un **polo de orden** p para f.

iii) Finalmente, si existen infinitos coeficientes $b_k \neq 0$ se dice que f tiene una **singularidad esencial** en z_0.

Definición 3.18. La serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k (z - z_0)^{-k}$ se denomina **parte principal** del desarrollo de Laurent de f en z_0. El **residuo** de f en z_0 es

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = b_1 .$$

- Si f tiene una singularidad evitable en z_0 entonces existe el límite

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = a_0 . \tag{3.9}$$

Definiendo $f(z_0) = a_0$, la función f es analítica en $D(z_0; r)$ (ya que la serie de potencias que representa a f para $0 < |z - z_0| < r$ converge en dicho disco). Recíprocamente, si f es analítica en un entorno reducido de z_0 y se verifica (3.9) entonces f tiene una singularidad evitable en z_0. En efecto, (3.9) implica que

$$\lim_{z \to z_0} \big[(z - z_0) f(z)\big] = 0 . \tag{3.10}$$

Aplicando el teorema de Cauchy generalizado se obtiene entonces

$$a_{-m} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma f(z)(z - z_0)^{m-1} \mathrm{d}z = 0 , \qquad \forall m \in \mathbb{N} .$$

Por tanto:

f tiene una singularidad evitable en z_0 si y sólo si $f(z)$ tiene límite cuando z tiende a z_0.

De hecho, es válido el siguiente resultado, ligeramente más general:

Proposición 3.19. *Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ una singularidad aislada de $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Entonces f tiene una singularidad evitable en z_0 si y sólo se verifica la condición (3.10).*

Demostración. En efecto, si f tiene una singularidad evitable en z_0 entonces f tiene límite en z_0, lo cual implica (3.10). Recíprocamente, si se verifica esta condición entonces el teorema de Cauchy generalizado implica que todos los coeficientes a_k con $k < 0$ del desarrollo de Laurent de f centrado en z_0 son nulos.

Ejemplo 3.20. La función $f(z) = \operatorname{sen} z/z$, definida para todo $z \neq 0$, tiene una singularidad aislada en el origen. En efecto, aunque formalmente f no está definida en $z = 0$ se cumple la condición (3.10), ya que $\lim_{z\to 0}[z f(z)] = \lim_{z\to 0} \operatorname{sen} z = 0$. La serie de Laurent de f en la corona de analiticidad $C(0; 0, \infty)$ se calcula fácilmente a partir de la serie de Taylor de $\operatorname{sen} z$:

$$f(z) = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+1)!}, \qquad z \neq 0.$$

Si definimos $f(0) = \lim_{z\to 0} f(z) = 1$, la función f está dada por la suma de la serie anterior para todo $z \in \mathbb{C}$, y es por tanto entera.

- f tiene un polo de orden p en z_0 si y sólo si existe $r > 0$ tal que

$$0 < |z - z_0| < r \implies f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^p}\bigg(b_p + b_{p-1}(z-z_0) + \cdots + b_1(z-z_0)^{p-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^{k+p}\bigg) \equiv \frac{F(z)}{(z-z_0)^p},$$

siendo F analítica en $D(z_0; r)$ y $F(z_0) = b_p \neq 0$. Por tanto:

f tiene un polo de orden p en z_0 si y sólo si $(z - z_0)^p f(z)$ tiene una singularidad evitable en z_0, con

$$\lim_{z\to z_0}\big[(z-z_0)^p f(z)\big] \neq 0. \tag{3.11}$$

De hecho, puede probarse un resultado ligeramente más general:

Proposición 3.21. *Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica en un entorno reducido de z_0. Entonces f tiene un polo de orden p en z_0 si y sólo si se cumple la condición* (3.11).

Demostración. En efecto, por lo visto anteriormente la condición (3.11) se cumple cuando f tiene un polo de orden p en z_0. Recíprocamente, si se verifica dicha condición es claro que z_0 es una singularidad aislada de f, ya que (3.11) claramente implica que f no tiene limite cuando $z \to z_0$, y por tanto no es derivable en dicho punto. Además, de la Proposición 3.19 aplicada a $(z - z_0)^p f(z)$ se sigue que $(z - z_0)^p f(z)$ tiene una singularidad evitable en z_0. La observación que precede a esta proposición implica entonces que f tiene un polo de orden p en z_0.

- Si f tiene un polo de orden p en z_0, entonces

$$f(z) = \frac{F(z)}{(z-z_0)^p}, \qquad 0 < |z - z_0| < r,$$

con F analítica en $D(z_0; r)$ y $F(z_0) = b_p \neq 0$. Por continuidad, existe $0 < \delta \leqslant r$ tal que $F(z) \neq 0$ si $|z - z_0| < \delta$, y por tanto

$$\frac{1}{f(z)} = (z-z_0)^p \frac{1}{F(z)}, \qquad 0 < |z - z_0| < \delta,$$

con $1/F$ analítica y no nula en $D(z_0; \delta)$. Luego $1/f$ tiene una singularidad evitable (cero de orden p) en z_0. Recíprocamente (véase la Sección 3.2.3) si f tiene un cero de orden $p > 0$ en z_0 entonces $1/f$ tiene un polo de orden p en z_0. Por tanto:

f tiene un polo de orden p en z_0 si y sólo si la función $g(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)}, & z \neq z_0 \\ 0, & z = z_0 \end{cases}$ *tiene un cero de orden p en z_0.*

Ejemplo 3.22. Consideremos la función $f(z) = \csc^2 z$, analítica para $z \neq k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. En este caso la función $g(z) = \operatorname{sen}^2 z$ tiene un cero doble en cada una de las singularidades $z = k\pi$ de f, ya que $\operatorname{sen} z$ tiene un cero simple[2] en dichos puntos (pues $\operatorname{sen}(k\pi) = 0$, $\cos(k\pi) = (-1)^k \neq 0$). Por tanto, f tiene un polo de orden dos en cada uno de los puntos $z = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

• Supongamos que $f = g/h$, donde g y h son funciones analíticas en z_0 con ceros de orden $n \geqslant 0$ y $m \geqslant 1$, respectivamente, en dicho punto. Entonces existe $r > 0$ tal que

$$|z - z_0| < r \quad \Longrightarrow \quad g(z) = (z - z_0)^n G(z)\,, \quad h(z) = (z - z_0)^m H(z)\,,$$

con G y H analíticas y no nulas en $D(z_0; r)$. Por tanto

$$0 < |z - z_0| < r \Longrightarrow f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{(z - z_0)^n G(z)}{(z - z_0)^m H(z)} \equiv (z - z_0)^{n-m} R(z),$$

siendo $R \equiv G/H$ analítica (cociente de funciones analíticas con $H(z) \neq 0$) y no nula en z_0 (ya que $G(z_0) \neq 0$). Luego:

i) Si $n \geqslant m$, f tiene una singularidad evitable (cero de orden $n - m$) en z_0.

ii) Si $n < m$, f tiene un polo de orden $m - n$ en z_0.

En particular, de lo anterior se deduce que *las singularidades del cociente de dos funciones analíticas no idénticamente nulas sólo pueden ser polos o singularidades evitables.*

Proposición 3.23. *Supongamos que $f = g \cdot h$, con g analítica en un entorno de z_0 y $g(z_0) \neq 0$, y sea z_0 una singularidad aislada de h. Entonces z_0 es una singularidad aislada de f, del mismo tipo que lo es para h.*

Demostración. En efecto, es claro que f tiene una singularidad aislada en z_0, ya que si h es analítica en $C(z_0; 0, r)$ ($r > 0$) y g es analítica en $D(z_0; r)$ entonces $f \equiv g \cdot h$ es analítica en $C(z_0; 0, r)$. Además, f *no* puede ser derivable en z_0, ya que en tal caso $h = f/g$ sería derivable en dicho punto (al ser el cociente de dos funciones derivables en z_0, con denominador no nulo en z_0).

Si z_0 es una singularidad evitable de h entonces h coincide con una función analítica en un entorno reducido de z_0, y por tanto lo mismo ocurre con f. Luego en este caso f tiene también una singularidad evitable en z_0. Por otra parte, si h tiene un polo de orden p en z_0 entonces $h(z) = (z - z_0)^{-p} H(z)$, con H analítica en un entorno de z_0 y $H(z_0) \neq 0 \Longrightarrow f(z) = (z - z_0)^{-p} \cdot g(z)\, H(z) \equiv (z - z_0)^{-p} F(z)$, con $F = gH$ analítica en un entorno de z_0 y $F(z_0) = g(z_0) H(z_0) \neq 0 \Longrightarrow f$ tiene un polo de orden p en z_0. Por último, si h tiene una singularidad esencial en z_0 entonces lo mismo ha de ocurrir con f, ya que en caso contrario $h = \frac{1}{g} \cdot f$ tendría una singularidad evitable ó un polo en z_0 (nótese que $1/g$ es analítica en un entorno de z_0, al ser $g(z_0) \neq 0$).

Ejemplo 3.24. La función $f(z) = e^{1/z}$ es analítica en $\mathbb{C} - \{0\}$, y tiene una singularidad esencial en el origen. En efecto,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{z^k}\,, \qquad \forall z \neq 0\,.$$

Por la unicidad de las series de Laurent, este es el desarrollo de Laurent de f en $C(0; 0, \infty)$. En particular, al ser

$$b_k = \frac{1}{k!} \neq 0\,, \qquad \forall k = 1, 2, \ldots\,,$$

[2] Es inmediato probar que si $h(z)$ tiene un cero simple en un punto z_0 y $n \in \mathbb{N}$ entonces $h(z)^n$ tiene un cero de orden n en dicho punto.

$z = 0$ es una singularidad esencial de f. Consideremos a continuación la función $f(z) = \mathrm{e}^{\cot z}$, analítica en todo el plano complejo salvo en los puntos $z = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Estos puntos son polos simples de $\cot z = \cos z/\operatorname{sen} z$ (ceros simples de $\operatorname{sen} z$ en que no se anula el $\cos z$). Por tanto, en un entorno reducido de $k\pi$ se tiene

$$\cot z = \frac{c_k}{z - k\pi} + g_k(z)\,,$$

con g_k analítica en dicho entorno[3]. En consecuencia,

$$\mathrm{e}^{\cot z} = \mathrm{e}^{\frac{c_k}{z-k\pi}}\,\mathrm{e}^{g_k(z)}\,,$$

con e^{g_k} analítica en $k\pi$ (composición de funciones analíticas) y no nula en dicho punto. Por la Proposición 3.23, f tiene una singularidad esencial en $k\pi$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

- *Si f tiene un polo en z_0 entonces*

$$\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty; \tag{3.12}$$

en particular, $|f|$ no está acotado en un entorno reducido de z_0. Sin embargo, (3.12) *no* se cumple si f tiene una singularidad *esencial* en z_0. Por ejemplo, $f(z) = \mathrm{e}^{1/z}$ tiene una singularidad esencial en el origen, y $f(z_n) = 1$ si $z_n = 1/(2n\pi\mathrm{i}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De hecho, la proposición siguiente implica que (3.12) *sólo se verifica si f tiene un polo en z_0*:

Teorema de Casorati–Weierstrass. *Si f tiene una* singularidad esencial *en z_0 y $a \in \mathbb{C}$, existe una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $z_n \to z_0$ y $f(z_n) \to a$.*

Nota: de hecho, puede probarse (**teorema grande de Picard**) que para todo número complejo a, con a lo sumo una excepción, se puede encontrar una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $z_n \to z_0$ y $f(z_n) = a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (cf. $f(z) = \mathrm{e}^{1/z}$).

[3] Por el teorema de Laurent, la fórmula anterior es válida en si $0 < |z - k\pi| < \pi$.

Capítulo 4

Teorema de los residuos

4.1 Teorema de los residuos

Sean $z_1, \ldots, z_n$ n puntos distintos pertenecientes a una región A, y sea γ una curva cerrada (C^1 a trozos) homótopa a un punto en A y tal que ningún z_i está sobre γ. Si f es analítica en $A - \{z_1, \ldots z_n\}$ entonces se tiene:

$$\int_\gamma f = 2\pi \mathrm{i} \sum_{k=1}^{n} n(\gamma, z_k)\ \mathrm{Res}(f; z_k).$$

Demostración. Por el teorema de Laurent, para cada $i = 1, \ldots, n$ hay un entorno reducido $C(z_i; 0, \varepsilon_i)$ de z_i en el que es válido el desarrollo

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik}(z - z_i)^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{ik}(z - z_i)^k \equiv S_i(z) + f_i(z), \qquad 0 < |z - z_i| < \varepsilon_i\,,$$

con f_i analítica en el disco $D(z_i; \varepsilon_i)$. Además, por las propiedades de las series de Laurent la serie que define la parte principal $S_i(z)$ converge absolutamente a una función analítica en $\mathbb{C} - \{z_i\}$, siendo la convergencia *uniforme* en el exterior de todo disco abierto centrado en z_i.

Veamos a continuación que la función

$$g(z) = f(z) - \sum_{k=1}^{n} S_k(z)\,,$$

que claramente es analítica en $A - \{z_1, \ldots, z_n\}$, tiene en los puntos z_i ($i = 1, \ldots, n$) singularidades evitables. En efecto, para cada $i = 1, \ldots, n$ se tiene

$$g(z) = f_i(z) + S_i(z) - \sum_{k=1}^{n} S_k(z) = f_i(z) - \sum_{1 \leqslant k \neq i \leqslant n} S_k(z)\,,$$

desarrollo válido en un entorno reducido suficientemente pequeño de z_i. Definiendo $g(z_i) = \lim_{z \to z_i} g(z)$, la función g es por tanto *analítica* en todo A, y por el teorema de Cauchy

$$\int_\gamma g = 0 \implies \int_\gamma f = \sum_{k=1}^{n} \int_\gamma S_k.$$

Consideremos ahora la integral $\int_\gamma S_k$. Al ser $\mathbb{C} - \gamma$ abierto (en efecto, γ es compacto, y por tanto cerrado, al ser la imagen de un intervalo compacto $[a, b]$ bajo la aplicación continua que parametriza la curva), existe $\delta_k > 0$ tal que $D(z_k;\delta_k) \cap \gamma = \emptyset$. Por tanto, la serie de Laurent que define a S_k es uniformemente convergente en γ, lo que en virtud del Lema 3.3 nos permite escribir

$$\int_\gamma S_k \equiv \int_\gamma \sum_{j=1}^{\infty} b_{kj}(z-z_k)^{-j}\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{\infty} \int_\gamma b_{kj}(z-z_k)^{-j}\,\mathrm{d}z\,.$$

Por el teorema fundamental del Cálculo, si $j = 2, 3, \dots$ se tiene

$$\int_\gamma (z-z_j)^{-j}\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{(z-z_j)^{1-j}}{1-j}\right)\mathrm{d}z = 0\,, \qquad j = 2, 3, \dots\,.$$

Por tanto

$$\int_\gamma S_k = \int_\gamma b_{k1}(z-z_k)^{-1}\,\mathrm{d}z = b_{k1}\cdot 2\pi\mathrm{i}\,n(\gamma,z_k) \equiv 2\pi\mathrm{i}\cdot n(\gamma,z_k)\ \mathrm{Res}(f;z_k),$$

donde hemos utilizado la definición del índice (cf. la Sección 2.3.1). Esto completa la demostración.

4.2 Métodos para el cálculo de residuos

• Sea $f(z) = g(z)/h(z)$, con g, h analíticas en un entorno de z_0, $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$ y $h'(z_0) \neq 0$. Entonces f tiene un *polo simple* en z_0 (cero simple del denominador en que el numerador no se anula), con residuo

$$\mathrm{Res}(f;z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

En efecto, por el teorema de Taylor en un entorno de z_0 es válido el desarrollo

$$h(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k = (z-z_0)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^{k-1} \equiv (z-z_0)\,H(z),$$

con H analítica en z_0 (serie de potencias convergente en un entorno de z_0) y $H(z_0) = h'(z_0)$. Por tanto

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)}\cdot\frac{g(z)}{H(z)}.$$

Como g/H es analítica en z_0 (al ser $H(z_0) = h'(z_0) \neq 0$), aplicando de nuevo el teorema de Taylor se obtiene el desarrollo

$$\frac{g(z)}{H(z)} = \frac{g(z_0)}{H(z_0)} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(z-z_0)^k = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(z-z_0)^k\,,$$

y por tanto

$$f(z) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}\,\frac{1}{z-z_0} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^{k-1}\,,$$

de donde se deduce que el residuo de f en z_0 es efectivamente igual a $\dfrac{g(z_0)}{h'(z_0)}$.

Ejemplo 4.1. Hallemos el valor de la integral

$$I = \int_{|z|=8} \tan z\,\mathrm{d}z\,.$$

La función $f(z) = \tan z$ es singular en los puntos $z_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, con $k \in \mathbb{Z}$, ninguno de los cuales está sobre la circunferencia $|z| = 8$. Además, en el interior de cualquier disco abierto hay obviamente un número finito de singularidades de f, por lo que podemos aplicar el teorema de los residuos tomando como A un disco de radio mayor que 8. De esta forma obtenemos

$$I = 2\pi \mathrm{i} \sum_{|z_k|<8} \operatorname{Res}(\tan; z_k) = 2\pi \mathrm{i} \sum_{k=-3}^{2} \operatorname{Res}(\tan; z_k)\,,$$

ya que $\frac{5\pi}{2} < 8 < \frac{7\pi}{2}$. Para calcular el residuo de tan en la singularidad z_k, basta observar que dicha singularidad es un polo simple (ya que $\operatorname{sen} z_k \neq 0$ y $\cos'(z_k) = -\operatorname{sen} z_k \neq 0$), por lo que

$$\operatorname{Res}(\tan; z_k) = \frac{\operatorname{sen} z_k}{-\operatorname{sen} z_k} = -1\,.$$

Por tanto $I = 2\pi \mathrm{i} \cdot (-6) = -12\pi \mathrm{i}\,.$

- Si f tiene un *polo de orden n* en z_0 entonces

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \big[(z-z_0)^n\, f(z)\big]\,. \tag{4.1}$$

En efecto, en un entorno reducido de z_0 es válido el desarrollo de Laurent

$$f(z) = \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \frac{b_{n-1}}{(z-z_0)^{n-1}} + \cdots + \frac{b_1}{z-z_0} + g(z),$$

con g analítica en z_0 (serie de potencias convergente). Por tanto, en un entorno reducido de z_0 se cumple

$$(z-z_0)^n f(z) = b_n + b_{n-1}(z-z_0) + \cdots + b_1(z-z_0)^{n-1} + G(z) \equiv F(z), \tag{4.2}$$

donde $G(z) = (z-z_0)^n g(z)$ es analítica en z_0 y tiene un cero de orden $\geqslant n$ en dicho punto, y F es analítica en z_0. Por el teorema de Taylor,

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f; z_0) = b_1 = \frac{F^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!} &= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} F^{(n-1)}(z)\\ &= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \big[(z-z_0)^n\, f(z)\big]\,.\end{aligned}$$

Nota: de la ec. (4.2) se sigue que $(z-z_0)^n f(z)$ tiene una singularidad evitable en z_0, por lo que muchas veces la fórmula (4.1) se escribe (con un cierto abuso de notación) en la forma más sencilla

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \Big[(z-z_0)^n\, f(z)\Big]\Big|_{z=z_0}.$$

Ejercicio. Si $f = g/h$ con g y h analíticas en z_0, $h(z_0) = h'(z_0) = 0$ y $g(z_0) \neq 0$, $h''(z_0) \neq 0$, probar que f tiene un *polo de orden* 2 en z_0, con residuo

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = 2\frac{g'(z_0)}{h''(z_0)} - \frac{2}{3}\frac{g(z_0)\, h'''(z_0)}{[h''(z_0)]^2}.$$

Solución. La función f tiene claramente un polo doble en z_0, por lo que podemos aplicar la fórmula (4.1). Por el teorema de Taylor, en un entorno reducido de z_0 es válido el desarrollo

$$\frac{h(z)}{(z-z_0)^2} = h_2 + h_3(z-z_0) + H(z)\,,$$

con

$$h_2 = \frac{1}{2}\, h''(z_0)\,, \qquad h_3 = \frac{1}{6}\, h'''(z_0) \tag{4.3}$$

y H analítica en z_0 y con un cero de orden por lo menos 2 en dicho punto. Aplicando (4.1) se obtiene entonces

$$\operatorname{Res}(f\,;z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{g(z)}{h_2 + h_3(z-z_0) + H(z)}\right] = \frac{h_2\, g'(z_0) - h_3\, g(z_0)}{h_2^2}\,.$$

Teniendo en cuenta la ec. (4.3) se obtiene la fórmula anunciada.

4.3 Cálculo de integrales definidas

En esta sección utilizaremos la notación

$$H = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geqslant 0\}\,, \qquad L = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \leqslant 0\}$$

para denotar los semiplanos superior e inferior, respectivamente.

4.3.1 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$

- **Condiciones:**
  i) f analítica en $H - \{z_1, \dots, z_n\}$, con $z_k \in H - \mathbb{R}$ (es decir, f sólo puede tener a lo sumo un número *finito* de singularidades en H, todas ellas *fuera del eje real*)

  ii) $\exists p > 1$, $R > 0$ y $M > 0$ t.q.

$$|f(z)| < \frac{M}{|z|^p}\,, \qquad \forall z \in H, \;\; |z| > R$$

- **Resultado:** $\displaystyle 2\pi\mathrm{i} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f\,;z_k)\,.$

(Nótese que la suma está extendida a las singularidades de f en el semiplano superior H.)

Demostración. Sea γ_r la semicircunferencia de radio r orientada positivamente, con $r > R$ lo suficientemente grande para que todas las singularidades de f en H estén en el interior de γ_r (véase la fig. 4.1).

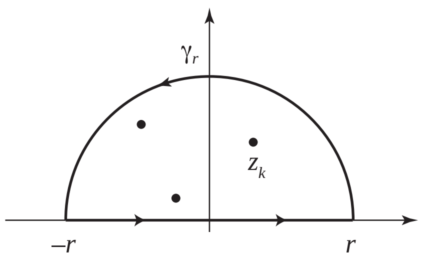

Figura 4.1: semicircunferencia γ_r

Al ser $n(\gamma_r, z_k) = 1$ para $k = 1, \dots, n$, por el teorema de los residuos se tiene:

$$\int_{\gamma_r} f = 2\pi\mathrm{i} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f\,;z_k) = \int_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta. \tag{4.4}$$

Como $|f(x)| < M\,|x|^{-p}$ con $p > 1$ para $|x| > R$, la primera integral del miembro derecho converge a $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ cuando $r \to \infty$ (criterio de comparación). En cuanto a la segunda, su módulo está acotado por $M\pi r^{1-p}$, que tiende a 0 cuando $r \to \infty$. Haciendo r tender a infinito en (4.4) se obtiene por tanto el resultado anunciado.

- **Notas:**

  i) Si f es analítica en $L - \{z_1, \dots, z_n\}$, con $z_k \in L - \mathbb{R}$, y se cumple la condición ii) de la página anterior en el semiplano inferior L, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = -2\pi\mathrm{i} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f; z_k)\,.$$

  El signo menos se debe a que en este caso γ_r es la semicircunferencia de centro 0 y radio r en el semiplano inferior recorrida en sentido *horario*, y por tanto $n(\gamma_r, z_k) = -1$.

  ii) Si $f = P/Q$, con $P \neq 0$ y Q polinomios y $Q(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces f cumple las condiciones anteriores (tanto en H como en L) si y sólo si $\deg Q \geqslant \deg P + 2$.

- **Ejemplo:** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+4x+13)^2}$.

En este ejemplo

$$f(z) = \frac{z}{(z^2+4z+13)^2} \equiv \frac{P(z)}{Q(z)}\,,$$

con singularidades (polos dobles) en los ceros $z = -2 \pm 3\mathrm{i} \notin \mathbb{R}$ del denominador Q. Como $\deg Q = 4 \geqslant \deg P + 2 = 3$, se tiene

$$I \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+4x+13)^2} = 2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}(f; -2+3\mathrm{i}).$$

La función f tiene un polo doble en $z_0 \equiv -2+3\mathrm{i}$, con residuo (cf. (4.1))

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\Big[(z-z_0)^2 f(z)\Big]\Big|_{z=z_0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\frac{z}{(z+2+3\mathrm{i})^2}\bigg|_{z=-2+3\mathrm{i}} = \frac{1}{(6\mathrm{i})^2} - \frac{2(-2+3\mathrm{i})}{(6\mathrm{i})^3} = \frac{4}{(6\mathrm{i})^3} = \frac{4\mathrm{i}}{6^3}\,.$$

Por tanto $I = -\dfrac{8\pi}{6^3} = -\dfrac{\pi}{27}$.

4.3.2 Integrales trigonométricas: $\displaystyle\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\,\mathrm{d}\theta$

- **Condiciones:** $R(x, y)$ función racional de dos variables cuyo denominador no se anula en la circunferencia unidad $x^2 + y^2 = 1$.

- **Resultado:** $\displaystyle 2\pi\mathrm{i} \sum_{|z_k|<1} \operatorname{Res}(f; z_k)$, siendo

$$f(z) = \frac{1}{\mathrm{i}z} R\left(\frac{1}{2}\left(z+z^{-1}\right), \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z-z^{-1}\right)\right)$$

y denotando mediante z_k las singularidades de f (necesariamente en número finito, ya que f es una función racional).

Demostración. La función $f(z)$ no tiene singularidades en la circunferencia unidad γ, ya que si $\theta \in [0, 2\pi)$ entonces $f(e^{i\theta}) = -ie^{-i\theta} R(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. Parametrizando $\int_\gamma f$ en la forma usual ($z = e^{i\theta}$) se obtiene

$$\int_\gamma f = \int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\, d\theta\,.$$

El resultado anunciado se sigue del teorema de los residuos, ya que al ser f una función racional de z tiene un número finito de singularidades en el interior de la circunferencia unidad.

- **Ejemplo:** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5 - 3\operatorname{sen}\theta)^2}\,.$

En este caso

$$f(z) = \frac{1}{iz\left[5 - \frac{3}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right]^2} = \frac{4iz}{(3z^2 - 10iz - 3)^2} = \frac{4iz}{9\left(z - \frac{i}{3}\right)^2 (z - 3i)^2}\,.$$

Por tanto, la integral vale

$$I = -\frac{8\pi}{9} \operatorname{Res}\left(g; \frac{i}{3}\right), \quad \text{con} \quad g(z) = \frac{z}{(z - 3i)^2} \cdot \frac{1}{\left(z - \frac{i}{3}\right)^2} \equiv \frac{h(z)}{\left(z - \frac{i}{3}\right)^2}\,.$$

El residuo es igual a

$$h'(i/3) = \frac{1}{\left(\frac{i}{3} - 3i\right)^2} - \frac{\frac{2i}{3}}{\left(\frac{i}{3} - 3i\right)^3} = \frac{\frac{i}{3} - 3i - \frac{2i}{3}}{\left(\frac{i}{3} - 3i\right)^3} = \frac{-\frac{10i}{3}}{-\frac{8^3}{3^3} i^3} = -\frac{10 \cdot 3^2}{8^3}\,.$$

Luego $I = \dfrac{10\pi}{8^2} = \dfrac{5\pi}{32}\,.$

4.3.3 Transformadas de Fourier: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(x)\, dx$

- **Condiciones:**

  i) $\omega > 0$

  ii) f analítica en $H - \{z_1, \ldots, z_n\}$, con $z_k \in H - \mathbb{R}$ (es decir, f tiene a lo sumo un número *finito* de singularidades en el semiplano superior, y ninguna de ellas pertenece al eje real)

  iii) $|f(z)| \to 0$ cuando $|z| \to \infty$ en H, es decir

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists R > 0 \ \text{ t.q. } \ |z| > R,\ z \in H \Longrightarrow |f(z)| < \varepsilon$$

- **Resultado:** $\displaystyle 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left(e^{i\omega z} f(z); z_k\right).$

(De nuevo, la suma sólo está extendida a las singularidades de f en el semiplano superior H.)

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, sea γ el rectángulo de vértices $-x_1, x_2, x_2 + iy_1, -x_1 + iy_1$ (orientado positivamente), con x_1, x_2, y_1 mayores que R y lo suficientemente grandes para que todas las singularidades de f en H estén en el interior de γ (fig. 4.2).

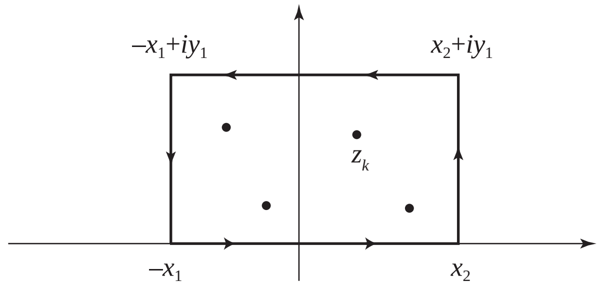

Figura 4.2: rectángulo γ

Entonces

$$\begin{aligned}\int_\gamma e^{i\omega z} f(z)\,dz &= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left(e^{i\omega z} f(z); z_k\right)\\ &= \int_{-x_1}^{x_2} e^{i\omega x} f(x)\,dx + i\int_0^{y_1} e^{i\omega(x_2+iy)} f(x_2+iy)\,dy\\ &\quad - \int_{-x_1}^{x_2} e^{i\omega(x+iy_1)} f(x+iy_1)\,dx - i\int_0^{y_1} e^{i\omega(-x_1+iy)} f(-x_1+iy)\,dy\\ &\equiv I_1 + I_2 - I_3 - I_4.\end{aligned}$$

Si y_1 se escoge lo suficientemente grande para que $(x_1 + x_2)e^{-\omega y_1} < 1/\omega$ se tiene:

$$\begin{aligned}|I_2| &\leqslant \varepsilon \int_0^{y_1} e^{-\omega y}\, dy = \frac{\varepsilon}{\omega}(1 - e^{-\omega y_1}) < \frac{\varepsilon}{\omega},\\ |I_3| &\leqslant \varepsilon\,(x_1 + x_2)\,e^{-\omega y_1} < \frac{\varepsilon}{\omega},\\ |I_4| &\leqslant \frac{\varepsilon}{\omega}(1 - e^{-\omega y_1}) < \frac{\varepsilon}{\omega}\,.\end{aligned}$$

Por tanto

$$\left| \int_{-x_1}^{x_2} e^{i\omega x} f(x)\,dx - 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left(e^{i\omega z} f(z); z_k\right) \right| < \frac{3\varepsilon}{\omega}\,.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, haciendo x_1 y x_2 tender a infinito por separado se demuestra que la integral converge al resultado deseado.

- **Notas:**

  i) Si $\omega < 0$ y f cumple condiciones análogas a ii)–iii) en el semiplano *inferior* L se prueba de forma semejante que

  $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(x)\,dx = -2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left(e^{i\omega z} f(z); z_k\right),$$

  donde $z_1, \dots, z_n$ son las singularidades de f en L (todas ellas con parte imaginaria negativa)

  ii) $f = P/Q$, con $P \neq 0$ y Q polinomios y $Q(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, cumple las condiciones anteriores (tanto en H como en L) si y sólo si $\deg Q \geqslant \deg P + 1$.

- **Ejemplo:** $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos(\omega x)}{x^4 + x^2 + 1}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega x)}{x^4 + x^2 + 1}\,dx \equiv I(\omega), \quad \omega > 0\,.$

La integral es la parte real de

$$J(\omega) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{x^4 + x^2 + 1}\, dx\,.$$

De hecho, al ser $\operatorname{sen}(\omega x)$ impar $\operatorname{Im} J(\omega) = 0$, y por tanto $I(\omega) = J(\omega)$. Podemos aplicar el resultado anterior a la función racional $f(z) = \frac{1}{2}(z^4 + z^2 + 1)^{-1}$ en el semiplano superior (f no tiene singularidades en el eje real). Las singularidades (polos) de f se calculan resolviendo la ecuación

$$z^4 + z^2 + 1 = 0 \iff z^2 = \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3}) = e^{\pm\frac{2\pi i}{3}} \iff z = \pm e^{\pm\frac{\pi i}{3}}\,.$$

Las únicas singularidades en el semiplano superior son

$$z_1 = e^{\frac{\pi i}{3}} = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}), \qquad z_2 = -e^{-\frac{\pi i}{3}} = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}) = -\bar{z}_1\,.$$

El residuo de $e^{i\omega z} f(z)$ en cualquiera de estas singularidades z_k se calcula fácilmente, ya que $e^{i\omega z} f(z) = g(z)/h(z)$ con $g(z_k) \neq 0$, $h(z_k) = 0$ y $h'(z_k) \neq 0$:

$$\operatorname{Res}(f; z_k) = \frac{1}{4}\,\frac{e^{i\omega z_k}}{z_k(2z_k^2 + 1)}\,.$$

De esto se deduce que

$$I = \frac{\pi i}{2}\left[\frac{e^{i\omega z_1}}{z_1(2z_1^2+1)} - \frac{e^{-i\omega\bar{z}_1}}{\bar{z}_1(2\bar{z}_1^2+1)}\right] = -\pi \operatorname{Im}\left[\frac{e^{i\omega z_1}}{z_1(2z_1^2+1)}\right] \equiv -\pi \operatorname{Im} A.$$

Como

$$A = \frac{2e^{\frac{i\omega}{2}(1+i\sqrt{3})}}{(1 + i\sqrt{3})\, i\sqrt{3}} = \frac{2e^{\frac{\omega}{2}(i-\sqrt{3})}}{\sqrt{3}\,(i - \sqrt{3})} = -\frac{i + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\, e^{\frac{\omega}{2}(i-\sqrt{3})},$$

se obtiene

$$I = -\pi \operatorname{Im} A = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}\omega}\left(\cos\frac{\omega}{2} + \sqrt{3}\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}\right), \qquad \omega > 0\,.$$

4.3.4 Transformadas de Mellin: $\int_0^\infty x^{a-1} f(x)\, dx$, $a \notin \mathbb{Z}$

- **Condiciones:**

  i) f analítica en $\mathbb{C} - \{z_1, \dots, z_n\}$, con $z_k \notin \mathbb{R}^+$ para $k = 1, \dots n$ (es decir, f tiene un número finito de singularidades, todas ellas fuera del eje real positivo)

  ii) $\exists M_1, M_2, R_2 > R_1$ constantes positivas y $b < a < c$ tales que

$$|f(z)| < \begin{cases} \dfrac{M_1}{|z|^b}, & 0 < |z| < R_1 \\[2ex] \dfrac{M_2}{|z|^c}, & |z| > R_2 \end{cases}$$

- **Resultado:** $-\dfrac{\pi e^{-i\pi a}}{\operatorname{sen}(\pi a)} \displaystyle\sum_{z_k \neq 0} \operatorname{Res}\left(z^{a-1} f(z); z_k\right), \qquad z^{a-1} \equiv e^{(a-1)\log_{[0,2\pi)} z}.$

Demostración. En primer lugar, las acotaciones de $|f|$ implican (por el teorema de comparación para integrales reales impropias) que la integral es absolutamente convergente.

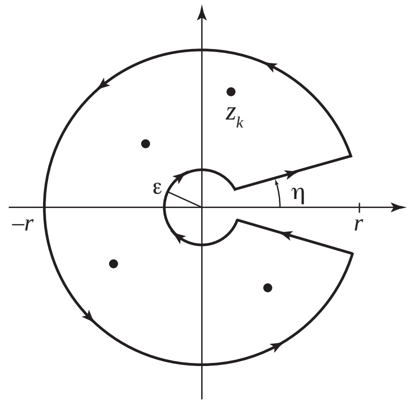

Figura 4.3: curva γ

Sea γ la curva de la fig. 4.3, donde $0 < \varepsilon < R_1$ y $r > R_2$ se toman de modo que todas las singularidades de $f(z)$ distintas de 0 estén en el interior de γ, y $0 < \eta < \pi/2$. Si denotamos

$$z^{a-1} = \mathrm{e}^{(a-1)\log_{[0,2\pi)} z} = |z|^{a-1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a-1)\arg_{[0,2\pi)} z},$$

la función $z^{a-1} f(z)$ es analítica en $\mathbb{C} - A$, con $A = \mathbb{R}^+ \cup \{0, z_1, \dots, z_n\}$. Por el teorema de los residuos se tiene:

$$2\pi\mathrm{i} \sum_{z_k \neq 0} \operatorname{Res}\left(z^{a-1} f(z); z_k\right) = \int_\gamma z^{a-1} f(z)\,\mathrm{d}z = I_1 - I_2 + J, \tag{4.5}$$

siendo I_1 e I_2 las integrales de $z^{a-1} f(z)$ sobre los arcos $\arg_{[0,2\pi)} z \in [\eta, 2\pi - \eta]$ de las circunferencias (orientadas positivamente) de radios r y ε, respectivamente, y J la integral a lo largo de los segmentos $z = x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}$ y $z = x\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi-\eta)}$, $\varepsilon \leqslant x \leqslant r$. Nótese que en la suma del miembro izquierdo de (4.5) *no* se incluye el residuo en el origen, aunque f sea singular en dicho punto. La integral a lo largo de los dos segmentos está dada por

$$\begin{aligned} J = \int_\varepsilon^r \mathrm{e}^{\mathrm{i}(a-1)\eta} x^{a-1} f(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}\,\mathrm{d}x - \int_\varepsilon^r \mathrm{e}^{\mathrm{i}(a-1)(2\pi-\eta)} x^{a-1} f(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi-\eta)}) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi-\eta)}\,\mathrm{d}x \\ = \int_\varepsilon^r x^{a-1}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\eta} f(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}) - \mathrm{e}^{\mathrm{i}a(2\pi-\eta)} f(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi-\eta)})\right] \mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

Haciendo $\eta \to 0+$ (con ε y r fijos) en (4.5) se obtiene (al ser f analítica, y por tanto continua, en el eje real positivo)

$$2\pi\mathrm{i} \sum_{z_k \neq 0} \operatorname{Res}\left(z^{a-1} f(z); z_k\right) = \int_{\gamma_r} z^{a-1} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_\varepsilon} z^{a-1} f(z)\,\mathrm{d}z + (1 - \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}a}) \int_\varepsilon^r x^{a-1} f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

siendo γ_ρ la circunferencia de centro 0 y radio ρ orientada positivamente. Por las hipótesis sobre $|f|$ se obtiene:

$$\left|\int_{\gamma_\varepsilon} z^{a-1} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant M_1 \varepsilon^{a-1-b} \cdot 2\pi\varepsilon = 2\pi M_1 \varepsilon^{a-b} \xrightarrow[\varepsilon \to 0+]{} 0,$$

$$\left|\int_{\gamma_r} z^{a-1} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant M_2 r^{a-1-c} \cdot 2\pi r = 2\pi M_2 r^{a-c} \xrightarrow[r \to \infty]{} 0\,.$$

Haciendo $\varepsilon \to 0+$ y $r \to \infty$ (independientemente) se obtiene el resultado deseado, ya que

$$\frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i a}} = \frac{2\pi i e^{-i\pi a}}{e^{-i\pi a} - e^{i\pi a}} = -\frac{\pi e^{-i\pi a}}{\operatorname{sen}(\pi a)}.$$

• **Nota:** Sea $f(z) = P(z)/Q(z)$ (con P, Q polinomios) una función racional. Entonces la primera condición se cumple si y sólo si $Q(x) \neq 0$ para todo $x > 0$, mientras que la segunda se satisface para

$$b = \operatorname{ord}(0; Q) - \operatorname{ord}(0; P), \qquad c = \deg Q - \deg P,$$

siendo $\operatorname{ord}(0; P)$ y $\operatorname{ord}(0; Q)$ la multiplicidad de 0 como raíz de P y Q, respectivamente. (Los polinomios P y Q se pueden escoger, sin pérdida de generalidad, de modo que no se anulen en el origen, en cuyo caso $b = 0$.)

• **Ejemplo:** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x^2}\,dx \equiv I(a)$.

En este caso $c = 2$, $b = 0$. Para poder aplicar el resultado del apartado anterior necesitamos por tanto que $0 < a < 2$ y $a \neq 1$. Si estas condiciones se cumplen se tiene:

$$I(a) = -\frac{\pi e^{-i\pi a}}{\operatorname{sen}(\pi a)}\left[\operatorname{Res}\left(\frac{z^{a-1}}{z^2+1}; i\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{z^{a-1}}{z^2+1}; -i\right)\right].$$

Los residuos se calculan fácilmente, ya que ambos son claramente polos simples (ceros simples del denominador en que no se anula el numerador):

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^{a-1}}{z^2+1}; \pm i\right) = \frac{(\pm i)^{a-1}}{\pm 2i} = -\frac{1}{2}(\pm i)^a.$$

Teniendo en cuenta la determinación de z^{a-1}, la suma de estos dos residuos es igual a

$$-\frac{1}{2}\left(e^{ia\frac{\pi}{2}} + e^{ia\frac{3\pi}{2}}\right) = -e^{i\pi a}\cos\left(\frac{\pi a}{2}\right),$$

y por tanto

$$I(a) = \frac{\pi\cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)}{\operatorname{sen}(\pi a)} = \frac{\pi}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi a}{2}\right)}.$$

4.3.5 $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\log x\,dx$, $f(x)$ real y par

• **Condiciones:**

i) f analítica en H, con la posible excepción de un número *finito* de singularidades $z_k \notin \mathbb{R} - \{0\}$ con $k = 1, \ldots, n$

ii) $\exists M_1, M_2, R_2 > R_1$ constantes positivas y $a < 1 < b$ tales que

$$|f(z)| < \begin{cases} \dfrac{M_1}{|z|^a}, & 0 < |z| < R_1 \\[2ex] \dfrac{M_2}{|z|^b}, & |z| > R_2. \end{cases}$$

- **Resultado:** $-\pi\ \mathrm{Im}\left(\sum_{\mathrm{Im}\, z_k>0} \mathrm{Res}\left(f(z)\log z; z_k\right)\right)$, $\qquad \log \equiv \log_{[-\pi/2,3\pi/2)}$.

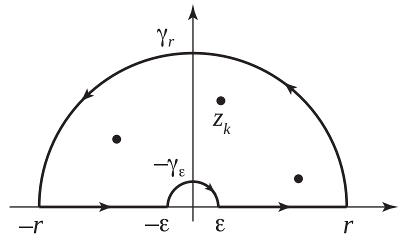

Figura 4.4: curva γ

Demostración. En primer lugar, las acotaciones sobre $|f|$ implican (teorema de comparación) la convergencia absoluta de la integral, así como la de $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$. Sean $0<\varepsilon<R_1<R_2<r$ tales que todas las singularidades de f en $H-\{0\}$ estén el interior del arco γ de la fig. 4.4. Entonces $f(z)\log z$ es analítica en $H-\{0\}$, excepto por un número finito de singularidades z_k (ya que la determinación escogida de log es singular sólo en el eje imaginario negativo junto con el origen). Por el teorema de los residuos,

$$2\pi\mathrm{i} \sum_{\mathrm{Im}\, z_k>0} \mathrm{Res}\left(f(z)\log z; z_k\right) = \int_{-r}^{-\varepsilon} g + \int_{\varepsilon}^{r} g - \int_{\gamma_\varepsilon} g + \int_{\gamma_r} g \equiv I_1 + I_2 - \int_{\gamma_\varepsilon} g + \int_{\gamma_r} g\,, \quad (4.6)$$

siendo $g(z) = f(z)\ \log z$. Si $x<0$ se tiene

$$\log x = \log|x| + \mathrm{i}\pi = \log(-x) + \mathrm{i}\pi\,,$$

y por tanto

$$I_1 = \int_{-r}^{-\varepsilon} f(x)[\log(-x)+\mathrm{i}\pi]\,\mathrm{d}x = \int_{\varepsilon}^{r} f(-x)[\log(x)+\mathrm{i}\pi]\,\mathrm{d}x = \int_{\varepsilon}^{r} f(x)\log x\,\mathrm{d}x + \mathrm{i}\pi \int_{\varepsilon}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Luego

$$I_1 + I_2 = 2\int_{\varepsilon}^{r} f(x)\log x\,\mathrm{d}x + \mathrm{i}\pi \int_{\varepsilon}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Por otra parte,

$$|\log z| = \left|\log|z| + \mathrm{i}\arg z\right| \leqslant |\log|z|| + |\arg z|\,,$$

donde $\arg z \in [-\pi/2, 3\pi 2)$. Por tanto

$$\left|\int_{\gamma_r} g\right| \leqslant \pi r \cdot \frac{M_2}{r^b}\cdot\left(\log r + \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{\pi M_2}{r^{b-1}}\cdot\left(\log r + \frac{3\pi}{2}\right) \xrightarrow[r\to\infty]{} 0\,,$$

al ser $b>1$. Del mismo modo, al ser $a<1$ se tiene

$$\left|\int_{\gamma_\varepsilon} g\right| \leqslant \pi\varepsilon \cdot \frac{M_1}{\varepsilon^a}\cdot\left(\log \varepsilon + \frac{3\pi}{2}\right) = \pi M_1 \varepsilon^{1-a}\cdot\left(|\log\varepsilon| + \frac{3\pi}{2}\right) \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} 0\,.$$

Haciendo $r\to\infty$ y $\varepsilon\to 0+$ en (4.6) se obtiene:

$$2\pi\mathrm{i} \sum_{\mathrm{Im}\, z_k>0} \mathrm{Res}\left(f(z)\log z; z_k\right) = 2\int_0^\infty f(x)\log x\,\mathrm{d}x + \mathrm{i}\pi\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Teniendo en cuenta que f es *real* se obtiene el resultado anunciado.

• **Ejemplo:** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x \equiv I$.

Claramente $f(z) = (1+z^2)^{-2}$ cumple todas las condiciones anteriores ($a = 0$ y $b = 4$). La única singularidad en el semiplano superior es $z_0 = \mathrm{i}$. Como

$$f(z)\log z = \frac{\log z}{(z+\mathrm{i})^2}\cdot\frac{1}{(z-\mathrm{i})^2}$$

utilizando la fórmula (4.1) se tiene

$$\operatorname{Res}\big(f(z)\log z;\mathrm{i}\big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{\log z}{(z+\mathrm{i})^2}\right]_{z=\mathrm{i}} = \frac{1}{\mathrm{i}(2\mathrm{i})^2} - \frac{2\log\mathrm{i}}{(2\mathrm{i})^3} = \frac{\mathrm{i}}{4} - \frac{\mathrm{i}}{4}\log\mathrm{i} = \frac{\mathrm{i}}{4} + \frac{\pi}{8}\,.$$

Por tanto, $I = -\dfrac{\pi}{4}$.

Ejercicio. Supongamos que f cumple las condiciones i)–ii) de la pág. 60 con $a = 1$. Integrando la función $f(z)\log_{[0,2\pi)} z$ a lo largo de la curva de la figura 4.3, demostrar que

$$\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = -\sum_{z_k\neq 0}\operatorname{Res}\big(f(z)\log z; z_k\big)\,, \qquad \log\equiv\log_{[0,2\pi)}\,.$$

Utilizando este resultado, probar que

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\,.$$

4.4 Valor principal de Cauchy

Supongamos que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es no acotada en un entorno de $x_0\in\mathbb{R}$, y que existen las integrales impropias $\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x$ y $\int_c^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ para todo $b < x_0 < c$. En ese caso, se define la integral impropia $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ mediante

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{-\infty}^{x_0-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\delta\to 0+}\int_{x_0+\delta}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Evidentemente, si la integral impropia existe entonces

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\int_{-\infty}^{x_0-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0+\varepsilon}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x\right].$$

El miembro derecho de esta última expresión se denomina **valor principal de Cauchy** de la integral impropia:

$$\mathrm{VP}\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\int_{-\infty}^{x_0-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0+\varepsilon}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x\right].$$

(Esta definición se generaliza de manera obvia al caso en que f tiene un número *finito* de singularidades en el eje real.) Por tanto, *si* existe la integral impropia entonces existe también su valor principal, y se verifica la igualdad

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{VP}\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Nótese, sin embargo, que el valor principal de Cauchy puede existir aunque no exista la integral impropia. Por ejemplo, si f es una función *impar* singular en $x_0 = 0$ pero integrable en ∞ entonces $\mathrm{VP}\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Lema 4.2. *Supongamos que f es una función analítica con un* polo simple *en $z_0 \in \mathbb{C}$, y sea γ_ε el arco de circunferencia $\gamma_\varepsilon(t) = z_0 + \varepsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, con $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ (fig. 4.5). Entonces*

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\gamma_\varepsilon} f = \mathrm{i}\alpha \operatorname{Res}(f; z_0).$$

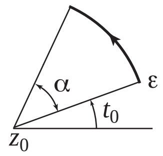

Figura 4.5: curva γ_ε

Demostración. En un entorno reducido de z_0 es válido el desarrollo de Laurent

$$f(z) = \frac{b_1}{z - z_0} + g(z), \qquad 0 < |z - z_0| < r,$$

con g analítica en $D(z_0; r)$. Si $0 < \varepsilon < r$ se tiene

$$\int_{\gamma_\varepsilon} f = b_1 \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} + \int_{\gamma_\varepsilon} g\,.$$

Pero

$$b_1 \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} = b_1 \int_{t_0}^{t_0+\alpha} \frac{\mathrm{i}\varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}b_1\alpha = \mathrm{i}\alpha \operatorname{Res}(f; z_0),$$

mientras que, al ser g analítica en $D(z_0; r)$, $|g(z)| < M$ para $|z - z_0| \leqslant r/2$, y por tanto si $\varepsilon \leqslant r/2$ se tiene

$$\left|\int_{\gamma_\varepsilon} g\right| \leqslant M\varepsilon\alpha \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} 0\,.$$

• Sea f una función analítica en H, excepto por un número *finito* de singularidades z_k, siendo las posibles singularidades de f en el eje real *polos simples*. Si f satisface una de las dos condiciones siguientes:

i) $\exists p > 1,\ R > 0,\ M > 0$ t.q. $|f(z)| < \dfrac{M}{|z|^p}$ si $|z| > R$ y $z \in H$;

ii) $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega z} g(z)$, con $\omega > 0$ y $|g(z)| \to 0$ cuando $|z| \to \infty$ en H,

entonces VP $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ existe y está dado por

$$\mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}(f; z_k) + \pi\mathrm{i} \sum_{z_k \in \mathbb{R}} \operatorname{Res}(f; z_k)\,.$$

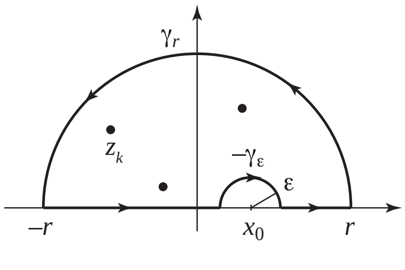

Figura 4.6: curva γ

Demostración. Supongamos, por ejemplo, que f cumple la condición i). Por sencillez, nos restringiremos al caso en que f sólo tiene una singularidad x_0 en el eje real. Si $r > \max(|x_0|, R)$ es lo suficientemente grande y $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño para que todas las singularidades de f en $H - \{x_0\}$ estén en el interior de la curva γ de la fig. 4.6, integrando f a lo largo de dicha curva se tiene:

$$\int_\gamma f = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}(f; z_k) = \int_{-r}^{x_0-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\gamma_\varepsilon} f + \int_{x_0+\varepsilon}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\gamma_r} f\,.$$

Por la discusión de la Sección 4.3.1, las integrales $\int_{-\infty}^{x_0-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$ y $\int_{x_0+\varepsilon}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ son convergentes, y

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} f = 0.$$

Haciendo tender r a ∞ se obtiene por tanto

$$2\pi\mathrm{i} \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}(f; z_k) = \int_{-\infty}^{x_0-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0+\varepsilon}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\gamma_\varepsilon} f\,.$$

El resultado anunciado se obtiene haciendo $\varepsilon \to 0+$ y utilizando el lema anterior con $\alpha = \pi$.

- **Nota:** Si reemplazamos H por L y $\omega > 0$ por $\omega < 0$ en el enunciado anterior entonces

$$\operatorname{VP} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = -2\pi\mathrm{i} \sum_{\operatorname{Im} z_k < 0} \operatorname{Res}(f; z_k) - \pi\mathrm{i} \sum_{z_k \in \mathbb{R}} \operatorname{Res}(f; z_k)\,.$$

- **Ejemplo:** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,\mathrm{d}x \equiv I\,.$

Si definimos $f(x) = \operatorname{sen} x/x$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 1$ entonces f es continua en 0 y par, y por tanto

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Esta integral *no* es del tipo estudiado en la sección 4.3.1, ya que $|\operatorname{sen} z| = \left(\cosh^2 y - \cos^2 x\right)^{1/2}$ tiende a infinito cuando $|y|$ tiende a infinito más rápido que cualquier potencia de $|z|$. Tampoco se cumple la relación

$$I = \frac{1}{2}\operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\,\mathrm{d}x,$$

ya que la parte real de la integral del miembro derecho claramente diverge en 0 (el integrando se comporta como $1/x$ en el origen). Sin embargo,

$$\operatorname{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x = 0$$

al ser $\cos x$ par, y

$$\operatorname{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,\mathrm{d}x\,,$$

al ser convergente la integral del miembro derecho. Por tanto

$$I = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left[\operatorname{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\,\mathrm{d}x\right] = \frac{1}{2\mathrm{i}} \operatorname{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\,\mathrm{d}x\,.$$

La función $g(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}/z$ tiene un polo simple en el origen y cumple la condición ii) de esta sección ($\omega = 1 > 0$), por lo que

$$I = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{Res}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z};0\right) = \frac{\pi}{2}\,.$$

• **Ejemplo:** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}^2\,x}{x^2}\,\mathrm{d}x \equiv I$.

En este caso

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}^2\,x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos(2x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\,\mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}}{x^2}\,\mathrm{d}x\,,$$

ya que

$$\mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}(2x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = 0$$

por ser el integrando una función impar. Si $g(z) = (1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z})/z^2$ entonces

$$|g(z)| \leqslant \frac{1+\left|\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}\right|}{|z|^2} = \frac{1+\mathrm{e}^{-2\,\mathrm{Im}\,z}}{|z|^2} \leqslant \frac{2}{|z|^2}, \qquad \mathrm{Im}\,z \geqslant 0,\ \ z \neq 0,$$

y por tanto se cumple la condición i) en el semiplano superior. Además, $z = 0$ es un polo simple de g (el numerador tiene un cero simple y el denominador uno doble en el origen), con residuo

$$\mathrm{Res}(g;0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\big(1-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\big)\bigg|_{z=0} = -2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\big|_{z=0} = -2\mathrm{i}.$$

Por tanto,

$$I = \frac{1}{4}\cdot\pi\mathrm{i}\cdot(-2\mathrm{i}) = \frac{\pi}{2}\,.$$

• **Ejemplo:** $\displaystyle\mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{d}x}{(x-1)(x^2+4)} \equiv I$.

Aquí

$$I = \mathrm{Im}\,J, \qquad J \equiv \mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x}{(x-1)(x^2+4)}\,.$$

La función

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z-1)(z^2+4)}$$

es analítica en $\mathbb{C} - \{1, \pm 2\mathrm{i}\}$, y la singularidad en $z = 1$ es claramente un polo simple. Además, se cumple claramente la condición ii) en el semiplano superior ($\omega = 1 > 0$), por lo que

$$\begin{aligned}J &= \pi\mathrm{i}\,[\mathrm{Res}(f;1) + 2\,\mathrm{Res}(f;2\mathrm{i})] = \pi\mathrm{i}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}{5} + \frac{2\mathrm{e}^{-2}}{(2\mathrm{i}-1)\cdot 4\mathrm{i}}\right] = \pi\mathrm{i}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}{5} - \frac{\mathrm{e}^{-2}}{2(2+\mathrm{i})}\right]\\ &= \pi\mathrm{i}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}{5} - \frac{(2-\mathrm{i})\mathrm{e}^{-2}}{10}\right].\end{aligned}$$

Por tanto

$$I = \frac{\pi}{5}\left(\cos 1 - \frac{1}{\mathrm{e}^2}\right).$$