

# LABORATORIO DE FÍSICA COMPUTACIONAL

DEPARTAMENTOS DE FÍSICA TEÓRICA I y II

## ELECTRODINÁMICA CLÁSICA

# CÁLCULO CLÁSICO DE LA RADIACIÓN EMITIDA POR UN ÁTOMO DE HIDRÓGENO

NOMBRE:

NOMBRE:

GRUPO:

### **– Introducción**

Consideremos dos cargas puntuales  $e_1$  y  $e_2$  (de signo distinto), de masas  $m_1$  y  $m_2$  respectivamente.

Podemos reducir el problema al movimiento de una única partícula de masa reducida  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ .

En la aproximación no relativista, éste vendrá dado por la dinámica clásica y la ley de Coulomb:

$$\mu \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{e_1 e_2}{4 \pi \epsilon_0 r^3} \mathbf{r}$$

Sabemos que (para energías negativas) la solución de las ecuaciones clásicas de la dinámica son trayectorias elípticas, que se pueden expresar en coordenadas polares  $(r, \alpha)$  como

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + \epsilon \cos(\alpha)}{a(1 - \epsilon^2)}$$

Suponiendo que la órbita se encuentra en el plano XY tendremos

$$\mathbf{r}(t) = r(t)(\cos(\alpha(t)), \sin(\alpha(t)), 0)$$

Los parámetros vienen determinados como:

$$\varepsilon \text{ excentricidad de la órbita: } \varepsilon = \sqrt{1 - \frac{4 \pi \varepsilon_0 L^2}{\mu e_1 e_2 a}} \quad (\varepsilon < 1)$$

$$a \text{ semieje mayor: } a = \frac{e_1 e_2}{4 \pi \varepsilon_0 2 E}$$

$E$  es la energía del sistema en C.M. ( $E < 0$ )

$L$  es el momento angular

La potencia radiada por unidad de ángulo sólido en la dirección  $\mathbf{x}$  está dada por:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{\mu_0} B^2 x^2$$

donde  $\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4 \pi c x} \frac{d^2 \mathbf{p}}{dt^2} \times \mathbf{n}$  en la aproximación dipolar eléctrica, con los campos evaluados en los instantes retardados y a grandes distancias de la distribución de cargas.  $\mathbf{p}(t) = q \mathbf{r}(t)$  es el momento dipolar eléctrico y  $\mathbf{n}$  es un vector unitario en la dirección  $d\mathbf{x}$ , dado por

$$\mathbf{n} = (\sin(\theta) \cos(\phi), \sin(\theta) \sin(\phi), \cos(\theta))$$

Promediando temporalmente la potencia radiada en un periodo, obtenemos la siguiente expresión:

$$\frac{dP_{prom}}{d\Omega} = \frac{\mu_0}{4 \pi 8 \pi^2 c} \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \frac{e_1^2 e_2^2}{(4 \pi \varepsilon_0)^2 a^4 (1 - \varepsilon^2)^{\left(\frac{5}{2}\right)}} F(\varepsilon, \theta, \phi)$$

donde

$$F(\varepsilon, \phi, \theta) = \int_0^{2\pi} g(\varepsilon, \alpha, \phi, \theta) d\alpha = \int_0^{2\pi} (1 + \varepsilon \cos(\alpha))^2 (1 - \cos(\alpha - \phi))^2 \sin^2(\theta) d\alpha$$

[ > restart ;

1.- PREGUNTA Defina en Maple la función  $g(\varepsilon, \alpha, \phi, \theta)$ .

+ **1.-Respuesta**

2.- PREGUNTA Defina en Maple la función  $F(\varepsilon, \phi, \theta) = \int_0^{2\pi} g(\varepsilon, \alpha, \phi, \theta) d\alpha$

+ **2.-Respuesta**

3.- PREGUNTA Represente en coordenadas esféricas, usando el comando **plot3d**, la función  $F(\epsilon, \phi, \theta)$ , para distintos valores de la excentricidad.

**+ 3.-Respuesta**

4.- PREGUNTA Representar en coordenadas polares, usando el comando **plot**, la función  $F(\epsilon, \phi, \theta)$  sobre el plano de la órbita para distintos valores de la excentricidad.

**+ 4.-Respuesta**

5.- PREGUNTA Calcular la potencia total radiada  $\Delta(\epsilon)$ , integrando sobre el ángulo sólido. Le proporcionamos los siguientes valores numéricos en el Sistema Internacional de unidades (respectivamente permeabilidad magnética del vacío, velocidad de la luz, radio de la primera órbita de Bohr, carga del electrón, permitividad dieléctrica del vacío, masas del protón y del electrón).

```
> mu[0]:=1.26E-6;    c:=3.00E8;    a:=5.29E-11 ; e:=1.60E-19 ;  
  epsilon[0]:=8.85E-12;  m2:= 1.67E-27; m1:=9.11E-31;
```

**+ 5.-Respuesta**

Debido a la emisión de radiación, el sistema de las cargas pierde energía y el electrón va cayendo paulatinamente hacia el núcleo. La función  $\Delta(\epsilon)$  representa la pérdida de energía por periodo, de forma que la variación en la energía de la órbita está dada por:

$$\frac{dE}{dt} = -\Delta(\epsilon)$$

6.- PREGUNTA Suponiendo que la excentricidad es constante, escribir (en papel) la ecuación diferencial que satisface el semieje mayor de la elipse  $a$  a partir de esta expresión.

7.- PREGUNTA Estudiar la solución de la ecuación anterior. Utilice un nuevo nombre "b" en lugar de "a" ya que esta última toma ya un valor numérico determinado desde el apartado anterior.

**+ 7.-Respuesta**

8.- PREGUNTA Calcular el tiempo de caída del electrón sobre el protón para un átomo de hidrógeno. Compare con el periodo de una órbita en ausencia de radiación electromagnética dado por:

$$t = 2 \pi a^{\left(\frac{3}{2}\right)} \sqrt{\frac{\mu 4 \pi \epsilon_0}{e^2}}$$

(puede aproximar la masa reducida en la raiz por la masa del electron  $m_1$ ).

**+ 8.- Respuesta**