LABORATORIO DE FÍSICA COMPUTACIONAL
DEPARTAMENTOS DE FÍSICA TEÓRICA I y II

ELECTRODINÁMICA CLÁSICA

CÁLCULO CLÁSICO DE LA RADIACIÓN EMITIDA POR UN ÁTOMO DE HIDRÓGENO

NOMBRE:
NOMBRE:
GRUPO:

Introducción

Consideremos dos cargas puntuales e_1 y e_2 (de signo distinto), de masas m_1 y m_2 respectivamente. Podemos reducir el problema al movimiento de una única partícula de masa reducida $\mu=\frac{m_1\, m_2}{m_1+m_2}$. En la aproximación no relativista, éste vendrá dado por la dinámica clásica y la ley de Coulomb:

$$\mu\, \frac{d^2}{dt^2}\,\mathbf{r} \;=\; \frac{e_1\, e_2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\, r^3}\,\mathbf{r}$$

Sabemos que (para energías negativas) la solución de las ecuaciones clásicas de la dinámica son trayectorias elípticas, que se pueden expresar en coordenadas polares (r,α) como

$$\frac{1}{r}=\frac{1+\varepsilon\cos(\alpha)}{a\left(1-\varepsilon^2\right)}$$

Suponiendo que la óribita se encuentra en el plano XY tendremos

$$\mathbf{r}(\mathrm{t}) \;=\; \mathrm{r}(\mathrm{t})(\cos(\alpha(t)),\sin(\alpha(t)),0)$$

Los parámetros vienen determinados como:

ε excentricidad de la órbita: $\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{4\pi\varepsilon_0 L^2}{\mu e_1 e_2 a}}$ $(\varepsilon < 1)$

a semieje mayor: $a = \frac{e_1 e_2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 2E}$

E es la energía del sistema en C.M. (E<0)

L es el momento angular

La potencia radiada por unidad de ángulo sólido en la dirección x está dada por:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{\mu_0} B^2 x^2$$

donde $\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi c x} \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{p} \times \mathbf{n}$ en la aproximación dipolar eléctrica, con los campos evaluados en los instantes retardados y a grandes distancias de la distribución de cargas. $\mathbf{p}(t) = q\,\mathbf{r}(t)$ es el momento dipolar eléctrico y $\mathbf{n}$ es un vector unitario en la dirección de $\mathbf{x}$, dado por

$$\mathbf{n} = (\sin(\theta)\cos(\varphi), \sin(\theta)\sin(\varphi), \cos(\theta))$$

Promediando temporalmente la potencia radiada en un periodo, obtenemos la siguiente expresión:

$$\frac{dP_{prom}}{d\Omega} = \frac{\mu_0}{4\pi \cdot 8\pi^2 c}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \frac{e_1^2 e_2^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2 a^4 \left(1-\varepsilon^2\right)^{\frac{5}{2}}} F(\varepsilon,\theta,\varphi)$$

donde

$$F(\varepsilon,\varphi,\theta) = \int_0^{2\pi} g(\varepsilon,\alpha,\varphi,\theta)\, d\alpha = \int_0^{2\pi} (1+\varepsilon\cos(\alpha))^2 \left(1 - \cos(\alpha-\varphi)^2 \sin(\theta)^2\right) d\alpha$$

```
> restart;
```

1.- PREGUNTA Definir en Maple la función $g(\varepsilon,\alpha,\varphi,\theta)$.

1.-Respuesta

```
>
```

2.- PREGUNTA Definir en Maple la función $F(\varepsilon,\varphi,\theta) = \int_0^{2\pi} g(\varepsilon,\alpha,\varphi,\theta)\, d\alpha$

2.-Respuesta

>

3.- PREGUNTA Representar en coordenadas esféricas, usando el comando **plot3d** , la función $F(\varepsilon,\varphi,\theta)$, para distintos valores de la excentricidad.

3.-Respuesta

>

4.- PREGUNTA a) Crear una función dibuja(ϵ) que represente en coordenadas polares, usando el comando plot , la función $F(\varepsilon,\varphi,\theta)$ sobre el plano de la órbita para la excentricidad indicada. b) Usando el comando display, representar en una misma gráfica esta función para varias excentricidades.

4.-Respuesta

```
> with(plots);
>
```

5.- PREGUNTA Calcular la potencia total radiada $\Delta(\varepsilon)$, integrando sobre el ángulo sólido. Le proporcionamos los siguientes valores numericos en el Sistema Internacional de unidades (respectivamente permeabilidad magnetica del vacio, velocidad de la luz, radio de la primera orbita de Bohr, carga del electron, permetividad dielectrica del vacio, masas del proton y el electron).

```
> mu[0]:=1.26E-6;   c:=3.00E8;   a:=5.29E-11 ; e:=1.60E-19;
  epsilon0:=8.85E-12;  m2:= 1.67E-27; m1:=9.11E-31;
```

5.-Respuesta

>

Debido a la emisión de radiación, el sistema de las cargas pierde energía y el electrón va cayendo paulatinamente hacia el núcleo. La función $\Delta(\varepsilon)$ representa la pérdida de energía por periodo, de forma que la variación en la energía de la órbita está dada por:

$$\frac{dE}{dt}=-\Delta(\varepsilon)$$

6.- PREGUNTA Suponiendo que la excentricidad es constante e igual a cero, es fácil comprobar que el semieje mayor de la elipse satisface la siguiente ecuación diferencial (llamamos b al semieje mayor, ya que a quedó fijado antes) (EJERCICIO)

$$\frac{d}{dt} b(t) = -\frac{K}{b(t)^2}$$

$$K = \frac{8 \pi \varepsilon_0}{e^2} a^4 \Delta(0)$$

Estudiar la solución de la ecuación anterior.

6.-Respuesta

>

7.- PREGUNTA Calcular el tiempo de caída del electrón sobre el protón para un atomo de hidrogeno. Compare con el periodo de una orbita en ausencia de radiacion electromagnetica dado por:

$$t = 2 \pi a^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\mu \cdot 4 \pi \varepsilon_0}{e^2}}$$

(puede aproximar la masa reducida en la raiz por la masa del electron m1).

7.- Respuesta

>