
Ejercicios y Problemas de Estructura de la Materia 2015-2016,
Grupo A (Felipe Llanes Estrada) Hoja 1: Repaso del átomo con un sólo electrón

1. (Movimiento Browniano) Convierta en una ecuación para x^2 la ecuación de Langevin

$$m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x} = \mathbf{F}_{\text{col}} - \beta \frac{d\mathbf{x}}{dt} .$$

2. Suponga que en agua a $T = 300$ K observa que unas partículas de $1\mu\text{m}$ de diámetro se desplazan $12\mu\text{m}$ en 3 minutos. Calcule el número de Avogadro (la constante de los gases es $R = 8,314\text{J/molK}$).
3. (Experimento de Millikan) Determine el radio y la masa de una gotita de aceite de densidad 0.92 g/cm^3 , que puede subir o bajar a lo largo de 10.2 mm entre dos placas (separadas 16 mm) sobre las que se aplica (o no) un voltaje de 5080 V . El aire entre las placas tiene una viscosidad de $182\mu\text{poise}$. Si el potencial eléctrico se sitúa en cero, la gota tarda en caer 11.8 s desde el reposo. De lo contrario, sube en 22.1 s . ¿Cuánto vale la carga de la gota? ¿Cuánto en unidades de la carga del electrón?

4. (Experimento de Rutherford) Una lámina de oro de espesor 10^{-5} cm dispersa un haz de protones de energía 6 MeV . Pasada la lámina, los protones pueden ser captados en el detector, un anillo circular centrado en la dirección inicial del haz cuya anchura subtende 1° en ángulo polar desde el blanco. El anillo recoge protones que han sufrido dispersión bajo un ángulo de 90° .

Calcule la menor distancia que se dio entre cada protón y el núcleo de oro que lo dispersó, el número de núcleos de oro por unidad de volumen en el blanco, el ángulo sólido que subtende el detector, y la fracción del número de protones incidentes que llegan al detector. (Datos del oro: $Z = 79$, $A = 197$, $\rho = 19,3\text{ g/cm}^3$).

5. Considere un Hamiltoniano que depende analíticamente de un parámetro real λ . Pruebe que

$$\int d^3x \psi_E(x)^* \frac{\partial H_\lambda(x)}{\partial \lambda} \psi_E(x) = \frac{\partial E}{\partial \lambda}$$

y calcule con ello para el átomo de Hidrógeno

$$\langle r^{-1} \rangle_{nl} \equiv \int d^3x \frac{|\phi_{nl}(x)|^2}{|\mathbf{x}|} \quad \text{y} \quad \langle r^{-2} \rangle_{nl} \equiv \int d^3x \frac{|\phi_{nl}(x)|^2}{|\mathbf{x}|^2} .$$

6. La parte radial de las funciones de onda del átomo de Hidrógeno puede escribirse como $R_{nl} = P_{nl}/r$ de manera que la ecuación de autovalores queda $H_l P_{nl} = E_{nl} P_{nl}$. Simplifique el conmutador

$$\int r^2 dr R_{n'l'} \left(\frac{d}{dr} H_l - H_l \frac{d}{dr} \right) R_{nl}(r)$$

y utilícelo para evaluar $\langle r^{-3} \rangle_{nl}$.

7. La interacción espín órbita en el átomo de hidrógeno es $a \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}/r^3$, con $a = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Ze^2}{2m_e^2}$ una constante. Calcule su corrección a la energía del estado

$$\psi_{n=2, l=1, j=1/2, m=1/2} = \sqrt{2/3} \phi_{211-1/2} - \sqrt{1/3} \phi_{210+1/2}$$

donde $\phi_{nlm_l m_s}$ son los autoestados del átomo de Hidrógeno.

8. Considerando la transición radiativa en el átomo de Hidrógeno $2p \rightarrow 1s$, evalúe la integral

$$\int d^3r \psi_{100}^* \vec{r} \cdot \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, \lambda) \psi_{21m} ,$$

(ayuda: $\vec{r} \cdot \vec{\varepsilon} = r\sqrt{(4\pi/3)}((\varepsilon_x + i\varepsilon_y)/\sqrt{2})Y_1^{-1} - (\varepsilon_x - i\varepsilon_y)/\sqrt{2})Y_1^1 + \varepsilon_z Y_1^0$) mostrando que el ritmo de transición es

$$R = \frac{dP}{dt} = \frac{2^{17}}{3^{11}} \frac{\alpha \omega^3 a_0^2}{c^2}.$$

Muestre ahora que la vida promedio del nivel $2p$ es $1,6 \times 10^{-9}$ segundos. Finalmente, considere el átomo muónico en el que un muón, de igual carga que el electrón pero masa $m = 105\text{MeV}/c^2$, sustituye a éste formando el estado ligado $p\mu^-$. Calcule ahora la vida media del nivel $2p$.

9. Muestre que en el modelo de Bohr el cociente del momento magnético orbital y el autovalor del momento angular μ_l/l es independiente del número cuántico principal n .
10. (Estados de Rydberg y efecto Stark) Considere el átomo de Hidrógeno en el estado de excitación $n = 50$.
 - ¿Cuál es la distancia promedio del electrón al protón? ¿Y la diferencia de energía con el nivel $n = 49$?
 - Muestre que la frecuencia del fotón emitido en una transición entre estos dos niveles es aproximadamente la de rotación del electrón en la órbita de Bohr correspondiente.
 - Si el átomo es expuesto a un campo eléctrico de $6 \times 10^3 \text{V/m}$, ¿se ioniza el átomo? ¿Y si el valor del campo es la mitad?
11. Calcule la velocidad con que retrocede el átomo de Hidrógeno tras la emisión de un fotón correspondiente a las líneas Lyman- α o Lyman- β .
12. Prediga todas las transiciones de longitud de onda menores que 50nm (UV) para el átomo de Litio doblemente ionizado Li^{++} , considerado como un átomo hidrogenoide no relativista, y coteje sus resultados con la base de datos del NIST, http://physics.nist.gov/PhysRefData/ASD/lines_form.html (introduzca Li III en el formulario).
13. En los datos de Moseley aparecen líneas K_α con las siguientes longitudes de onda en nm, 0.8364, 0.2111, 0.1798. Prediga a qué elementos corresponden a partir de un cálculo teórico que lleve Ud. a término.
14. En el experimento de Thomson (padre) los electrones, con velocidad 5.6% de la de la luz, pasaron entre dos placas metálicas separadas 2cm. ¿Por qué no observó ningún efecto de difracción, como en un experimento de doble rendija?
15. Considere un átomo hidrogenoide en su estado fundamental. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar al electrón a distancia del núcleo mayor que el radio de Bohr?
16. Muestre mediante un cálculo explícito que la transición dipolar prohibida ($n = 2, l = 0 \rightarrow n' = 1, l' = 0$) efectivamente se anula.
17. Muestre que los armónicos esféricos se transforman bajo la operación de paridad de la siguiente manera

$$Y_{lm}(\pi - \theta, \pi + \phi) = (-1)^l Y_{lm}(\theta, \phi)$$
18. En un experimento de resonancia magnética un haz de átomos de hidrógeno en su estado fundamental se somete a dos campos, un campo magnético constante e intenso $B_0 = 2000\text{Gauss}$ que provoca un desdoblamiento de niveles y una onda de frecuencia ω . Calcule ω para que la onda esté en resonancia con la transición entre los dos posibles niveles.
19. ¿Cuántos estados del nivel 4F del Hidrógeno tienen la misma energía de Bohr E_4 en ausencia de estructura fina? Evalúe los desplazamientos espín-órbita entre los dos valores de j en el nivel 4F. ¿Qué degeneración persiste tras considerar esta interacción?

-
20. Identifique todas las transiciones dipolares eléctricas que contribuyen a la línea Balmer- α en el espectro del hidrógeno. Calcule los desplazamientos de estructura fina para cada uno de los estados con $n = 2$ y $n = 3$, y calcule todas las energías de las líneas en las que se divide Balmer- α .
21. Evalúe el efecto Lamb para la diferencia de energía entre los niveles $2S_{1/2}$ y $2P_{1/2}$, y compárelo con la contribución de la estructura fina correspondiente.
22. Calcule los desdoblamientos de estructura fina del nivel de energía 4F del átomo de Hidrógeno. Calcule a continuación el valor de los desdoblamientos del nivel 4F en presencia de un campo débil de 4 Gauss. Dibuje el esquema de niveles obtenido, identificando los números cuánticos de cada estado.
23. (Examen 2012) En un análisis de Moseley de una muestra se miden las siguientes longitudes de onda en nm $\lambda_{L_\alpha} = 0,4385$, $\lambda_{L_\beta} = 0,4168$, $\lambda_{L_\gamma} = 0,3928$.
- Emplee la línea L_α para identificar el elemento
 - Prediga entonces el valor de las líneas L_β y L_γ y compare con el valor dado. ¿A qué se puede deber la diferencia?