Ecuación de Movimiento Relativista
Nota para el laboratorio numérico de Electrodinámica Clásica UCM
Práctica 1

La ecuación de movimiento de una partícula prueba en un campo, la conocida ley de Lorentz,

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{1}$$

no puede emplearse fácilmente para un cálculo numérico ya que la relación entre el momento y la velocidad no es lineal salvo para velocidades muy pequeñas, a saber

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}\gamma; \qquad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \ . \tag{2}$$

Intentemos pues encontrar una ecuación para $d\mathbf{v}/dt$ que no involucre al factor γ en el miembro izquierdo. Empleando la regla de Leibniz para obtener la derivada del momento en la ecuación (1), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}\gamma + \frac{d\gamma}{dt}\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}\gamma + \frac{\gamma^3\mathbf{v}}{c^2}\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \\ = \frac{q}{m}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \ . \end{aligned} \tag{3}$$

En esta ecuación vectorial no podemos despejar $d\mathbf{v}/dt$ porque aparece en el producto escalar $\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt}$. Necesitamos una segunda ecuación escalar que aisle este término. Para ello tomamos su producto escalar con $\mathbf{v}$,

$$\begin{aligned} \gamma\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{v^2}{c^2}\gamma^3\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \gamma\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt}\left(1 + \gamma^2\frac{v^2}{c^2}\right) = \gamma^3\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \\ = \frac{q}{m}\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \ . \end{aligned} \tag{4}$$

Sustituyendo esta última igualdad en la ecuación (3) tenemos ahora

$$\gamma\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{\mathbf{v}}{c^2}\frac{q}{m}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) = \frac{q}{m}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{5}$$

donde ya podemos despejar

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{m\gamma}\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}}{c^2}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})\right) \ . \tag{6}$$

El movimiento tridimensional descrito por esta ecuación puede ahora tratarse numéricamente, ya que el problema matemático se ha reducido a un sistema de seis ecuaciones explícitas de primer orden que se pueden discretizar, por ejemplo mediante el método de Euler

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \mathbf{v}_i\Delta t \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{v}_i + \mathbf{f}_i\Delta t \end{aligned} \tag{7}$$

u otros más elaborados (la práctica numérica utiliza el método de Dormand-Prince). Basta con proporcionar las condiciones iniciales de posición y velocidad $\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0$ para obtener iterativamente $\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1,\ \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_2 \ldots \mathbf{x}_n, \mathbf{v}_n$.

Práctica 2

El modelo teórico de Rutherford describe un átomo inestable, ya que que la aceleración centrípeta forzada sobre el electrón por el núcleo atómico, y necesaria para ligar el átomo, resulta en una emisión de radiación. Esta dificultad entre otras da lugar a la sustitución del modelo por otros basados en las ideas cuánticas.

Para calcular el tiempo de desintegración de un supuesto átomo de Hidrógeno, consideremos que el potencial es puramente central y Coulombiano, con ecuación de movimiento clásica

$$\mu \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{e_1 e_2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\mathbf{r} \ . \tag{8}$$

(donde μ es la masa reducida, y e_i las cargas del núcleo y el electrón).

La órbita elíptica clásica (elegida en el plano OXY) satisface la relación entre la distancia al foco r y la separación angular respecto al semieje mayor α

$$\frac{1}{r} = \frac{1+\epsilon\cos\alpha}{a(1-\epsilon^2)} \ . \tag{9}$$

Aquí ϵ es la excentricidad de la elipse, y a el semieje mayor, que depende de la energía (negativa, ya que el electrón se presume ligado) a través de

$$a = \frac{e_1 e_2}{4\pi\epsilon_0 2E} \ . \tag{10}$$

Un dipolo eléctrico radía una potencia por unidad de ángulo sólido en la dirección $\hat{\mathbf{n}} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ respecto a la orientación del dipolo y a distancia x,

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{\mu_0} B^2 x^2 \tag{11}$$

donde el campo magnético viene dado por $\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi c x}\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{p} \times \hat{\mathbf{n}}$.

La distribución angular de la radiación varía a lo largo de la órbita, de manera que en la práctica deberá promediarla. A continuación integrará sobre $d\Omega$ para obtener la potencia total radiada. Una vez obtenida, verá que ésta es lo suficientemente pequeña como para permitir un tratamiento adiabático, esto es, en primera aproximación consideramos que la órbita es siempre elíptica pero el semieje mayor decrece debido a la pérdida de energía. Invirtiendo y después derivando la ecuación (10) tenemos que

$$P = -\frac{dE}{dt} = \left(\frac{e_1 e_2}{8\pi\varepsilon_0}\right)\frac{1}{a^2}\frac{da}{dt} \ . \tag{12}$$

Como consecuencia de la ecuación (11), $P \propto \frac{1}{a^4}$ (deberá Ud. calcular la constante de proporcionalidad). Combinando con la ec. (12), puede obtener Ud. una ecuación diferencial para el semieje

$$a^2\frac{da}{dt} = c \tag{13}$$

cuya solución

$$a^3 - a^3_{\mathrm{Bohr}} = c(t - t_0) \tag{14}$$

con condiciones inicial $t_0 = 0$ y final $a = 0$ le proporcionan el tiempo de caída t, objetivo final de la práctica.