UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA I

Mecánica cuántica avanzada - Curso 2011/2012
Problemas - Hoja 2: Teoría de colisiones

1. Se considera el potencial

$$V(r) = -V_0\, e^{-\alpha r} \ ,$$

donde V_0 y α son constantes positivas. Calcular en la aproximación de Born la sección eficaz diferencial y la sección eficaz total. Encontrar la forma explícita de la condición de validez para la aproximación de Born para este potencial. Estudiar la validez de la expresión obtenida para la sección eficaz total para altas y bajas energías ($k/\alpha \gg 1$ y $k/\alpha \ll 1$).

2. Calcular en aproximación de Born las secciones eficaces diferencial y total para el potencial

$$V(r) = \frac{V_0}{1 + \frac{r^2}{\alpha^2}} \ ,$$

con α y V_0 una longitud y una energía constantes. Discutir la seción eficaz total para energías incidentes pequeñas y grandes.

3. Calcular en aproximación de Born la amplitud de dispersión para el potencial gaussiano

$$V(r) = V_0\, e^{-r^2/R^2} \ ,$$

con V_0 y R constantes. Discutir la validez de la aproximación.

4. El potencial de Yukawa está dado por

$$V(r) = -V_0\, \frac{e^{-\alpha r}}{r}$$

donde V_0 y α son constantes positivas. Demostrar que en la aproximación de Born la sección eficaz diferencial y la sección eficaz total están dadas por

$$\frac{d\sigma_{\rm B}}{d\Omega} = |f(p, \cos\theta)|^2 = \left(\frac{2mV_0}{\hbar^2}\right)^2 \frac{1}{[\,2k^2(1-\cos\theta) + \alpha^2]^2}$$

$$\sigma_{\rm B} = \left(\frac{2mV_0}{\hbar^2}\right)^2 \frac{4\pi}{4k^2\alpha^2 + \alpha^4} \ ,$$

donde $p = \hbar k$ y θ es el ángulo que forman los momentos incidente $\mathbf{p}$ y saliente $\mathbf{p}'$. Usando que

$$\int_0^\infty \frac{dr}{r}\, e^{-\alpha r}\, (1 - \cos\beta r) = \frac{1}{2}\, \ln\frac{\beta^2 + \alpha^2}{\alpha^2} \qquad {\rm Re}\,\alpha > 0$$

$$\int_0^\infty \frac{dr}{r}\, e^{-\alpha r}\, \sin\beta r = \arctan\frac{\beta}{\alpha} \qquad \alpha > 0 \ ,$$

discutir la validez de la aproximación para energías altas y bajas. El parámetro α puede entenderse como el inverso del alcance del potencial. Si se hace tender α a cero, el potencial se convierte en un potencial de Coulomb. Demostrar que en este límite la sección eficaz diferencial reproduce la sección eficaz diferencial de Rutherford para la difusión de Coulomb

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{ZZ'e^2}{E}\right)^2 \frac{1}{16\,\sin^4(\theta/2)} ,$$

si se identifica $V_0 = ZZ'e^2$, siendo Ze la carga que crea el potencial, $Z'e$ la de la partícula difundida y E la energía cinética con la ue ésta incide. De la expresión dada para σ_B se sigue que cuando $\alpha \to 0$, ésta diverge. Demostrar que el origen de esta divergencia es la contribución a la sección eficaz total de la región $\theta \to 0$, o lo que es lo mismo, de procesos en los que el momento transferido $\mathbf{p} - \mathbf{p}'$ es muy pequeño. Nótese que esto pone de manifiesto que el origen de la divergencia de la sección eficaz total para la difusión coulombiana es precisamente el alcance infinito del potencial coulombiano (pues a distancias muy grandes la transferencia $|\mathbf{p} - \mathbf{p}'|$ de momento es muy pequeña).

5. Considerar las series de Born para la amplitud de difusión $f(\mathbf{p} \to \mathbf{p}')$ y la sección eficaz diferencial total σ en el problema de difusión elástica por un potencial $V(\mathbf{x})$.

$$f(\mathbf{p} \to \mathbf{p}') = \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(\mathbf{p} \to \mathbf{p}') \qquad \sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma^{(n)} .$$

Demostrar que la aproximación de Born viola el teorema óptico. Probar que

$$\mathrm{Im}\, f^{(2)}(\mathbf{p} \to \mathbf{p}) = \frac{k}{4\pi}\, \sigma^{(1)} .$$

6. Considérese la difusión de partículas de carga $-Z'e$ por el potencial coulombiano producido por un átomo de número atómico Z. Si se tiene en cuenta el apantallamiento de la carga nuclear que produce la nube de electrones que rodea al núcleo, el potencial coulombiano se modifica a grandes distancias (mayores que el radio de Bohr a_0), de manera que la energía potencial toma la forma

$$V(\mathbf{x}) = -\frac{ZZ'e^2}{|\mathbf{x}|} + Z'e \int d^3y \frac{e\,\rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} ,$$

donde $\rho(\mathbf{y})$ es la densidad de probabilidad de la nube de electrones. La densidad $\rho(\mathbf{y})$ toma valores apreciables para distancias menores o iguales que el tamaño del átomo, $|\mathbf{y}| \lesssim a(Z)$, y está normalizada de acuerdo con

$$\int d^3y\, \rho(\mathbf{y}) = Z .$$

(a) Demostrar que la amplitud de difusión en la aproximación de Born está dada por

$$f(p, \cos\theta) = \frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{ZZ'e^2}{q^2} \left[1 - \frac{1}{Z} \int d^3y\, \rho(\mathbf{y})\, e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}}\right] ,$$

donde $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$. Utilizando esta expresión y suponiendo que $\rho(\mathbf{y})$ tiene simetría bajo paridad, probar que las divergencias obtenidas en el problema anterior para $\mathbf{q} \to 0$, debidas al largo alcance del potencial coulombiano, desaparecen. Ayuda: Desarrollar la exponencial $e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}}$ en serie de potencias de q.

(b) Considerar el caso particular de átomos de hidrógeno, $Z = 1$, y suponer que el electrón se encuentra en su estado fundamental $\psi_{100}(\mathbf{x})$. Calcular $f^{(1)} \equiv f_\mathrm{B}(p, \cos\theta)$. Probar que la sección eficaz total en la aproximación de Born está dada por

$$\sigma_\mathrm{B} = \frac{Z'^2}{3} \left(\frac{\mu}{\mu_e}\right)^2 \pi a_0^2\, \frac{12 + 18\,k^2 a_0^2 + 7\,k^4 a_0^4}{(1 + k^2 a_0^2)^3} ,$$

donde μ_e es la masa del electrón. Estudiar la validez de la aproximación de Born en este problema para energías bajas y altas.

7. Demostrar que la ecuación de Lippmann-Schwinger en una dimensión para la función de ondas $\psi(x)$ de una partícula libre que incide sobre un potencial $V(x)$ está dada en la representación de posiciones por

$$\psi(x) = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi\hbar}} - \frac{i\mu}{\hbar^2 k} \int dy \, e^{ik|x-y|} \, V(y) \, \psi(y) \ ,$$

donde μ denota la masa de la partícula y $k > 0$. El primer término corresponde a la onda incidente y el segundo a la onda difundida. Suponiendo que el potencial es apreciable en un región $|x| \lesssim a$, probar que asintóticamente ($|x| \to \infty$) la función de ondas toma la forma

$$\psi(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \begin{cases} \big[1 + f(k,k)\big] \, e^{ikx} & x > 0 \\ e^{ikx} + f(k,-k) \, e^{-ikx} & x < 0 \end{cases} .$$

Encontrar $f(k, k' = \pm k)$.

8. Demostrar, resolviendo la ecuación radial para el hamiltoniano completo, que para el potencial

$$V(r) = \frac{V_0}{r^2} \qquad V_0 = \text{const.}$$

los desfases están dados por

$$\delta_\ell(p) = \frac{\pi}{2} \left[\sqrt{\left(\ell + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2\mu V_0}{\hbar^2}} - \left(\ell + \frac{1}{2}\right) \right] . \tag{1}$$

Argumentar que la convergencia de la serie

$$f(p, \cos\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) \, \frac{e^{2i\delta_\ell(p)} - 1}{2ik} \, P_\ell(\cos\theta) \tag{2}$$

para ángulos θ pequeños depende mucho de la contribución de términos con ℓ muy grande. Probar que para

$$\frac{2\mu V_0}{\hbar^2} \ll 1$$

la sección diferencial eficaz está dada aproximadamente por

$$\frac{d\sigma}{d\theta} \approx \frac{\pi^3 \mu V_0^2}{2\hbar^2 E} \, \cot(\theta/2) \ ,$$

donde E es la energía de la partículas incidentes. Para ello, desarrollar los desfases (1) en serie de potencias de $8\mu V_0/(2\ell+1)^2 \ll 1$ y quédese con los dos primeros términos, trasladando este desarrollo a la serie (2) para la amplitud de difusión para estimar la suma tomando el límite $h \to 1$ de la fórmula

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2hx + h^2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} h^\ell P_\ell(x) \qquad |h| < 1 \ .$$

9. Considerar el potencial repulsivo

$$V(r) = \begin{cases} V_0 > 0 & \text{si} \quad r < R \\ 0 & \text{si} \quad r > R \end{cases} \ .$$

Resolviendo la ecuación radial correspondiente e imponiendo condiciones de continuidad para la solución y su derivada en $r = R$, probar que el desfase $\delta_0(p)$ para energías de incidencia muy pequeñas es

$$\delta_0 = kR\left(\frac{\tanh k_0 R}{k_0 R} - 1\right) \qquad k_0^2 = \frac{2\mu V_0}{\hbar^2} \ .$$

Calcular σ_0.

10. Sea el potencial central

$$V(r) = \begin{cases} \infty & \text{si } r < R \\ \dfrac{V_0}{r^2} & \text{si } r > R \end{cases} \ ,$$

con $V_0 > 0$

(a) Calcular los desfases.

(b) Suponer en lo que sigue que

$$\frac{\mu V_0}{\hbar^2} \ll 1 \ ,$$

Encontrar en la aproximación de onda s ($\ell = 0$) la sección eficaz total para energías de incidencia bajas. Hallar, utilizando la descripción semiclásica en términos del parámetro de impacto y del momento angular, la sección eficaz total para energías de incidencia altas.

11. Considerar el potencial central $V(r) = V_0\,\delta(r - R)$ con V_0 y R positivos. ¿Cúales son las condiciones que debe satisfacer la parte radial de la función de ondas y su derivada en $r = R$? Utilizando éstas y regularidad en el origen, encontrar la ecuación que satisface el desfase $\delta_0(p)$ (recuerde que $\ell = 0$). Probar que en el límite $V_0 \to \infty$ se tiene $\delta_0(p) = -kR$.

12. Calcular para energías incidentes pequeñas el desfase en onda s para el potencial

$$V(r) = \frac{3\hbar^2}{8\mu}\,\frac{1}{(\alpha + r)^2} \ ,$$

donde μ es la masa de la partícula incidente y α es una constante positiva con dimensiones de longitud.

13. (Problema de examen)

1. Escribir la ecuación de Lippmann-Schwinger en representación de momentos para un problema de difusión de una partícula de masa m y un potencial constante $\langle \mathbf{p}'|V|\mathbf{p}\rangle = V_0$ en un volumen $\mathcal{V}$.
   ¿Qué representa $V(x)$ en espacio de posiciones?
   Observando que $T(\omega, \mathbf{p}) = T(\omega)$ es también independiente del momento, resolver la ecuación para T dejando indicada (sin evaluar) la integral

$$\gamma \equiv \mathcal{V} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega + i\epsilon - \frac{p^2}{2m}} \ .$$

2. La integral γ es divergente. Para que el resultado tenga sentido, modificar el potencial por una versión regulada mediante un parámetro Λ, $\langle \mathbf{p}'|V|\mathbf{p}\rangle = V_0(\Lambda)\theta(\Lambda - |\mathbf{p}-\mathbf{p}'|)$, que se anula si el momento transferido excede Λ.
   Para $p \ll \Lambda$, arguya que el operador T sigue siendo independiente del momento. Evaluarlo ahora por completo con ayuda de la integral
$$\int_0^{\frac{\Lambda}{\sqrt{2m}}} \frac{p^2 dp}{\omega - p^2 + i\epsilon} = -\frac{\Lambda}{\sqrt{2m}} - i\pi\sqrt{\frac{\omega}{2}} + O(\frac{\omega}{\Lambda}) \ ,$$
   despreciando el último término para Λ lo suficientemente grande.

3. Conocido T, separar sus partes real e imaginaria y obtenga el desfasaje en onda s, $\delta_0(s)$. (¿Por qué se anulan los demás?).
   ¿Puede explicarse el signo de $\delta_0(s)$? ¿Puede darse una resonancia en este potencial?

4. Mostrar que la longitud de difusión es
$$a_s \simeq \frac{-mV_0\pi\mathcal{V}/\sqrt{2}}{1 + m\Lambda V_0 \mathcal{V}}$$
   y tomar el límite $\Lambda \to \infty$.

5. Para conseguir una familia de potenciales que, independientemente de Λ, proporcionen una longitud de difusión fijada no nula (por ejemplo tomada de un experimento), se debe forzar la condición $\frac{da_s}{d\Lambda} = 0$ eligiendo la dependencia funcional $V_0(\Lambda)$. Obtenerla y dar un tal potencial $\langle \mathbf{p}'|V|\mathbf{p}\rangle$. (A este procedimiento se le denomina "renormalización" del potencial).

14. Considerar la fórmula de Breit-Wigner para el desfase cerca de una resonancia de momento angular l,
$$\mathrm{sen}\delta^l = \frac{\Gamma/2}{\sqrt{(E-E_R)^2 + (\Gamma/2)^2}}$$

(i) (Trivial) ¿Satisface σ^l la cota de unitariedad?

(ii) Escribir la expansión del alcance efectivo en términos de a_l, r_l. ¿Es la fórmula de Breit-Wigner compatible con ella? ¿Por qué?

(iii) Sustituir ahora $\Gamma \to \Gamma \times \left(\frac{p}{p_R}\right)^{2l+1}$, donde $E_R = p_R^2/2m$ define el momento de la resonancia. Calcular a_l, r_l en términos de (E_R, Γ, m). ¿Qué ocurre si la resonancia está cerca del umbral de la reacción, esto es, $E_R \simeq 0$? [1] Dibujar la sección eficaz parcial σ^l para la Breit-Wigner anterior, y para ésta modificada.

(iv) Considerar ahora el siguiente desfasaje como función de la energía, la masa de la partícula, y dos constantes positivas V_0 y a,
$$\delta^0 = \frac{\pi a\sqrt{2mE}}{8\hbar}\frac{V_0^2}{E^2} \ .$$
¿ Es un desfasaje aceptable para todas las energías? ¿Y para $E \gg V_0$? ¿Puede presentar comportamiento resonante?

[1] Esto ocurre con frecuencia en física atómica y nuclear, y es en ocasiones de gran utilidad.