UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
DEPARTAMENTO DE FISICA TEORICA I

Física computacional – Curso 2011/12 – Problemas a entregar

Los problemas de la presente hoja deberán entregarse al profesor de la asignatura antes del las 10:30 horas del 10 de enero de 2012.

Problema 1 [2 puntos]. Calcúlese el error local del esquema numérico

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[\,3\,f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1})\,\right].$$

Problema 2 [3 puntos]. Ecuéntrese mediante el método de Runge-Kutta 2 (también conocido como del punto medio) la solución al problema de valores iniciales

$$\left.\begin{array}{l} \dot{y}(t) = -y^2(t) \\ y(0) = 1 \end{array}\right\}$$

en el intervalo $[0, 100]$. Úsese un salto $h = \delta t = 0.1$. Demostrar analíticamente la estabilidad de la solución. Comprobarla numéricamente de la siguiente forma: comparar las soluciones numéricas $\{y_n\}_{n=0\cdots N}$ y $\{z_n\}_{n=0\cdots N}$ obtenidas para condiciones iniciales $y(0) = 1.00$ y $z(0) = 1.01$.

Nótese que en el análisis de estabilidad se pide estabilidad y no estabilidad absoluta.

Problema 3 [2 puntos]. Considérese el esquema de Runge-Kutta cuyo diagrama de Butcher es

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ \hline & 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{array}\,.$$

Deducir la condición que tiene que satisfacer $\partial f/\partial z$ para que haya estabilidad absoluta. Dibujar con ayuada de Maple la región de estabilidad absoluta. Para esto último puede usarse el comando de maple implicitplot.

Problema 4. Como es concocido, las trayectorias que describen los planetas en su movimiento alrededor del sol son planas. Si escogemos el plano xy como el plano que las contiene y trabajamos en coordenadas polares $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$, las ecuaciones de movimiento toman la forma

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{k}{r^2} \tag{2}$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\,\dot{\theta} = 0\,. \tag{3}$$

La constante k está dada por $k = GM_{\text{sol}}$, con G la constante de la gravitación universal de Newton. Las condiciones iniciales vienen dadas en función del semieje mayor a y de la excentricidad ϵ de la órbitas planetarias mediante las expresiones[1]

$$r(0) = r_0 = a\,(1-\epsilon) \qquad \theta(0) = 0$$

$$\dot{r}(0) = 0 \qquad \dot{\theta}(0) = \frac{v_0}{r_0} = \sqrt{\frac{k\,(1+\epsilon)}{a^3\,(1-\epsilon)^3}}\,.$$

Los valores de a y ϵ para las planetas son aproximadamente

Planeta	Masa (kg)	Semieje mayor (UA)	Excentricidad
Mercurio	$2.4{\times}10^{23}$	0.3871	0.2056
Venus	$4.9{\times}10^{24}$	0.7233	0.0068
Tierra	$6.0{\times}10^{24}$	1.0000	0.0167
Marte	$6.6{\times}10^{23}$	1.5237	0.0934
Júpiter	$1.9{\times}10^{27}$	5.2029	0.0484
Saturno	$5.7{\times}10^{26}$	9.537	0.054
Urano	$8.8{\times}10^{25}$	19.189	0.047
Neptuno	$1.0{\times}10^{26}$	30.070	0.009
Plutón	$\sim 1.3{\times}10^{22}$	49.33	0.248

en donde se ha usado como unidad de longitud la unidad astronómica de longitud UA, con equivalencia

$$1\,\text{UA} = 1.5{\times}10^{11}\,\text{m}.$$

En estas unidades la constante k y la velocidad de la luz c toman los valores

$$k = GM_{\text{sol}} = 4\pi^2\,\frac{(\text{UA})^3}{\text{año}^2} \qquad c = 63241\ \text{UA/año}\,.$$

(1) [2 puntos]. Utilizando el método de Runge-Kutta de orden cuatro, resolver numéricamente el problema de valores iniciales para los distintos planetas. Obtener dos gráficas con las órbitas de los planetas; la primera con las órbitas de Mercurio,

[1] Físicamente la posición y la velocidad iniciales de un planeta pueden escribirse en términos de su energá, su masa y de la constante k, que a su vez determinan el semieje mayor y la excentricidad de la órbita.

Venus, Tierra, Marte y Júpiter, y la segunda con las de Júpiter, Saturno, Urano, Neptuno y Plutón.

Recuérdese que hay que escribir el sistema (2)-(3) de ecuaciones de segundo orden como un sistema de ecuaciones de primer orden. En lo que se refiere al código Maple, puede definirse, si se desea, un `procedure` que dependa de a y ϵ y ejecutarlo para cada planeta. Tambiénn puede obviarse el `procedure` y escribir un programa sencillo que se ejecute varias veces cambiando los datos para el semieje mayor y la excentricidad, y guardando los resultados con nombres distintos.

La Teoría de la relativdad general de Einstein modifica las ecuaciones de moviemiento, las cuales pasan a ser

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{k}{r^2}\left(1 - \frac{4k}{c^2 r} - \frac{3\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r^2\dot{\theta}^2}{c^2}\right) \tag{4}$$

$$r^2\ddot{\theta} + 2\,r\dot{r}\,\dot{\theta} = \frac{4k}{c^2}\,\dot{r}\dot{\theta}\,. \tag{5}$$

Debido a su pequeñez, las correcciones relativistas son muy difíciles de detectar numéricamente. Por ejemplo, para Mercurio, tomando $r \sim a \sim 0.4\,\mathrm{UA}$, se tiene que la primera de las correcciones en (4) es del orden de $4k/c^2 r \sim 10^{-7}$, que es mucho menor que 1. Para entender cualitativamente el efecto de estas correciones pueden tomarse valores de c muchos menores que el verdadero y extrapolar los resultados. Este procedimiento puede implementarse de la siguiente forma:

(2) [2 puntos]. Considerese de ahora en adelante el caso de Mercurio[2]. Resuélvase numéricamente mediante RK4 el sistema de ecuaciones (4)-(5) para los valores de a y ϵ que figuran en la tabla. Tómese com intervalo temporal $[0, 5T]$, con T el período no relativista. Tómese h igual a un día terrestre. Representar gráficamente la órbita.

La gráfica debe mostrar una elipse que rota en el plano.

(3) [Difícil. 2 puntos. Recomendable intentarlo sólo si se han resuelto los ejercicios anteriores]. El perihelio (o punto de máximo acercamiento al sol) avanza en cada vuelta un ángulo $\Delta\theta$, ángulo que se conoce como precesión del perihelio. Calcularlo para $c = 100n$, con $n = 1 \ldots 10$. Ajustar linealmente los valores obtenidos para $\Delta\theta$ frente a $1/c^2$ y a partir del ajuste obtener $\Delta\theta$ para el valor verdadero de c. Comparar el resultado con el valor observado experimentalmente de 43"/siglo[3].

[2] Ésta no es una elección al azar, sino que se debe al hecho de que la órbita de Mercurio es la de mayor excentricidad de entre las de los planetas interiores, o lo que es lo mismo, la menos circular.

[3] Esta observación experimental constituye uno de los llamados tests clásicos de la Relatividad general.