UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
DEPARTAMENTO DE FISICA TEORICA I

Física computacional – Curso 2011/12 – Problemas
Métodos numéricos para ecuaciones diferenciales ordinarias

1. Sea el problema de valores iniciales

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f\big(t, y(t)\big) \\ &y(0) = y_0 \end{aligned}\right\} .$$

Calcular el error local de truncación y estudiar la estabilidad absoluta de los siguientes esquemas:

$$\begin{aligned}
&\text{Esquema 1:} \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[\, 3\, f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1})\,\right] \\
&\text{Esquema 2:} \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[\, f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\,\right] \\
&\text{Esquema 3:} \quad y_{n+1} = \frac{1}{2}\big(y_n + y_{n-1}\big) + \frac{h}{4}\left[\, 7\, f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1})\,\right] \\
&\text{Esquema 4:} \quad y_{n+1} = -4y_n + 5y_{n-1} + h\Big[4\, f\big(t_n, y_n\big) + 2\, f\big(t_{n-1}, y_{n-1}\big)\Big] .
\end{aligned}$$

2. Sea el problema inicial

$$\left.\begin{aligned} &\dot{y}(t) = \sqrt{t}\, y^2(t) \\ &y(0) = 1 \end{aligned}\right\}$$

y tómese un incremento temporal $\delta t = t_{n+1} - t_n = 0.1$. Calcular su solución en el intervalo $[0, 1]$ por los métodos de (1) Euler, (2) predicción-corrección de tipo Euler-trapezoidal, con una iteración de cuatro pasos para la corrección trapezoidal, (3) Runge-Kutta de segundo orden, y (4) Runge-Kutta de cuarto orden. Resolver el problema analíticamente y representar en una gráfica las soluciones numérica obtenidas y la analítica. Utilizar símbolos que permitan distinguir unas soluciones de otras.

3. Considérese el problema de valores iniciales

$$\left.\begin{aligned} &\dot{y}(t) = -\frac{y}{1+t^2} \\ &y(0) = 1 \end{aligned}\right\} .$$

(1) Resolver el problema analíticamente.

(2) Calcular la solución por el método de Euler en el intervalo $[0, 1]$ tomando $\delta t = 0.1$.

(3) Repetir el apartado (2) para $\delta = 0.05$.

(4) Representar gráficamente las tres soluciones obtenidas.

(5) Estudiar si las soluciones de Euler son estables.

(6) Resolver el problema planteado usando el método de predicción-corrección con una iteración de cuatro pasos para la regla trapezoidal y $\delta t = 0.05$. Calcular el error de truncación acumulado en $t = 1$. Comparar los resultados con los del apartado (3).

4. Encontrar una solución numérica al problema de valores iniciales

$$\left.\begin{array}{l} \dot{y}(t) = -y^2(t) \\ y(0) = 1 \end{array}\right\} .$$

en el intervalo $[0, 100]$ usando el método de Euler con un salto temporal δt que inicialmente vale 0.1. Representar gráficamente la solución encontrada y compararla con la analítica.

5. Calcular por el método de Runge-Kutta de segundo orden el valor de la solución del problema

$$\dot{y}(t) = y^2 + 1 \qquad y(0) = 0$$

en $t = 0.1, 0.2, \ldots, 1$ usando $\delta t = 0.1$. Estudiar la estabilidad.

6. Se quiere averiguar la solución del problema de valores iniciales

$$\dot{y}(t) = -100y + t \qquad y(0) = 1$$

por los métodos de Runge-Kutta de orden dos y cuatro en $t = 1$. Encontrar el salto δt para que el error sea menor que 10^{-8}.

7. Calcular por Runge-Kutta de cuarto orden la solución al problema de valores iniciales

$$\left.\begin{array}{l} \dot{y_1} = y_2 \\ \dot{y_2} = y_1 + t \\ y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1 \end{array}\right\}$$

en $t = 0.1, 0, 2, \ldots, 1$ usando $\delta t = 0.1$.

8. La interacción entre una especie de presas y otra de depredadores puede modelarse de la siguiente forma. Si llamamos D y P a las densidades de depredadores y presas, sus variaciones temporales puede suponerse en primera aproximación que satisfacen el problema

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} &= \alpha P - \beta P D \\ \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} &= \delta P D - \gamma D \end{aligned}\right\},$$

donde

$\alpha =$ ratio de aumento de población de presas en ausencia de depredadores
$\beta =$ número de muertes de presas por unidad de encuentro con depredadores
$\delta =$ ratio de reproducción de depredadores por presa devorada
$\gamma =$ mortandad de depredadores en ausencia de presas.

Este modelo fue propuesto por Lotka (1925) y Volterra (1926) independientemente. Utilizando el método de Runge-Kutta de orden dos, resolver numéricamente el problema diferencial anterior para valores de los parámetros

$$\alpha = 0.3 \qquad \beta = 0.2 \qquad \gamma = 0.4 \qquad \delta = 0.1$$

y condiciones iniciales $F(0)=20$, $R(0)=20$. Calcular la población de presas y depredadores en un tiempo $t = 450$. ¿Cuál es aproximadamente la población máxima de cada especie para los parámetros anteriores?

9. Considérese el problema inicial

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= -y_1 - y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} &= y_1 - 2y_2 \\ y_1(0) &= y_2(0) = y_0 \end{aligned}\right\}.$$

(a) Escribir el esquema numérico de Euler correspondiente.
(b) Estudiar la estabilidad absoluta de dicho esquema.

10. Resolver mediante el método del disparo lineal el problema de contorno

$$\left.\begin{aligned} & y'' = \frac{x}{\pi} - y \qquad 0 \le x \le \pi/2 \\ & y(0) = 3 \\ & y(\pi/2) = -2 \end{aligned}\right\}.$$

Para resolver los problemas iniciales correspondientes úsese el método de Runge-Kutta de cuarto orden. Tómese un salto $\delta t = 0.1$.

11. Usar el método del disparo no lineal para resolver numéricamente el problema de contorno

$$\left.\begin{array}{ll} y'' - y\,y' - \dfrac{15}{x^3} + \dfrac{9}{x^2} = 0 & \qquad 1 \le x \le 2 \\ y(1) = 6 & \\ y(2) = \dfrac{9}{2} & \end{array}\right\} .$$

Comparar la solución obtebida con la analítica

$$y(x) = 3 + \frac{3}{x} .$$

12. Sea el problema de contorno no lineal con condiciones de contorno mixtas

$$\left.\begin{array}{ll} y''(x) = f\big(x,\, y(x),\, y'(x)\big) & \qquad a \le x \le b \\ y'(a) = \alpha & \\ y(b) = \beta & \end{array}\right\} . \tag{1}$$

Para resolverlo se utiliza el método de disparo de forma similar al caso de condiciones de contorno Dirichlet. Para ello se substituye el problema dado por un problema de valores iniciales que se resuelve iterativamente hasta que la solución satisface las condiciones de contorno en (1). Si el método iterativo que se usa es el de Newton, formular la sucesión de problemas iniciales que son necesarios resolver y escribir en términos de sus soluciones la ecuación que define la iteración de Newton.