UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA I
GRADO EN FÍSICA

Física cuántica I – Grupo E – 2014/15
Examen final – primera parte – 10 de septiembre de 2015

Nombre: Soluciones Firma:

Cuestión 1 (2.5 puntos). Una partícula de masa m atrapada en un pozo infinito unidimensional de anchura a centrado en el origen se encuentra en $t = 0$ en un estado

$$\psi(x,0) = N\left[\phi_1(x) - 2\mathrm{i}\,\phi_5(x)\right],$$

donde $\phi_n(x)$ son los autoestado normalizados con autoenergías E_n del pozo, y N es una csontante. ¿Cuál de los siguientes valores de N da una función de ondas normalizada?

$$-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{5}}, \qquad \frac{1}{5}, \qquad \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{13}}, \qquad \frac{1}{13}.$$

$$\boxed{N = -\frac{i}{\sqrt{5}}}$$

Escríbase la función de ondas en un tiempo $t > 0$.

$$\boxed{\psi(x,t) = \frac{-i}{\sqrt{5}}\left[\phi_1(x)\, e^{-iE_1t/\hbar} - 2i\,\phi_2\, e^{-iE_5t/\hbar}\right]}$$

Calcúlense los valores esperados del momento y de su cuadrado en $t > 0$

$$\boxed{\langle p\rangle_t = 0 \qquad \langle p^2\rangle_t = \frac{26}{5}\left(\frac{\hbar\pi}{a}\right)^2}$$

¿Cuál es la probalidad de encontrar la partícula en $t = 0$ en el intervalo $-b \le x \le b$, con $b/a << 1$?

$$\boxed{P_{[-b,b]}(0) = 4\frac{b}{a}\left[1 + O\left(b^2/a^2\right)\right]}$$

Ver más abajo

DATO. Los estados propios del pozo y sus energías son

$$\left.\begin{aligned} \phi_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{a}}\cos\left(\frac{nx}{a}\right), & n &= 1,3,5,\ldots \\ \phi_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{nx}{a}\right), & n &= 2,4,6,\ldots \end{aligned}\right\} \qquad E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2.$$

Cuestión 2 (1 punto). En un experimento de dispersión Compton, un fotón de 250 MeV incide sobre un protón en reposo. Sabiendo que la masa del protón es aproximadamente 938 MeV/c^2, calcúlese con tres cifras significativas la máxima energía que puede comunicar el fotón al protón y el correspondiente ángulo de dispersión del fotón (medido con respecto a la dirección de incidencia).

$\Delta E =$ 86.9 MeV	$\theta = \pi$

Cuestión 3 (1.5 puntos). *En esta pregunta es necesario entregar los cálculos.*
Una partícula se mueve en un pozo infinito unidimensional. ¿Puede el operador

$$A = 1 + x\,\frac{d}{dx}$$

describir un observable?

Para que ese sea el caso A debe ser autoadjunto. Ahora bien,

$$A = A^\dagger \iff \langle \psi_1, A\psi_2 \rangle = \langle A\psi_1, \psi_2 \rangle$$

$$\langle \psi_1, A\psi_2 \rangle = \int \psi_1^* \left(1 + x\frac{d}{dx}\right)\psi_2 \, dx = \text{integrando por partes}$$

$$= \int dx\, \psi_1^*\psi_2 + \int dx \left[\frac{d}{dx}(\psi_1^* x \psi_2) - \frac{d}{dx}(x\psi_1^*)\,\psi_2\right]$$

$$= \cancel{\int dx\, \psi_1^*\psi_2} + \underbrace{x\psi_1^*\psi_2 \Big]_{x=-a/2}^{x=a/2}}_{=0} - \int dx \left[\cancel{\psi_1^*\psi_2} + x\frac{d\psi_1^*}{dx}\psi_2\right]$$

pues $\psi(x,t) = 0$ en $x = \pm \frac{a}{2}$

$$= \boxed{-\int dx\, x\frac{d\psi_1^*}{dx}\psi_2}$$

$$\langle A\psi_1, \psi_2 \rangle = \int dx \left[\left(1 + x\frac{d}{dx}\right)\psi_1\right]^* \psi_2 =$$

$$= \int dx\, \psi_1^*\psi_2 + \int dx\, \frac{x\,d\psi_1^*}{dx}\psi_2 \neq -\int dx\, x\frac{d\psi_1^*}{dx}\psi_2$$

$\Rightarrow$ A NO puede describir un observable

Problema 1

a) $\int |\psi(x,0)|^2 dx = 1$

$\parallel$

$|N|^2 \int dx \left[\phi_1^* \phi_1 - 2i\phi_1^* \phi_5 + 2i \phi_1 \phi_5^* + 4 \phi_5^* \phi_5 \right]$

$\parallel$

usando $\int \phi_n^* \phi_m \, dx = \delta_{nm}$

$\parallel$

$|N|^2 (1+4) \Rightarrow |N|^2 = \frac{1}{5} \Rightarrow N = -\frac{i}{\sqrt{5}}$ de entre las propuestas

b) Trivial

c) $P = -i\hbar \frac{d}{dx}$ cambia paridad

$\langle P \rangle$ = suma de integrales con

$\phi_1^* \frac{d}{dx} \phi_1$, $\phi_1^* \frac{d}{dx} \phi_5$, $\phi_5^* \frac{d}{dx} \phi_1$, $\phi_5^* \frac{d}{dx} \phi_5$

Todas estas integrales son cero pues ϕ_1^*, ϕ_5^* son pares, $\frac{d\phi_1}{dx}$ y $\frac{d\phi_2}{dx}$ son impares y el intervalo de integración es simétrico. $\Rightarrow \langle P \rangle = 0$

$\langle P^2 \rangle = 2m \langle H \rangle = 2m |N|^2 (E_1 + 4E_5)$

$= 2m \frac{1}{5} \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar\pi}{a}\right)^2 (1 + 4\cdot 5^2) = \frac{26}{5} \left(\frac{\hbar\pi}{a}\right)^2$

(d) $P_{[-b,b]}(0) = |N|^2 \int_{-b}^{b} \frac{2}{a} \left[\cos^2\left(\frac{x}{a}\right) + 4 \cos^2\left(\frac{5x}{a}\right) \right]$

$= b \ll a \Rightarrow |x| \ll a$. Pueden desarrollarse los cosenos

$= \frac{2|N|^2}{a} \int_{-b}^{b} dx \left[\frac{1}{|N|^2} + O\left(\frac{x^2}{a^2}\right) \right] = 4 \frac{b}{a} \left[1 + O\left(\frac{b^2}{a^2}\right) \right]$

Problema 2

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{h}{mc}(1-\cos\theta) \qquad (1)$$

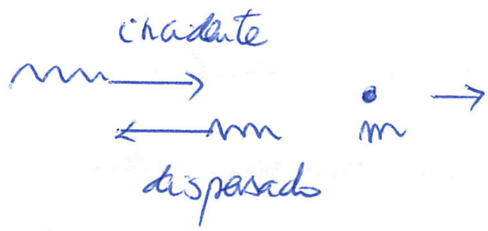
λ: fotón dispersado

λ_0: fotón incidente

θ: ángulo de dispersión

La energía máxima comunicada al protón es la máxima perdida por el fotón, que corresponde a ν mínima, λ máxima, $\cos\theta = -1$, es decir

$$\boxed{\theta = \pi}$$



$$(1) \Leftrightarrow \frac{c}{\nu} - \frac{c}{\nu_0} = \frac{2h}{mc} \qquad \text{para } \theta = \pi$$

$$\frac{c(\nu_0 - \nu)}{\nu\nu_0} = \frac{2h}{mc} \Leftrightarrow \nu_0 - \nu = \frac{2h}{mc^2}\nu\nu_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \nu\left(1 + \frac{2h\nu_0}{mc^2}\right) = \nu_0 \Leftrightarrow \nu = \frac{\nu_0}{1 + \frac{2h\nu_0}{mc^2}}$$

$$\Leftrightarrow \Delta E = h(\nu_0 - \nu) = h\left[\nu_0 - \frac{\nu_0}{1 + \frac{2h\nu_0}{mc^2}}\right]$$

$$\Delta E = h\nu_0 \frac{2h\nu_0/mc^2}{1 + 2h\nu_0/mc^2}$$

$$\Delta E = 86.9 \text{ MeV} \qquad , \qquad \Delta E = 258 \text{ MeV}$$

$h\nu_0 = 250$ MeV $\quad mc^2 = 938$ MeV $\qquad h\nu_0 = 500$ MeV

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA I
GRADO EN FÍSICA

Física cuántica I – Grupo E – 2014/15
Examen final – primera parte – 10 de Septiembre de 2015

Nombre:______________________________ Firma:________________

Cuestión 1 (2.5 puntos). Una partícula de masa m atrapada en un pozo infinito unidimensional de anchura a centrado en el origen se encuentra en $t=0$ en un estado

$$\psi(x,0) = N\left[3\phi_1(x) - 2\mathrm{i}\,\phi_5(x)\right],$$

donde $\phi_n(x)$ son los autoestado normalizados con autoenergías E_n del pozo, y N es una csontante. ¿Cuál de los siguientes valores de N da una función de ondas normalizada?

$$-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{5}}, \qquad \frac{1}{5}, \qquad \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{13}}, \qquad \frac{1}{13}.$$

$$\boxed{N = \frac{i}{\sqrt{13}}}$$

Escríbase la función de ondas en un tiempo $t>0$.

$$\boxed{\psi(x,t) = \frac{i}{\sqrt{13}}\left[3\phi_1(x)\, e^{-iE_1t/\hbar} - 2i\phi_5(x)e^{-iE_5t/\hbar}\right]}$$

Calcúlense los valores esperados del momento y de su cuadrado en $t>0$

$$\boxed{\langle p\rangle_t = 0 \qquad\qquad \langle p^2\rangle_t = \frac{109}{13}\left(\frac{\hbar\pi}{a}\right)^2}$$

¿Cuál es la probalidad de encontrar la partícula en $t=0$ en el intervalo $-b \le x \le b$, con $b/a << 1$?

$$\boxed{P_{[-b,b]}(0) = 4\frac{b}{a}\left[1 + O\left(\frac{b^2}{a^2}\right)\right]}$$

DATO. Los estados propios del pozo y sus energías son

$$\left.\begin{array}{ll} \phi_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{a}}\cos\left(\dfrac{nx}{a}\right), & n = 1,3,5,\ldots \\ \phi_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{a}}\sin\left(\dfrac{nx}{a}\right), & n = 2,4,6,\ldots \end{array}\right\} \qquad E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2.$$

Cuestión 2 (1 punto). En un experimento de dispersión Compton, un fotón de 500 MeV incide sobre un protón en reposo. Sabiendo que la masa del protón es aproximadamente 938 MeV$/c^2$, calcúlese con tres cifras significativas la máxima energía que puede comunicar el fotón al protón y el correspondiente ángulo de dispersión del fotón (medido con respecto a la dirección de incidencia).

$\Delta E =$ 258 MeV	$\theta =$ π

Cuestión 3 (1.5 puntos). *En esta pregunta es necesario entregar los cálculos.*
Una partícula se mueve en un pozo infinito unidimensional. ¿Puede el operador

$$A = 1 + x\,\frac{d}{dx}$$

describir un observable?