Todavía falta dar sentido a $|\psi|^2$ para una plana. En los problemas de colisión, tanto en Mecánica clásica como en Mecánica cuántica, el interés se centra en estudiar la dispersión de un haz de partículas, todas ellas con el mismo momento p, por un potencial. Esto sugiere fijar la amplitud (= constante de normalización) A de la función de ondas (algunos autores la llaman generalizada)

$\psi(x,t) = A\, e^{-i(Et - px)/\hbar}$ exigiendo la normalización de la densidad de probabilidad de que la partícula tenga momento p, y no la normalización de la probabilidad de encontrar la partícula.

Se suele exigir que

$$\frac{\text{probabilidad de llevar momento } p}{\text{unidad volumen} \times \text{unidad momento}} = \frac{1}{(2\pi\hbar)} \qquad (26.1)$$

en dimensión d $\quad 1/(2\pi\hbar)^d$

Estudiemos el lado izquierdo. Sabemos que

$$J = -\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*\right)$$

$$= \frac{\text{probabilidad}}{\text{unidad volumen}} \text{ de que la partícula tenga velocidad } \vec{v}$$

$$= \text{para } \psi = A\, e^{-i(Et - px)/\hbar} = |A|^2 \frac{p}{m}$$

La densidad de probabilidad por unidad de momento es

$$m \frac{dJ}{dp} = |A|^2$$

Así pues

$$|A|^2 = \frac{1}{2\pi\hbar} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$$

$$\boxed{\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{-i(Et - px)/\hbar} \quad \text{salvo fase}}$$

En dimensión d se tendría

$$\psi(\vec{x},t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{d/2}}\, e^{-i(Et - \vec{p}\vec{x})/\hbar}$$

Entendamos ahora por qué el lado derecho de (26.1) se fija como $\frac{1}{2\pi\hbar}$. Para ello supongamos un volumen L (longitud en una dimensión) en el que la partícula puede moverse para luego tomar $L \to \infty$. Como queremos que en el límite $L \to \infty$ la función de ondas sea una onda viajera, tomaremos condiciones de contorno periódicas para L finita. La ec. de Schrödinger es

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} \qquad -\infty < t < \infty \;, \quad -\frac{L}{2} \le x \le \frac{L}{2}$$

$$\psi\left(\tfrac{L}{2}, t\right) = \psi\left(-\tfrac{L}{2}, t\right)$$

$$\psi'\left(\tfrac{L}{2}, t\right) = \psi'\left(-\tfrac{L}{2}, t\right)$$

Hacemos el ansatz estacionario

$$\psi(x,t) = e^{-iEt/\hbar}\,\phi(x) .$$

Esto da

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\phi$$

$$\phi(-\tfrac{L}{2}) = \phi(\tfrac{L}{2})$$

$$\phi'(\tfrac{L}{2}) = \phi'(\tfrac{L}{2})$$

cuya solución es

$$\phi = A e^{ikx} + B e^{-ikx} \qquad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} > 0$$

A, B = constantes de integración

Las condiciones de contorno requieren

$$A e^{-ikL/2} + B e^{ikL/2} = A e^{ikL/2} + B e^{-ikL/2}$$

$$ik(A e^{-ikL/2} - B e^{ikL/2}) = ik(A e^{ikL/2} - B e^{-ikL/2})$$

Existe solución para A y B si y sólo si

$$\det\begin{pmatrix} e^{-ikL/2} - e^{ikL/2} & e^{ikL/2} - e^{-ikL/2} \\ ik(e^{-ikL/2} - e^{ikL/2}) & ik(-e^{ikL/2} + e^{-ikL/2}) \end{pmatrix} = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} -2i\sin\frac{kL}{2} & 2i\sin\frac{kL}{2} \\ 2k\sin\frac{kL}{2} & 2k\sin\frac{kL}{2} \end{pmatrix} = 0$$

$$k\sin^2\frac{kL}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{kL}{2} = n\pi \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

Así pues

$$\left.\begin{array}{ll} \text{autofunciones:} & \phi_n(x) = e^{i\frac{2n\pi x}{L}} \\ \text{autoenergías:} & E_n = \dfrac{(\hbar k_n)^2}{2m} = \dfrac{\hbar^2}{2m}\left(\dfrac{2n\pi}{L}\right)^2 \end{array}\right\} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Los valores permitidos para el momento también están discretizados, pues

$$p_n = \hbar k_n = \frac{2\pi n}{L}\hbar \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

En el intervalo de momentos $[p, p+dp]$ hay $\frac{dp}{\Delta p}$ valores permitidos para el momento, donde $\Delta p = p_{n+1} - p_n$ la distancia entre dos valores consecutivos de p. Como

$$\Delta p = \frac{2\pi(n+1)}{L}\hbar - \frac{2\pi n}{L}\hbar = \frac{2\pi\hbar}{L},$$

se tiene que

$$\left.\begin{array}{l} \#\text{ momentos permitidos} \\ \text{en } [p, p+dp] \end{array}\right\} = \frac{dp}{2\pi\hbar/L} = \frac{L\,dp}{2\pi\hbar}$$

Por tanto

$$\frac{\text{densidad de momentos}}{\text{unidad de momento}} = \frac{\text{N}^{\circ}\text{ de momentos}}{\text{unidad longitud y de momento}} = \frac{1}{2\pi\hbar},$$

que justifica el lado derecho de (26.1)