UNIVERSIDAD
COMPLUTENSE
MADRID

Apellidos		
Nombre	DNI	
Asignatura **Física cuántica I**	Grupo	
Curso 2º	Fecha	

Física cuántica I - Grupos B y B2
Examen parcial – 31 de mayo de 2019

Tiempo disponible: 2 horas y 30 minutos.

Problema 1 (1 punto). ¿Cuáles de las siguientes funciones podrían describir un estado ligado $\psi(x,t) = e^{-\mathrm{i}Et/h}\phi(x)$ de una partícula que se mueve sobre la recta real en un potencial unidimensional?

	Sí	No	
$\begin{cases} \phi(x) = -\dfrac{x}{a}\, e^{x/a} & \text{si} \quad x \le 0 \\ \phi(x) = 0 & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$	☑	☐	
$\phi(x) = \sin(x/a)\, e^{x^2/a^2}$	☐	☑	$\to \infty$ para $x \to \pm\infty$
$\phi(x) = \dfrac{e^{-x^2/a^2}}{(x-a)^3}$	☐	☑	discontinua en $x=a$
$\phi(x) = \exp\left[-\left(\dfrac{a^2}{x^2} + \dfrac{x^2}{a^2}\right)\right]$	☑	☐	

En todas estas expresiones a es un parámetro con dimensiones de longitud.

En los casos afirmativos, las funciones son continuas (sus derivadas también) y de cuadrado integrable.

Problema 2 (1.5 puntos). Una partícula en un potencial unidimensional se encuentra en un estado dado por

$$\psi(x,t) = e^{-\mathrm{i}Et/h}\phi(x)\,, \qquad \phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ N\,e^{-x/a}\,\sin(x/a) & \text{si } x \geq 0 \end{cases},$$

con a un parámetro con dimensiones de longitud y N una constante.

¿A qué distancia del origen es más probable encontrar la partícula?

$$\boxed{x_{\text{máx}} = \frac{\pi a}{4}}$$

Calcular el valor esperado de x.

$$\boxed{\langle x \rangle_\phi = a}$$

• $\rho(x) = |\phi(x)|^2 = [\phi \text{ real}] = \phi^2(x)$

En x_{max}, $\frac{d\rho}{dx} = 0$

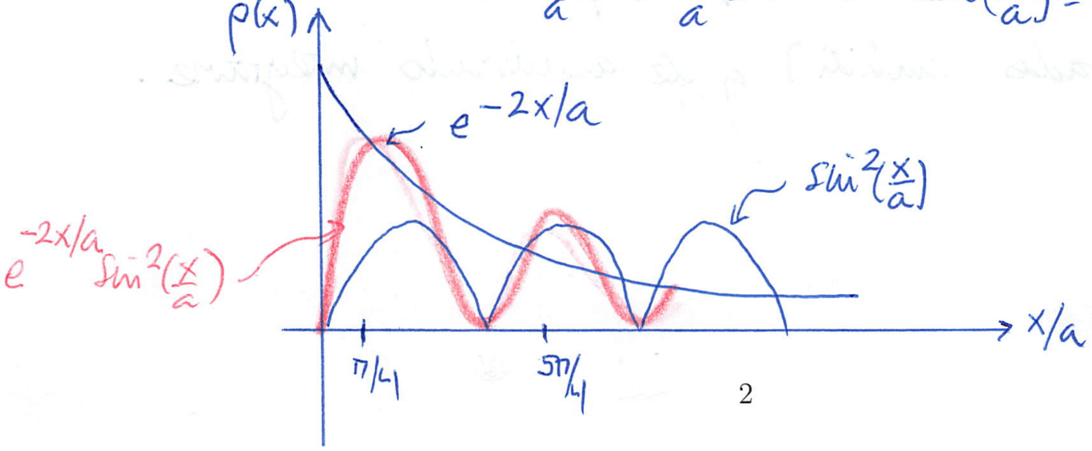
$$\frac{d\rho}{dx} = 2\phi\phi' = 2N^2 e^{-x/a} \sin\left(\frac{x}{a}\right) e^{-x/a}\left[-\frac{1}{a}\sin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{a}\cos\left(\frac{x}{a}\right)\right]$$

$\frac{d\rho}{dx} = 0 \Rightarrow$ $x = 0 \sim$ mínimo

$x \to \infty \sim$ mínimo

$\sin\frac{x}{a} = 0 \Rightarrow \frac{x}{a} = n\pi,\ n \in \mathbb{Z} \sim$ mínimos

$-\sin\frac{x}{a} + \cos\frac{x}{a} = 0 \Rightarrow \tan\left(\frac{x}{a}\right) = 1 \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{\pi}{4} + n\pi$



El máximo obviamente se alcanza para $\frac{x}{a} = \frac{\pi}{4}$

- Normalización:

$$1 = \int_0^\infty dx\, |\phi(x)|^2 = N^2 \int_0^\infty dx\, e^{-2x/a} \sin^2(x/a)$$

$$= N^2 \int_0^\infty dx\, e^{-2x/a} \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{2x}{a}\right)\right]$$

$$= \frac{N^2}{2}\left[\int_0^\infty dx\, e^{-2x/a} - \int_0^\infty dx\, e^{-2x/a} \cos\left(\frac{2x}{a}\right)\right]$$

$$= \left[\text{cambio } \frac{2x}{a} = y \Rightarrow x = \frac{a}{2}y,\ dx = \frac{a}{2}dy\right]$$

$$= \frac{N^2}{2}\frac{a}{2}\left[\underbrace{\int_0^\infty dy\, e^{-y}}_{-e^{-y}\Big|_0^\infty = 1} - \underbrace{\int_0^\infty dy\, e^{-y} \cos y}_{= \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}}\right]$$

← usar ayuda con $a = 1$

$$= \frac{N^2 a}{8} \Rightarrow N^2 = \frac{8}{a} \Rightarrow N = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{a}}$$

- $\langle x \rangle = N^2 \int_0^\infty dx\, e^{-2x/a} \sin^2\left(\frac{x}{a}\right) x$ = igual que antes

ojo

$$= \frac{N^2}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2 \left[\underbrace{\int_0^\infty dy\, x e^{-y}}_{=1} - \underbrace{\int_0^\infty dy\, y e^{-y} \cos y}_{= \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0}\right] =$$

ojo ojo

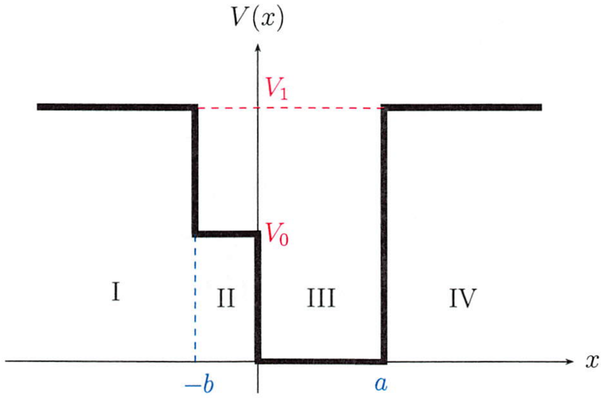
← ayudas

$$= \frac{8}{2a}\frac{a^2}{4} = a$$

UNIVERSIDAD
COMPLUTENSE
MADRID

Apellidos	
Nombre	DNI ....
Asignatura **Física cuántica I**	Grupo ....
Curso 2º	Fecha ....

Problema 3 (1.25 puntos). Considérese el pozo de la figura



¿Cuál es la paridad de los estados ligados $\psi(x,t) = e^{-iEt/h}\phi(x)$? Señalar con una **X** lo que proceda.

No tienen paridad definida	☑	Impar	☐
Par	☐	Algunos par, otros impar	☐

Escribir la forma de $\phi(x)$ para $V_0 < E < V_1$.

$\phi_I = A e^{k_I x}$ $k_I = \frac{\sqrt{2m(V_1-E)}}{\hbar}$

$\phi_{II} = B e^{-ik_{II} x} + C e^{ik_{II} x}$ $k_{II} = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}$

$\phi_{III} = D e^{-k_{III} x} + E e^{k_{III} x}$ $k_{III} = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

$\phi_{IV} = F e^{-k_{IV} x}$ $k_{IV} = k_I$

Problema 4 (3 puntos). Un átomo de hidrógeno se encuentra en un instante inicial en un estado dado por la función de ondas

$$\psi(\mathbf{x},0) = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{6}}\,\psi_{1\,0\,0}(\mathbf{x}) + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\psi_{2\,1\,0}(\mathbf{x}) - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\psi_{2\,1\,-1}(\mathbf{x})\,,$$

donde $\{\psi_{n\,\ell\,m}(\mathbf{x}), E_n\}$ son los estados propios del sistema.

¿Cuáles son las probabilidades de que al medir la tercera componente del momento angular se obtengan los valores $-\hbar$ y cero?

$\mathrm{Prob}\,(-\hbar) = \left\lvert -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\rvert^2 = \frac{1}{3}$	$\mathrm{Prob}\,(0) = \left\lvert \frac{i}{\sqrt{6}}\right\rvert^2 + \left\lvert \frac{1}{\sqrt{2}}\right\rvert^2 = \frac{2}{3}$

¿Cuáles son las probabilidades de que al medir la energía se obtengan los valores E_1 y E_3?

$\mathrm{Prob}\,(E_1) = \left\lvert \frac{i}{\sqrt{6}}\right\rvert^2 = \frac{1}{6}$	$\mathrm{Prob}\,(E_3) = 0$

¿Cuál son los valores esperados de la energía y de $\mathbf{L}^2$? Escribir el resultado para $\langle H\rangle_\psi$ en términos de E_1.

$\langle H\rangle_\psi = \frac{3}{8}E_1$	$\langle \mathbf{L}^2\rangle_\psi = \frac{5}{3}\hbar^2$

$$\langle H\rangle_\psi = \left\lvert\frac{i}{\sqrt{6}}\right\rvert^2 E_1 + \left\lvert\frac{1}{\sqrt{2}}\right\rvert^2 E_2 + \left\lvert-\frac{1}{\sqrt{3}}\right\rvert^2 E_2$$

$$= \frac{1}{6}E_1 + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)E_2 = \text{usar } E_2 = \frac{1}{4}E_1$$

$$= \frac{1}{6}E_1 + \frac{5}{6}\frac{1}{4}E_1 = \frac{1}{6}\frac{9}{4}E_1 = \frac{3}{8}E_1$$

$$\langle L^2\rangle_\psi = \left\lvert\frac{i}{\sqrt{6}}\right\rvert^2\cdot 0 + \left\lvert\frac{1}{\sqrt{2}}\right\rvert^2 1(1+1)\hbar^2 + \left\lvert-\frac{1}{\sqrt{3}}\right\rvert^2 1\cdot(1+1)\hbar^2$$

$$= \frac{1}{2}2\hbar^2 + \frac{1}{3}2\hbar^2 = \frac{5}{6}2\hbar^2 = \frac{5}{3}\hbar^2$$

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

Apellidos		
Nombre	DNI	
Asignatura **Física cuántica I**	Grupo	
Curso **2º**	Fecha	

Problema 5 (1.5 puntos). Un oscilador armónico se encuentra en un estado inicial dado por

$$\psi(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \phi_n(x)\,,$$

donde $\{\phi_n(x), E_n\}$ son los estados propios del sistema y z es un número complejo.

Normalizar la función de ondas.

$$\boxed{\psi_{\text{norm}}(x,0) = e^{-|z|^2/2}\,\psi(x,0)}$$

Calcular el valor esperado del momento en un tiempo t. En este apartado es necesario entregar los cálculos. Preséntense de forma clara y ordenada.

$$\boxed{\langle p\rangle_\psi(t) = \frac{i\hbar\alpha}{\sqrt{2}}\left(z^* e^{i\omega t} - z e^{i\omega t}\right)}$$

- $\|\psi(0)\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z^n}{\sqrt{n!}}\right|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n}}{n!} = e^{|z|^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \psi_{norm}(x,0) = e^{i\theta} e^{-|z|^2/2}\,\psi(x,0)$

Tomando fase $\theta = 0$ se obtiene el resultado en la caja

- $$\left.\begin{aligned} a^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha X + \frac{1}{i\hbar\alpha}P\right) \\ a &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha X - \frac{1}{i\hbar\alpha}P\right)\end{aligned}\right\} \Rightarrow a^+ - a = \frac{2}{\sqrt{2}}\frac{P}{i\hbar\alpha} \Rightarrow P = \frac{i\hbar\alpha}{\sqrt{2}}(a^+ - a)$$

$$\psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} e^{-iE_n t/\hbar}\phi_n(x)\,, \quad E_n = \hbar\omega\left(n+\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\psi_{norm}(x,t) = e^{-|z|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i(n+\frac{1}{2})\omega t} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \phi_n(x)$$

Usando $a\phi_n = \sqrt{n}\,\phi_{n-1}$ se tiene

$$\langle P\rangle_\psi(t) = \langle \psi_{norm}(t), \frac{i\hbar\alpha}{\sqrt{2}}(a^+ - a)\,\psi_{norm}(t)\rangle$$

$$= \frac{i\hbar\alpha}{\sqrt{2}} \langle \psi_{norm}(t) | (a^+ - a) | \psi_{norm}(t)\rangle$$

$$= \frac{i\hbar\alpha}{\sqrt{2}} \Big[\underbrace{\langle \psi_{norm}(t) | a^+ | \psi_{norm}(t)\rangle}_{\substack{\| \\ \langle a\psi_{norm}(t) | \psi_{norm}(t)\rangle \\ \| \\ \langle \psi_{norm}(t) | a\psi_{norm}(t)\rangle^*}} - \langle \psi_{norm}(t) | a | \psi_{norm}(t)\rangle \Big]$$

ojo

$$a\,\psi_{norm}(t) = e^{-|z|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i(n+\frac{1}{2})\omega t} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \underbrace{a\phi_n}_{\hookrightarrow \sqrt{n}\,\phi_{n-1}}$$

$$= e^{-|z|^2/2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-i(n+1/2)\omega t} \frac{z^n}{\sqrt{(n-1)!}} \phi_{n-1}$$

ojo

$$= e^{-i\omega t}\, z\, e^{-|z|^2/2} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} e^{-i[(n-1)+\frac{1}{2}]\omega t} \frac{z^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} \phi_{n-1}}_{\text{cambio } k=n-1 \text{ da } \sum_{k=0}^{\infty} e^{-i(k+1/2)\omega t} \frac{z^k}{\sqrt{k!}} \phi_k}$$

$$= z e^{-i\omega t} \psi_{norm}(t)$$

Se sigue entonces que

$$\langle \psi_{norm}(t)|a|\psi_{norm}(t)\rangle = ze^{-i\omega t} \underbrace{\langle \psi_{norm}(t)|\psi_{norm}(t)\rangle}_{1}$$

$$\langle P\rangle_\psi(t) = \frac{i\hbar\alpha}{\sqrt{2}}\left[(ze^{-i\omega t})^* - ze^{-i\omega t}\right]$$

$$= \frac{i\hbar\alpha}{\sqrt{2}}\left(z^* e^{i\omega t} - z e^{-i\omega t}\right)$$

Escribiendo $z = |z| e^{i\varphi}$

$$\langle P\rangle_\psi(t) = \frac{i\hbar\alpha}{\sqrt{2}} |z| \left[e^{i(\omega t-\varphi)} - e^{-i(\omega t-\varphi)}\right.$$

$$= -\sqrt{2}\,\alpha\hbar|z| \sin(\omega t-\varphi)$$

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

Apellidos		
Nombre	DNI	
Asignatura **Física cuántica I**	Grupo	
Curso 2º	Fecha	

Problema 6 (1.75 puntos). Un átomo de hidrógeno se encuentra en un estado inicial

$$\psi(\mathbf{x},0) = \psi_{1\,0\,0}(\mathbf{x}) + \psi_{2\,1\,-1}(\mathbf{x})\,.$$

Calcular el valor esperado de x en un tiempo t.

$$\boxed{\langle x\rangle_\psi(t) = \frac{128}{243}\frac{a_0}{Z}\cos\left(\frac{3E_1 t}{4\hbar}\right)}$$

En este ejercicio es necesario entregar los cálculos. Preséntense de forma clara y ordenada.

- Normalización $\quad \psi_{norm}(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_{100} + \psi_{21-1}\right)$

- Tiempo t: $\quad \psi_{norm}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{-E_1 t/\hbar}\psi_{100} + e^{-iE_2 t/\hbar}\psi_{21-1}\right]$

$$\langle x\rangle_\psi(t) = \frac{1}{2}\langle (e^{-E_1 t/\hbar}\psi_{100} + e^{-iE_2 t/\hbar}\psi_{21-1}),$$

$$, \underset{\text{impar}}{x}(e^{-iE_1 t/\hbar}\underset{\text{par pues } l=0}{\psi_{100}} + e^{-iE_2 t/\hbar}\underset{\text{impar pues } l=1}{\psi_{21-1}})\rangle$$

$$\langle\psi_{100}|x|\psi_{100}\rangle = \langle\psi_{21-1}|x|\psi_{21-1}\rangle = 0 \quad \text{pues} \int d^3x\,(\text{impar}) = 0$$

$$\langle x\rangle_\psi(t) = \frac{1}{2}\Big(\langle e^{-iE_1t/\hbar}\psi_{100}, x e^{-iE_2t/\hbar}\psi_{21-1}\rangle$$

$$+ \underbrace{\langle e^{-iE_2t/\hbar}\psi_{21-1}, x e^{-iE_1t/\hbar}\psi_{100}\rangle}_{\substack{\shortparallel \\ \text{complejo conjugado del 1er término}}}\Big)$$

$$\langle e^{-iE_1t/\hbar}\psi_{100}, x e^{-iE_2t/\hbar}\psi_{21-1}\rangle$$

$$= e^{-i(E_2-E_1)t/\hbar}\underbrace{\langle\psi_{100}, x\psi_{21-1}\rangle}_{(*)}$$

$$(*) = \int_0^\infty r^2 dr\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta\int_0^{2\pi} d\phi\, \overbrace{\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} 2e^{-Zr/a_0}\frac{1}{\sqrt{4\pi}}}^{\psi^*_{100}}\ \overbrace{r\sin\theta\cos\phi}^{x}$$

$$\times \underbrace{\left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{3/2}\frac{Zr}{\sqrt{3}a_0}e^{-Zr/2a_0}\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{-i\phi}}_{\psi_{21-1}}$$

$$= \left(\frac{Z}{a_0}\right)^3\frac{\cancel{2}}{\sqrt{4\pi}}\frac{Z}{\cancel{2}\sqrt{2}\cancel{\sqrt{3}}a_0}\sqrt{\frac{\cancel{3}}{8\pi}}\underbrace{\int_0^\infty dr\, r^4 e^{-3Zr/2a_0}}_{\frac{4!}{(3Z/2a_0)^5}}\underbrace{\int_0^\pi d\theta\sin^3\theta}$$

$$\times\underbrace{\int_0^{2\pi}d\phi\cos\phi\, e^{-i\phi}}_{\shortparallel}$$

$$\int_0^{2\pi}d\phi\,\frac{1}{2}(e^{i\phi}+e^{-i\phi})e^{-i\phi}$$

$$\shortparallel$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\phi}_{\substack{\shortparallel\\ \pi}} + \cancelto{0}{\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\phi\, e^{-2i\phi}}$$

$$\int_0^\pi d\theta\sin\theta(1-\cos^2\theta) =$$

$$= -\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta\Big|_0^\pi$$

$$= +2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\langle x\rangle = \frac{Z^4}{a_0^4}\frac{1}{\cancel{8\pi}}\frac{2^5 a_0^5\, 4\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}}{3^5\cdot Z^5}\,\cancel{\pi}\,\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}} = \frac{2^7}{3^5}\frac{a_0}{Z}$$

$$\langle x\rangle_{\psi}(t) = \frac{1}{2}\left[e^{-i(E_2-E_1)t/\hbar}\frac{2^7}{3^5}\frac{a_0}{Z} + e^{i(E_2-E_1)t/\hbar}\frac{2^7}{3^5}\frac{a_0}{Z}\right]$$

$$= \frac{2^7}{3^5}\frac{a_0}{Z}\cos\underbrace{\left[\frac{(E_2-E_1)t}{\hbar}\right]} = \frac{128}{243}\frac{a_0}{Z}\cos\left(\frac{3E_1 t}{4\hbar}\right)$$

$$\left(\frac{1}{4}E_1 - E_1\right)\frac{t}{\hbar} = -\frac{3}{4}\frac{E_1 t}{\hbar}$$