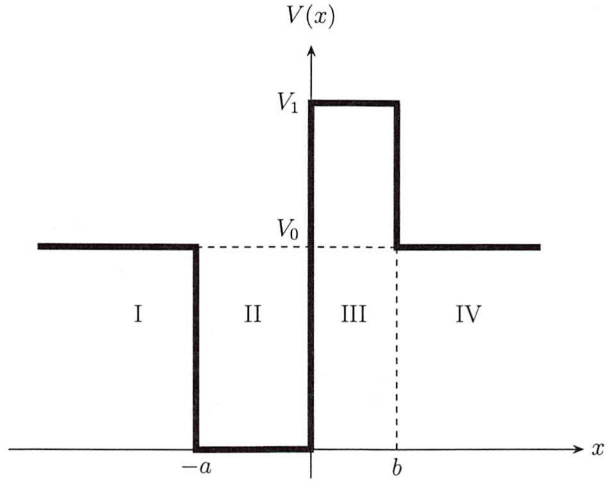
UNIVERSIDAD
COMPLUTENSE
MADRID

Apellidos			
Nombre		DNI	
Asignatura	Física cuántica I	Grupo	
Curso	2º	Fecha	

Física cuántica I - Grupos B y B2
Examen parcial – 23 de abril de 2019

Problema 1 (1+1+1 puntos). Una onda plana incide sobre el pozo unidimensional de la figura desde la iquierda con energía E tal que $V_0 < E < V_1$.



Escribir la forma cualitativa de la función de ondas $\psi(x,t) = e^{-\mathrm{i}Et/\hbar}\phi(x)$.

$\phi_{\mathrm{I}} = A e^{ik_1 x} + B e^{-ik_1 x}$ $\qquad k_1 = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}$

$\phi_{\mathrm{II}} = C e^{ik_2 x} + D e^{-ik_2 x}$ $\qquad k_2 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

$\phi_{\mathrm{III}} = E e^{k_3 x} + F e^{-k_3 x}$ $\qquad k_3 = \frac{\sqrt{2m(V_1-E)}}{\hbar}$

$\phi_{\mathrm{IV}} = G e^{ik_1 x}$ (sólo hay onda plana $\longrightarrow$)

En términdos de las amplitudes que aparecen en la solución que se ha escrito determinar los coeficientes de reflexión $\mathcal{R}$ y de transmisión $\mathcal{T}$.

$$\mathcal{R} = \frac{|B|^2}{|A|^2} \qquad \mathcal{T} = \frac{|G|^2}{|A|^2}$$

Determinar el rango de energías E para el que pueden darse estados ligados estacionarios $\psi(x,t) = e^{-\mathrm{i}Et/\hbar}\phi(x)$ y escribir la forma cualitativa de estos.

$E \in (0, V_0)$

$\phi_{\mathrm{I}} = Ae^{k_1 x}$ $\qquad k_1 = \dfrac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$

$\phi_{\mathrm{II}} = Ce^{ik_2 x} + De^{-ik_2 x}$ $\qquad k_2 = \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

$\phi_{\mathrm{III}} = Ee^{k_3 x} + Fe^{-k_3 x}$ $\qquad k_3 = \dfrac{\sqrt{2m(V_1-E)}}{\hbar}$

$\phi_{\mathrm{IV}} = He^{-k_1 x}$

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

Apellidos	
Nombre	DNI
Asignatura **Física cuántica I**	Grupo
Curso 2º	Fecha

Problema 2 (1+1+1+1 puntos). Una partícula de masa m se encuentra en un pozo infinito unidimensional de anchura a centrado en el origen en un estado descrito por la función de ondas

$$\psi(x,0) = x\left(\frac{a}{2} - |x|\right) = \begin{cases} x\left(\frac{a}{2} + x\right) & -\frac{a}{2} \le x \le 0 \\ x\left(\frac{a}{2} - x\right) & 0 \le x \le \frac{a}{2} \end{cases}.$$

Normalizar la función de ondas

$$\boxed{\psi(x,0)_{\text{normalizada}} = 4\sqrt{\frac{30}{a^5}}\ \psi(x,0)}$$

¿Cuál es la probabilidad de que la partícula se encuentre entre $-a/4$ y $a/4$?

$$\boxed{\text{Prob}_{t=0}(-\tfrac{a}{4},\tfrac{a}{4}) = \frac{1}{2}}$$

¿Cuál es valor esperado de la energía?

$$\boxed{\langle H\rangle_{t=0} = \frac{20\hbar^2}{ma^2}}$$

¿Cuál es la probabilidad de que al medir la energía se obtenga el valor $E_2 = \dfrac{2\hbar^2\pi^2}{ma^2}$?

$$\boxed{\text{Prob}(E_2) = 0.999}$$

Ayuda: Para $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$\int dx\, x^k \sin x = x^{k-1}\left(k\sin x - x\cos x\right) - k(k-1)\int dx\, x^{k-2}\sin x\,,$$
$$\int dx\, x^k \cos x = x^{k-1}\left(k\cos x + x\cos x\right) - k(k-1)\int dx\, x^{k-2}\cos x\,.$$

Problema 3 (1+1+1+1 puntos). Un oscilador armónico unidimensional se encuentra inicialmente en un estado con función de ondas

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\phi_0(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\phi_1(x) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\phi_2(x)\,,$$

donde $\{\phi_n(x), E_n\}$ son los autoestados del oscilador. Normalizar la función de ondas.

$\psi(x,0)_{\text{norm}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\psi(x,0)$

¿Cuál es la probabilidad de que al medir la energía se obtengan los valores E_0 y E_3?

$\text{Prob}_0(E_0) = \left|\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{3}{8}$ $\qquad$ $\text{Prob}_0(E_3) = 0$

Escribir la función de ondas que describe el estado físico del sistema en un tiempo $t > 0$.

$\psi(x,t)_{\text{norm}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{e^{-iE_0t/\hbar}}{\sqrt{2}}\phi_0(x) + \frac{e^{-iE_1t/\hbar}}{\sqrt{2}}\phi_1(x) + \frac{e^{-iE_2t/\hbar}}{\sqrt{3}}\phi_2(x)\right]$

En un instante $t = \tilde{t}$ se actúa sobre el sistema, de forma que su función de ondas pasa a ser

$$\psi(x, t=\tilde{t})_{\text{norm}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_0x/\hbar}\,\phi_0(x)\,,$$

donde p_0 es constante con dimensiones de momento. Inmediatamente después se vuelve a medir la energía. ¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga E_0?

$\text{Prob}_{\tilde{t}}(E_0) = e^{-p_0^2/2\alpha^2\hbar^2}$

Problema 2. Solución

- $$\|\psi(0)\|^2 = \int_{-a/2}^{a/2} dx\, |\psi(x,0)|^2 = [\psi(x,0) \text{ impar y real} \Rightarrow |\psi(x,0)|^2 \text{ par}]$$

$$= 2\int_0^{a/2} dx\, x^2\left(\frac{a}{2}-x\right)^2 = 2\int_0^{a/2} dx \left[\frac{a^2}{4}x^2 - ax^3 + x^4\right]$$

$$= 2\left[\frac{1}{12}a^2x^3 - \frac{1}{4}ax^4 + \frac{1}{5}x^5\right]_{x=0}^{x=a/2} = 2a^5\left(\frac{1}{12\times 2^3} - \frac{1}{4\times 2^4} + \frac{1}{5\times 2^5}\right)$$

$$= \frac{2a^5}{2^5}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) = \frac{a^5}{2^4}\frac{1}{30} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi_{\text{normalizada}}(x,0) = \sqrt{\frac{2^4\times 30}{a^5}}\,\psi(x,0)\times e^{i\theta}, \quad \theta\in\mathbb{R} \text{ arbitrario}$$

Tomando $\theta = 0$ se obtiene el resultado en la "caja".

- $$\text{Prob}_{t=0}\left(-\frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right) = \int_{-a/4}^{a/4} dx\, |\psi_{\text{norm.}}(x,0)|^2 = \frac{16\times 30}{a^5}\int_{-a/4}^{a/4} dx\, |\psi(x,0)|^2$$

$$= \frac{16\times 30}{a^5}\, 2\int_0^{a/4} dx\, x^2\left(\frac{a}{2}-x\right)^2 = \frac{16\times 30}{a^5}\, 2\left[\frac{1}{12}a^2x^3 - \frac{1}{4}ax^4 + \frac{1}{5}x^5\right]_{x=0}^{x=a/4}$$

$$= \frac{16\times 30}{a^5}\, 2a^5\left(\frac{1}{12\times 4^3} - \frac{1}{4\times 4^4} + \frac{1}{5\times 4^5}\right)$$

$$= 2^5\times 30\, \frac{1}{4^4}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5\times 4}\right) = \frac{2^5\times 2\times 3\times 5}{2^8}\,\frac{8}{3\times 4\times 5} = \frac{1}{2}$$

- $$\langle H\rangle_{t=0} = \int_{-a/2}^{a/2} dx\, \psi^*_{\text{norm}}(x,0)\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi_{\text{norm}}(x,0)\right]$$

$$= \left[\frac{d^2}{dx^2} \text{ no cambia paridad} \Rightarrow \text{integrando es par}\right]$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\, 2\int_0^{a/2} dx\, \psi^*_{\text{norm}}(x,0)\,\frac{d^2\psi_{\text{norm}}(x,0)}{dx^2}$$

$$= -\frac{\hbar^2}{m}\,\frac{16\times 30}{a^5}\int_0^{a/2} x\left(\frac{a}{2}-x\right)\underbrace{\left[\frac{d^2}{dx^2}x\left(\frac{a}{2}-x\right)\right]}_{-2}$$

$$\langle H\rangle_{t=0} = \frac{2\hbar^2}{m}\,\frac{16\times 30}{a^5}\left[\frac{a}{2}\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=a/2}$$

$$= \frac{2\hbar^2}{m}\,\frac{16\times 30}{a^5}\,a^3\left(\frac{1}{4\times 2^2}-\frac{1}{3\times 2^3}\right)$$

$$= \frac{\hbar^2}{m}\,\frac{2^5\times 2\times 3\times 5}{a^2}\,\frac{1}{2^3}\underbrace{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)}_{1/6}$$

$$= \frac{\hbar^2}{ma^2}20$$

- $\mathrm{Prob}(E_2) = |c_2|^2$

$$c_2 = \langle \phi_2, \psi_{norm}(x,0)\rangle = \int_{-a/2}^{a/2} dx\, \sqrt{\frac{2}{a}}\,\underset{\substack{\uparrow\\ \text{impar}}}{\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)}\, 4\sqrt{\frac{30}{a^5}}\,\underset{\substack{\uparrow\\ \text{impar}}}{\psi(x,0)}$$

$$= \frac{8}{a^3}\sqrt{15}\int_{-a/2}^{a/2} dx\, \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\psi(x,0)$$

$$= \frac{16}{a^3}\sqrt{15}\underbrace{\int_0^{a/2} dx\, \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)x\left(\frac{a}{2}-x\right)}_{I_1+I_2}$$

$$I_1 = \int_0^{a/2} dx\, \frac{a}{2}x\sin\frac{2\pi x}{a} = \left(\frac{2\pi x}{a}=y \Rightarrow dx = \frac{a}{2\pi}dy\right)$$

$$= \frac{a}{2}\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2\int_0^{\pi} dy\, y\sin y = \frac{a^3}{8\pi^2}\left[\sin y - y\cos y\right]_{y=0}^{y=\pi} = \frac{a^3}{8\pi}$$

$$I_2 = \int_0^{a/2} dx\,(-)\,x^2\sin\frac{2\pi x}{a} = \left(\frac{2\pi x}{a}=y \Rightarrow dx = \frac{a}{2\pi}dy\right)$$

$$= -\left(\frac{a}{2\pi}\right)^3\int_0^{\pi} dy\, y^2\sin y = -\left(\frac{a}{2\pi}\right)^3\left[y(2\sin y - y\cos y)\Big|_{y=0}^{y=\pi} - 2\int_0^{\pi} dy\,\sin y\right]$$

$$= -\left(\frac{a}{2\pi}\right)^3\left[\pi^2 + 2\cos y\Big|_{y=0}^{y=\pi}\right] = \left(\frac{a}{2\pi}\right)^3(4-\pi^2)$$

$$C_2 = \frac{16}{a^3}\sqrt{15}\left[\cancel{\frac{a^3}{8\pi}} + \frac{a^3}{8\pi^3}(4-\cancel{\pi^2})\right] = \frac{16}{a^3}\sqrt{15}\,\frac{a^3}{8\pi^3}\,4 = \frac{8\sqrt{15}}{\pi^3}$$

$$\text{Prob}(E_2) = \left|\frac{8\sqrt{15}}{\pi^3}\right| = \frac{64\times 15}{\pi^6} = \frac{960}{\pi^6} \simeq 0.999$$

Problema 3. Solución

- $\|\psi(0)\|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 + \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 + \left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right|^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \psi_{norm}(x,0) = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\theta}\psi(x,0)$, $\theta \in \mathbb{R}$ arbitrario

Tomando $\theta = 0$ se obtiene el resultado de la caja

- $\text{Prob}_{\tilde{t}}(E_0) = |\langle \phi_0, \psi_{norm}(\tilde{t})\rangle|^2$

$$\langle \phi_0, \psi_{norm}(\tilde{t})\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \phi_0^*(x)\, e^{ip_0x/\hbar}\, \phi_0(x)$$

$$= \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{ip_0x/\hbar}\, e^{-\alpha^2x^2} = \text{(usar ayuda con } a=\alpha^2,\ b=\tfrac{p_0}{\hbar})$$

$$= \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^2}}\, e^{-p_0^2/4\hbar^2\alpha^2}$$

$$\text{Prob}_{\tilde{t}}(E_0) = e^{-p_0^2/2\alpha^2\hbar^2}$$