UNIVERSIDAD
COMPLUTENSE
MADRID

Apellidos ....
Nombre .... DNI ....
Asignatura **Física cuántica I** .... Grupo ....
Curso 2º .... Fecha ....

Física cuántica I - Grupos B, B2 y E
Examen final – 3 de septiembre de 2018

Problema 1 (0.5 × 4 = 2 puntos).
Un átomo de hidrógeno se encuentra en un instante inicial en un estado con función de ondas

$$\psi(\mathbf{x},0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\psi_{100}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\,\psi_{210}(\mathbf{x}) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\psi_{21-1}(\mathbf{x}) + \frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{2}}\,\psi_{321}(\mathbf{x})\,.$$

(a) ¿Cuál es la probabilidade de obtener 0 al medir la tercera componente del momento angular? ¿Y de obtener $\hbar$?

$\mathrm{Prob}_{\,t=0}\,(0) = \frac{3}{4}$ $\qquad$ $\mathrm{Prob}_{\,t=0}\,(\hbar) = \frac{1}{8}$

(b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener E_2 al medir la energía? ¿Y de obtener E_3?

$\mathrm{Prob}_{\,t=0}\,(E_2) = \frac{3}{8}$ $\qquad$ $\mathrm{Prob}_{\,t=0}\,(E_3) = \frac{1}{8}$

(c) ¿Cuál es el valor esperado de $\mathbf{L}^2$.

$\langle \mathbf{L}^2 \rangle = \frac{3}{2}\hbar^2$

(d) Se realiza una medida de L_z y se obtiene $\hbar$. ¿En qué estado se encuentra el sistema después de la medida? A continuación se deja evolucionar un tiempo t el sistema y se vuelve a medir L_z. ¿Cuál es la probabilidad de obtener $-\hbar$?

$\psi_{\text{después}}(\mathbf{x},0) = e^{i\theta}\,\psi_{321}$ $\qquad$ $\mathrm{Prob}_{\,t}\,(-\hbar) = 0$

$\theta \in \mathbb{R}$ arbitraria

Problema 2 (1 punto).
Una partícula que se mueve en una dimensión se encuentra en un instante dado en un estado con función de ondas normalizada

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0\,, \\ 2\sqrt{2\gamma}\,\mathrm{e}^{-\gamma x}\,\sin(\gamma x) & \text{si } x \geq 0\,, \end{cases}$$

donde γ es un parámetro con dimensiones de $(\text{longitud})^{-1}$ característico de la energía potencial. ¿Dónde es máxima la probabilidad de encontrar la partícula?

$x_{\max} = \pi/4\gamma$

Problema 3 (0.5 + 1.5 = 2 puntos).
La función de ondas en un instante dado de una partícula que se mueve sobre toda la recta real $-\infty < x < \infty$ es

$$\phi(x) = \mathrm{e}^{-\gamma^2 x^2}\, e^{ik_0 x}\,,$$

donde γ y k_0 son parámetros ambos con dimensiones de $(\text{longitud})^{-1}$.

(a) Normalizar la función de ondas

$\phi_{\text{norm}}(x) = e^{i\theta}\left(\frac{2\gamma^2}{\pi}\right)^{1/4}\phi(x)$ $\quad$ $\theta \in \mathbb{R}$ arbitraria

(b) Calcular los valores esperados de P y de P^2.

$\langle P\rangle_\phi = \hbar k_0$ $\qquad$ $\langle P^2\rangle_\phi = \hbar^2(k_0^2 + \gamma_0^2)$

UNIVERSIDAD
COMPLUTENSE
MADRID

Apellidos	
Nombre	DNI ....
Asignatura **Física cuántica I**	Grupo ....
Curso **2º**	Fecha ....

Problema 4 (0.75 + 0.75 = 1.5 puntos).
La función de ondas normalizada que describe el estado de una partícula que se mueve en un potencial central es en coordenadas esféricas

$$\psi(r,\theta,\phi) = \sqrt{\frac{1}{\pi a_o^3}}\,\frac{r}{a_0}\,\mathrm{e}^{-r/a_0}\cos\theta\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\phi}\,,$$

con a_0 una longitud característica del potencial. El convenio utilizado para coordenadas esféricas es (el de clase)

$$x = r\sin\theta\cos\phi\,,\quad y = r\sin\theta\sin\phi\,,\quad z = r\cos\theta\,,\quad 0\le\theta\le\pi\,,\quad 0\le\phi\le 2\pi\,,$$

donde θ es el ángulo que forma el eje Oz con $\mathbf{x}$.

(a) Calcular el valor esperado de L_z.

$\langle L_z\rangle_\psi = 2\hbar$

(b) ¿Cuál es la probabilidad $P(r)dr$ de encontrar la partícula a una distancia del origen comprendida entre r y $r+dr$?

$P(r)dr = \frac{4}{3a_0}\left(\frac{r}{a_0}\right)^4 e^{-2r/a_0}\,dr$

Problema 5 (1.5 puntos).
Una partícula de masa m se mueve en tres dimensiones con hamiltoniano

$$H = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + \frac{K}{2x^2 + y^2 + z^2},$$

donde K es una constante con dimensiones de energía×(longitud)^2. ¿Es posible medir con precisión infinita la energía y la componente x del momento angular?

☑ Sí. ☐ No.

Razonar en el espacio que sigue la respuesta.

Será posible si $L_x = -i\hbar(y\partial_z - z\partial_y)$ y H conmutan. Veamos si es el caso

$$[L_x, H] = \frac{1}{2m}\underbrace{[L_x, \vec{P}^2]}_{\substack{\shortparallel \\ 0 \text{ (probado en clase)}}} + \left[L_x, \frac{K}{2x^2+y^2+z^2}\right]$$

$$= \left[-i\hbar(y\partial_z - z\partial_y), \frac{K}{2x^2+y^2z^2}\right]$$

$$= -i\hbar K\left[y\left(\partial_z \frac{1}{2x^2+y^2+z^2}\right) - z\left(\partial_y \frac{1}{2x^2+y^2+z^2}\right)\right]$$

$$= -i\hbar K\left[-\frac{2yz}{(2x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{2zy}{(2x^2+y^2+z^2)^2}\right] = 0$$

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

Apellidos ....
Nombre .... DNI ....
Asignatura Física cuántica I .... Grupo ....
Curso 2º .... Fecha ....

Problema 6 (0.5 + 1.5 = 2 puntos).
Un átomo de hidrógeno se encuentra en un instante inicial en un estado con función de ondas

$$\psi(\mathbf{x},0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\,\psi_{100}(\mathbf{x}) + \psi_{211}(\mathbf{x})\,\right].$$

(a) ¿Cuál es la función de ondas que describe el estado del sistema en un tiempo t posterior?

$$\psi(\mathbf{x},t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{-iE_1t/\hbar}\psi_{100}(\vec{x}) + e^{-iE_2t/\hbar}\psi_{211}(\vec{x})\right]$$

(b) Calcular el valor esperado de r en un instante t. En este problema es necesario entregar los cálculos.

$$\langle r\rangle_t = \frac{13}{4}\frac{a_0}{Z}$$; Z = número protones en núcleo.

$$\langle r\rangle_t = \frac{1}{2}\langle (e^{-iE_1t/\hbar}\psi_{100} + e^{-iE_2t/\hbar}\psi_{211})|r|$$
$$\cdot|(e^{-iE_1t/\hbar}\psi_{100} + e^{-iE_2t/\hbar}\psi_{211})\rangle$$
$$= \frac{1}{2}\Big[\langle\psi_{100}|r|\psi_{100}\rangle + e^{i(E_1-E_2)t/\hbar}\langle\psi_{100}|r|\psi_{211}\rangle$$
$$+ e^{-i(E_1-E_2)t/\hbar}\langle\psi_{211}|r|\psi_{100}\rangle + \langle\psi_{211}|r|\psi_{211}\rangle$$

Ahora bien,

$$\langle\psi_{100}|r|\psi_{211}\rangle = \langle\psi_{211}|r|\psi_{100}\rangle^* = \langle R_{10}|r|R_{20}\rangle\langle Y_0^0|Y_1^1\rangle$$

Como $\langle Y_0^0 | Y_1^1 \rangle = 0$, se tiene

$$\langle \psi_{100} | r | \psi_{211} \rangle = \langle \psi_{211} | r | \psi_{100} \rangle = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{también puede} \\ \text{argumentarse} \\ \text{por paridad} \end{array} \right.$$

Además

$$\langle \psi_{100} | r | \psi_{100} \rangle = \langle R_{10} | r | R_{10} \rangle \underbrace{\langle Y_0^0 | Y_1^1 \rangle}_{= 1}$$

$$= \int_0^\infty r^2 dr\, r\, R_{10}^2(r) = 4 \left(\frac{Z}{a_0}\right)^3 \underbrace{\int_0^\infty dr\, r^3 e^{-2Zr/a_0}}_{= \frac{3!}{(2Z/a_0)^4}} = \frac{3}{2} \frac{a_0}{Z}$$

$$\langle \psi_{211} | r | \psi_{211} \rangle = \langle R_{21} | r | R_{21} \rangle \underbrace{\langle Y_1^1 | Y_1^1 \rangle}_{= 1}$$

$$= \int_0^\infty r^2 dr\, r\, R_{21}^2(r) = \frac{Z^5}{2^3 \cdot 3 \cdot a_0^5} \underbrace{\int_0^\infty dr\, r^5 e^{-Zr/a_0}}_{= \frac{5!}{(Z/a_0)^6}} = 5 \frac{a_0}{Z}$$

Por tanto,

$$\langle r \rangle_t = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + 5 \right) \frac{a_0}{Z} = \frac{13}{4} \frac{a_0}{Z}$$

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

Apellidos ....

Nombre .... D.N.I. ....

Asignatura .... Grupo ....

Curso .... Fecha ....

Problema 1

Nótese que la función de ondas dada está normalizada pues

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 + \left|\frac{1}{2}\right|^2 + \left|\frac{-1}{2\sqrt{2}}\right|^2 + \left|\frac{i}{2\sqrt{2}}\right|^2 = 1$$

Entonces

(a) $\text{Prob}_{t=0}(0) = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 + \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{3}{4}$ $\quad \text{Prob}_{t=0}(\hbar) = \left|\frac{i}{2\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{8}$

(b) $\text{Prob}_{t=0}(E_2) = \left|\frac{1}{2}\right|^2 + \left|\frac{-1}{2\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{3}{8}$ $\quad \text{Prob}_{t=0}(E_3) = \left|\frac{i}{2\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{8}$

(c) $\langle L^2 \rangle = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 \cdot 0 + \left(\left|\frac{1}{2}\right|^2 + \left|\frac{-1}{2\sqrt{2}}\right|^2\right) 2\hbar^2 + \left|\frac{i}{2\sqrt{2}}\right|^2 6\hbar^2 = \frac{3}{2}\hbar^2$

(d) Por postulado IV.

Problema 2

La probabilidad de encontrar la partícula entre x y $x+dx$ es $\rho(x)\,dx = |\psi(x)|^2 dx$. Hay que calcular el máximo de $\rho(x) = |\psi(x)|^2 = 8\gamma^2 e^{-2\gamma x} \sin^2 \gamma x$.

Para ello derivamos e igualamos a cero:

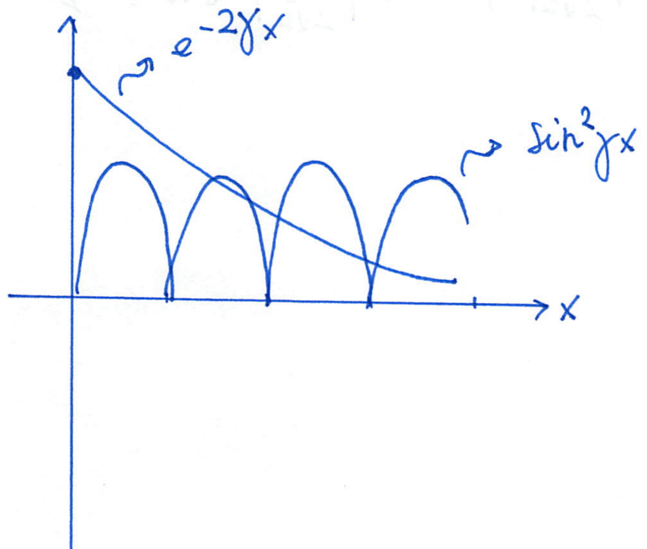
$$\rho'(x) = 8\gamma^2 e^{-2\gamma x}\left[-2\gamma \sin^2\gamma x + 2\sin\gamma x \cos\gamma x \, \gamma\right]$$

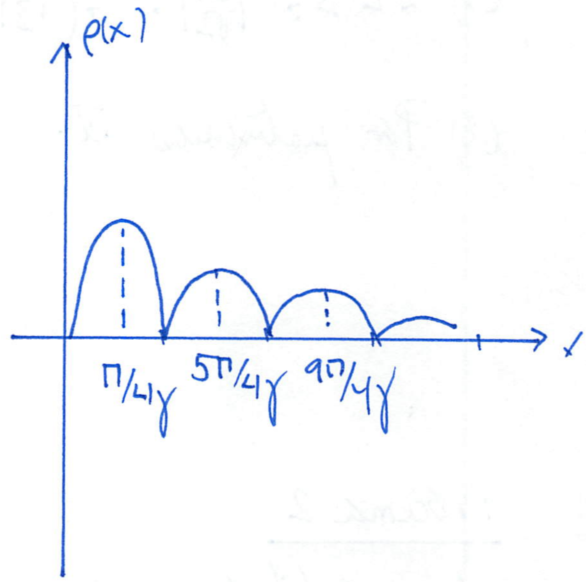
$$= 16\gamma^3 e^{-2\gamma x} \sin\gamma x \left(-\sin\gamma x + \cos\gamma x\right)$$

$$\rho'(x_0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_0 \to \infty \Rightarrow \rho(x_0 \to \infty) = 0 \,. & \text{Mínimo} \\ \sin\gamma x_0 = 0 \Rightarrow \rho(x_0) = 0 \,. & \text{Mínimo} \\ -\sin\gamma x_0 + \cos\gamma x_0 = 0 \Rightarrow \gamma x_0 = \frac{\pi}{4} + n\pi & n = 0, 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Los valores $n = -1, -2, -3, \ldots$ no son posibles pues corresponden a $x_0 \leq 0$ y $\phi(x \leq 0) = 0$.

El máximo se alcanza para $\gamma x_0 = \frac{\pi}{4}$ (es decir, $n = 0$) pues





UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

Apellidos ....
Nombre .... D.N.I. ....
Asignatura .... Grupo ....
Curso .... Fecha ....

Problema 3

- $\phi_{norm}(x) = N\phi(x)$ con

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, |\phi_{norm}(x)|^2 = |N|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, |e^{-\gamma^2 x^2} e^{ik_0 x}|^2$$

$$= |N|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-2\gamma^2 x^2} = \text{formulario} = |N|^2 \sqrt{\frac{\pi}{2\gamma^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N = e^{i\theta} \left(\frac{2\gamma^2}{\pi}\right)^{1/4}, \quad \theta \in \mathbb{R} \text{ arbitrario}$$

- $$\langle P \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \phi^*_{norm}(x) \left[-i\hbar \frac{d\phi_{norm}(x)}{dx}\right]$$

$$= -i\hbar |N|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-\gamma^2 x^2 - ik_0 x} \underbrace{\frac{d}{dx} e^{-\gamma^2 x^2 + ik_0 x}}_{= e^{-\gamma^2 x^2 + ik_0 x}(-2\gamma^2 x + ik_0)}$$

$$= -i\hbar |N|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-2\gamma^2 x^2} (-2\gamma^2 x + ik_0)$$

su integral da cero (función impar sobre intervalo simétrico)

$$= \hbar k_0 \underbrace{|N|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-2\gamma^2 x^2}}_{=1} = \hbar k_0$$

- $\langle P^2\rangle_\phi = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \phi^*_{norm}\left[-\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2}\phi_{norm}(x)\right]$

$$= -\hbar^2 |N|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ e^{-\gamma^2 x^2 - ik_0 x}\left[\frac{d}{dx}\ e^{-\gamma^2 x^2 + ik_0 x}\ (-2\gamma^2 x + ik_0)\right]$$

$$= -\hbar^2 |N|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ e^{-2\gamma^2 x^2}\left[(-2\gamma^2 x + ik_0)^2 - 2\gamma^2\right]$$

$$= -\hbar^2 |N|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ e^{-2\gamma^2 x^2}\left(4\gamma^4 x^2 - 4\gamma^2 ik_0 x - k_0^2 - 2\gamma^2\right)$$

su integral da cero (función impar sobre intervalo simétrico)

$$= -8\gamma^4 \hbar^2 |N|^2 \int_0^{\infty} dx\ e^{-2\gamma^2 x^2} x^2 + \hbar^2(k_0^2 + 2\gamma^2)\ \underbrace{|N|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ e^{-2\gamma^2 x^2}}_{1}$$

$$= (\text{formulario}) = -8\gamma^4 \hbar^2 |N|^2 \frac{1}{8\gamma^2}\sqrt{\frac{\pi}{2\gamma^2}} + \hbar^2(k_0^2 + 2\gamma^2)$$

$$= -\hbar^2\gamma^2 + \hbar^2(k_0^2 + 2\gamma^2) = \hbar^2(k_0^2 + \gamma^2)$$

<u>Problema 4</u>

- $L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial\phi} \Rightarrow L_z\psi = 2\hbar\psi \Rightarrow \langle L_z\rangle = \int d^3x\ \psi^* L_z \psi = 2\hbar \underbrace{\int d^3x\ |\psi|^2}_{1}$

- $P(r)\,dr = r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi\ |\psi(r,\theta,\phi)|^2$

$$= r^2 dr \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta}\ \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi}\ \frac{1}{\pi a_0^3}\left(\frac{r}{a_0}\right)^2 \underbrace{\cos^2\theta}\ e^{-2r/a_0}$$

$\frac{2}{3}$