UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

Apellidos ....

Nombre .... DNI ....

Asignatura **Física cuántica I** .... Grupo ....

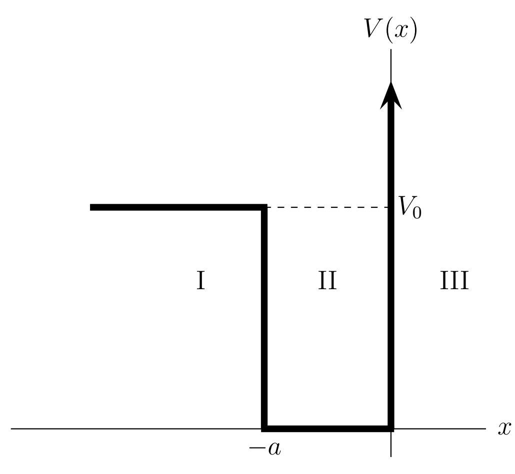
Curso **2º** .... Fecha ....

Física cuántica I - Grupos B, B2 y E
Examen parcial – 4 de mayo de 2018

Problema 1 (2 puntos).
En un experimento de dispersión Compton el fotón incidente tiene longitud de onda 1.0×10^{-11} m y es dispersado 45º con respecto a la dirección de incidencia. Calcúlese la energía cinética que adquiere el electrón y el angúlo que forma su dirección de retroceso con la del fotón incidente.

$\varphi = 62.8\,^{\circ}$ $\qquad\qquad$ $K_e = 1.3180 \times 10^{-15}$ J

Problema 2 (1+1 puntos).
(a) Considérese el pozo unidimensional de la figura



El valor de V_0 es

$$V_0 = \frac{\hbar^2}{2ma^2}\,\lambda^2\,,$$

donde λ es un parámetro real. Sobre el pozo inciden ondas planas desde $x \to -\infty$ con energía $E > V_0$. Escríbase la forma de la solución estacionaria $\psi(x,t) = e^{-\mathrm{i}Et/\hbar}\phi(x)$ en las distintas zonas.

$\phi_{\mathrm{I}} = \quad A\, e^{\mathrm{i}\kappa x} + B\, e^{-\mathrm{i}\kappa x} \qquad \kappa = \sqrt{\dfrac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}}$

$\phi_{\mathrm{II}} = \quad C\, e^{\mathrm{i}kx} + D\, e^{-\mathrm{i}kx} \qquad \kappa = \sqrt{\dfrac{2mE}{\hbar^2}}$

$\phi_{\mathrm{III}} = \quad 0$

(b) ¿Cuánto vale el coeficiente de reflexión?

$\mathcal{R} = 1$

Problema 3 (1 punto).
Un electrón oscila armónicamente en la dirección Ox con frecuencia angular ω. Sobre él actúa un campo eléctrico constate $\mathcal{E}$, de forma que la energía potencial adquiere un término adicional $e\mathcal{E}x$ y el hamiltoniano es

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + e\mathcal{E}x\,.$$

¿Cuáles son las energías propias del sistema?

Autoenergías $= E_n = \hbar\omega\left(n + \dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{e^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2}\,, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

Apellidos	
Nombre	DNI ....
Asignatura **Física cuántica I**	Grupo ....
Curso **2º**	Fecha ....

Problema 4 (1+2 puntos).
Una partícula de masa m se encuentra en un pozo infinito unidimensional de anchura a centrado en el origen en un estado descrito por la función de ondas

$$\psi(x,0) = \begin{cases} 2\left(x+\dfrac{a}{2}\right) & \text{si } \; -\dfrac{a}{2} \leq x \leq -\dfrac{a}{4} \\[2ex] \dfrac{2}{3}\left(-x+\dfrac{a}{2}\right) & \text{si } \; -\dfrac{a}{4} \leq x \leq \dfrac{a}{2}\,. \end{cases}$$

(a) Normalícese la función de ondas

$$\psi(x,0)_{\text{normalizada}} = \sqrt{\frac{12}{a^3}}\, e^{\mathrm{i}\theta}\, \psi(x,0) \qquad \theta \text{ arbitrrio}$$

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que al medir la energía se obtenga E_1? En este apartado es necesario entregar los cálculos. Utilícese para ello el espacio a continuación de la caja de respuestas.

$$\mathrm{Prob}_{\psi}(E_1) = \frac{256}{3\pi^4} \approx 0.876$$

Poblema 1

Tomamos como plano xy el determinado por las direcciones de disperson del fotón y de retroceso del electrón. La conservación de la energía establece que

$$\frac{hc}{\lambda_0} + mc^2 = \frac{hc}{\lambda} + \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} \tag{1}$$

La conservación del momento a su vez exige

$$\text{componente } x\text{:} \qquad \frac{h}{\lambda_0} = \frac{h}{\lambda}\cos\theta + p\,\cos\varphi\,, \tag{2}$$

$$\text{componente } y\text{:} \qquad 0 = \frac{h}{\lambda}\sin\theta - p\,\sin\varphi\,, \tag{3}$$

$$\text{componente } z\text{:} \qquad 0 = 0\,.$$

La relación entre la longitud de onda del fotón incidente, λ_0, y la del dispersado, λ, es

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{h}{mc}\big(1-\cos\theta\big)\,. \tag{4}$$

[Ver el formulario repartido con el examen o bien obtener a partir de las ecs. (1-(3)].

La energía total del electrón de retroceso es la suma de su energía en reposo y su cinética, a la que llamamos K. Es decir,

$$\sqrt{m^2c^4+p^2c^2} = mc^2 + K\,.$$

Substituyendo en (1) se obtiene

$$K = hc\left(\frac{1}{\lambda_0}-\frac{1}{\lambda}\right). \tag{5}$$

Para determinar numéricamente λ en el lado derecho usamos (4):

$$\lambda = 1.0\times10^{-11} + \frac{6.626\times10^{-34}}{9.109\times10^{-31}\times2.998\times10^{8}}\big(1-\cos45^{\rm o}\big) = 1.071\times10^{-11}\,\mathrm{m}\,.$$

La ec. (5) implica entonces que

$$K = 6.626\times10^{-34}\times2.998\times10^{8}\times\frac{1}{10^{-11}}\left(1-\frac{1}{1.071}\right) = 1.3180\times10^{-15}\,\mathrm{J} = 8227\,\mathrm{eV}\,.$$

Dividiendo la ec. (3) entre (2) se tiene

$$\tan\varphi = \frac{\lambda_0\sin\theta}{\lambda-\lambda_0\cos\theta}\,.$$

Numéricamente,

$$\tan\varphi = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1.071-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1.942 \qquad\Rightarrow\quad \varphi = 1.095\,\mathrm{rad}\approx 62.8^{\rm o}\,.$$

Problema 2

A es la amplitud de la onda incidente y B la de la reflejada. El coeficiente de reflexión es

$$\mathcal{R} = \frac{|B|^2}{|A|^2}\,.$$

Necesitamos encontrar B en términos de A. Para ello usasmos la continuidad de la función de ondas en $x=0$

$$\phi_{\rm II}(0)=\phi_{\rm III}(0) \quad\Rightarrow\quad C+D=0 \quad\Rightarrow\quad \phi_{\rm II} = 2{\rm i}C\sin(kx)\,,$$

y la continuidad de la función de ondas y de su derivada en $x=-a$,

$$\left.\begin{array}{l}\phi_{\rm I}(-a)=\phi_{\rm II}(-a)\\ \phi'_{\rm I}(-a)=\phi'_{\rm II}(-a)\end{array}\right\} \qquad\Rightarrow\qquad \left.\begin{array}{l}A\,e^{-{\rm i}\kappa a}+B\,e^{{\rm i}\kappa a}=2{\rm i}C\sin(ka)\\ {\rm i}\kappa A\,e^{-{\rm i}\kappa a}-{\rm i}\kappa B\,e^{{\rm i}\kappa a}=2{\rm i}Ck\cos(ka)\end{array}\right\}\,.$$

Estas dos ecuaciones forman un sistema lineal cuyas incógnitas son B y C. La amplitud A y la energía E (o, lo que es lo mismo, k) de la onda incidente son datos. El sistema puede escribirse como

$$\left.\begin{aligned} B\, e^{\mathrm{i}\kappa a} - 2\mathrm{i}C\sin(ka) &= -A\, e^{-\mathrm{i}\kappa a} \\ \mathrm{i}\kappa B\, e^{\mathrm{i}\kappa a} + 2\mathrm{i}Ck\cos(ka) &= \mathrm{i}\kappa A\, e^{-\mathrm{i}\kappa a} \end{aligned}\right\} .$$

La solución para B es

$$B = A\, e^{-2\mathrm{i}\kappa a}\, \frac{-k\cos(ka) + \mathrm{i}\kappa\sin(ka)}{k\cos(ka) + \mathrm{i}\kappa\sin(ka)} \qquad \Rightarrow \qquad |B| = |A| \,.$$

Por tanto $\mathcal{R} = 1$.

Problema 3

[Hecho en clase]. Hay que encontrar las soluciones para E de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo

$$H\varphi(x) = E\varphi(x) \,. \tag{6}$$

El hamiltoniano pede escribirse

$$\begin{aligned} H &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + e\mathcal{E}x \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2 + \frac{2e\mathcal{E}}{m\omega^2}x\right) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2\left(x + \frac{e\mathcal{E}}{m\omega^2}\right)^2 - \frac{e^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2} \,. \end{aligned}$$

Hacemos el cambio de variable

$$y = x + \frac{e\mathcal{E}}{m\omega^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dy} = \frac{d}{dx} \qquad \Rightarrow \qquad H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dy^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 y^2 - \frac{e^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2} \,.$$

La ec. (6) se escribe entonces

$$\tilde{H}\varphi = \tilde{E}\varphi \,, \quad \text{donde} \qquad \tilde{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dy^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 y^2 \,, \qquad \tilde{E} = E + \frac{e^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2} \,.$$

El hamiltoniano $\tilde{H}$ es el de un oscilador armónico en la variable y, por lo que las soluciones de $\tilde{H}\varphi = \tilde{E}\varphi$ son

$$\tilde{E}_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \qquad \varphi_n = \phi_n^{\text{oscilador}}\left(x + \frac{e\mathcal{E}}{m\omega^2}\right) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Las autonergías pedidas son

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{e^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2} \,. \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Problema 4

- *Normalización*:

$$\int_{-a/2}^{a/2} dx\, |\psi(x,0)|^2 = 4\int_{-a/2}^{-a/4} dx\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{4}{9}\int_{-a/4}^{a/2} dx\left(-x+\frac{a}{2}\right)^2$$

$$= \frac{4}{3}\left(x+\frac{a}{2}\right)^3\Big|_{-a/2}^{-a/4} - \frac{4}{27}\left(-x+\frac{a}{2}\right)^3\Big|_{-a/4}^{a/2} = \frac{a^3}{3\times 16} + \frac{a^3}{16} = \frac{a^3}{12} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \psi(x,0)_{\text{normalizada}} = \sqrt{\frac{12}{a^3}}\, e^{\mathrm{i}\theta}\ \psi(x,0)\,, \quad \text{con } \theta \text{ real arbitrario}\,.$$

- *La probabilidad* pedida está dada por

$$\mathrm{Prob}_\psi(E_1) = |c_1|^2\,,$$

donde c_1 es el coeficiente de Fourier

$$c_1 = \langle\phi_1|\psi_{\text{normalizada}}\rangle = \int_{-a/2}^{a/2} dx\,\sqrt{\frac{2}{a}}\,\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\psi_{\text{normalizada}}(x,0)\,.$$

La fase $e^{\mathrm{i}\theta}$ en $\psi_{\text{normalizada}}$ no contribuye a $|c_1|^2$, por lo que la ignoramos. Efectuamos la integral

$$c_1 = \sqrt{\frac{2}{a}}\sqrt{\frac{12}{a^3}}\left[2\int_{-a/2}^{-a/4} dx\,\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\left(x+\frac{a}{2}\right) + \frac{2}{3}\int_{-a/4}^{a/2} dx\,\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\left(-x+\frac{a}{2}\right)\right]$$

$$= \text{Por partes, con } \ u = \pm x + \frac{a}{2}\,, \quad dv = \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \quad \left[\ \Rightarrow \quad du = \pm\, dx\,, \quad v = \frac{a}{\pi}\,\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right]$$

$$= \frac{4\sqrt{6}}{a^2}\left[\frac{a}{\pi}\left(x+\frac{a}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\Big|_{-a/2}^{-a/4} - \frac{a}{\pi}\int_{-a/2}^{-a/4} dx\,\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right]$$

$$+ \frac{4\sqrt{6}}{3a^2}\left[\frac{a}{\pi}\left(-x+\frac{a}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\Big|_{-a/4}^{a/2} + \frac{a}{\pi}\int_{-a/4}^{a/2} dx\,\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right]$$

$$= \frac{4\sqrt{6}}{a\pi}\left[-\frac{a}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{a}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\Big|_{-a/2}^{-a/4}\right] + \frac{4\sqrt{6}}{3a\pi}\left[\frac{3a}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{a}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\Big|_{-a/4}^{a/2}\right]$$

$$= \frac{4\sqrt{6}}{a\pi}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{4\sqrt{6}}{3a\pi}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{16}{\pi^2\sqrt{3}}\,.$$

Por tanto

$$\mathrm{Prob}_\psi(E_1) = |c_1|^2 = \frac{256}{3\pi^4} \approx 0.876\,,$$