UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

Apellidos ....

Nombre .... DNI ....

Asignatura **Física cuántica I** .... Grupo ....

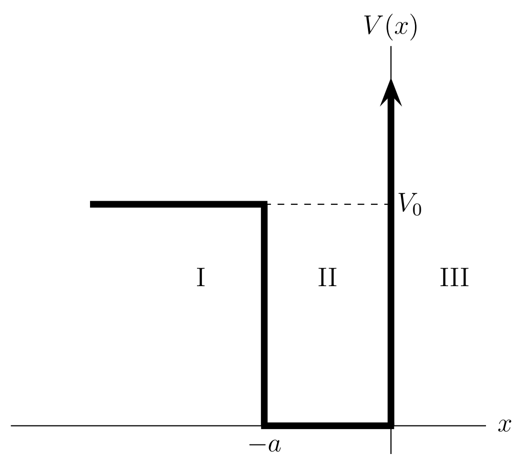
Curso **2º** .... Fecha ....

Física cuántica I - Grupos B, B2 y E
Examen parcial – 8 de mayo de 2018

Problema 1 (1+1 puntos).
En un experimento de dispersión Compton la longitud de onda del fotón dispersado es 1.0036×10^{-11} m y la energía cinética del electrón de retroceso es 450 eV. Calcúlense la longitud de onda del fotón incidente y el angúlo con que se dispersa.

$$\lambda_0 = 0.9996 \times 10^{-11}\,\mathrm{m} \qquad \theta = 0.1734\,\mathrm{rad} \approx 9.94^{\circ}$$

Problema 2 (1+1+2 puntos).
(a) Considŕese el pozo unidimensional de la figura



El valor de V_0 es

$$V_0 = \frac{\hbar^2}{2ma^2}\,\lambda^2\,,$$

donde λ es un parámetro real. Sobre el pozo inciden ondas planas desde $x \to -\infty$ con energía $E > V_0$. Escríbase la forma de la solución estacionaria $\psi(x,t) = e^{-\mathrm{i}Et/\hbar}\phi(x)$ en las distintas zonas.

$$\phi_{\rm I} = \quad A\, e^{\mathrm{i}\kappa x} + B\, e^{-\mathrm{i}\kappa x} \qquad \kappa = \sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}}$$

$$\phi_{\rm II} = \quad C\, e^{\mathrm{i}kx} + D\, e^{-\mathrm{i}kx} \qquad \kappa = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$\phi_{\rm III} = \quad 0$$

(b) Tómese $E < V_0$. Escríbase la forma de la solución estacionaria en las distintas zonas.

$$\phi_{\rm I} = \quad A\, e^{\kappa x} \qquad \kappa = \sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}$$

$$\phi_{\rm II} = \quad C\, e^{\mathrm{i}kx} + D\, e^{-\mathrm{i}kx} \qquad \kappa = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$\phi_{\rm III} = \quad 0$$

(c) ¿Existen estados ligados para los valores de λ que aparecen en la tabla? Si existen, indique cuántos y cuáles son sus energías.

λ	Número de estados ligados	Energías
1/4	Ninguno	—
4	1	$E = \frac{\hbar^2 z_0^2}{2ma^2}\,, \quad 0 < z_0 < \pi$ solución de $\sin z_0 = \frac{z_0}{4}$

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

Apellidos			
Nombre		DNI	
Asignatura	**Física cuántica I**	Grupo	
Curso	**2º**	Fecha	

Problema 3 (1+2 puntos).
Una partícula de masa m se encuentra en un pozo infinito unidimensional de anchura a centrado en el origen en un estado descrito por la función de ondas

$$\psi(x,0) = \begin{cases} \frac{4}{3}\left(x + \frac{a}{2}\right) & \text{si} \quad -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{4} \\ 4\left(-x + \frac{a}{2}\right) & \text{si} \quad \frac{a}{4} \leq x \leq \frac{a}{2}\,. \end{cases}$$

Normalícese la función de ondas

$$\psi(x,0)_{\text{normalizada}} = \sqrt{\frac{3}{a^3}}\, e^{i\theta}\psi(x,0)\,, \qquad \theta \text{ real arbitrario}$$

¿Cuál es la probabilidad de que al medir la energía se obtenga E_2? En este apartado es necesario entregar los cálculos. Utilícese para ello el espacio a continuación de la caja de respuestas.

$$\text{Prob}_\psi(E_2) = \frac{32}{3\pi^4} \approx 0.109$$

Poblema 1

La conservación de la energía establece que

$$\frac{hc}{\lambda_0} + mc^2 = \frac{hc}{\lambda} + \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}\,. \tag{1}$$

La relación entre la longitud de onda del fotón incidente, λ_0, y la del dispersado, λ, es (ver formulario repartido con el examen)

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{h}{mc}\left(1 - \cos\theta\right). \tag{2}$$

La energía total del electrón de retroceso es la suma de su energía en reposo y su cinética, a la que llamamos K. Es decir,

$$\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} = mc^2 + K\,.$$

Substituyendo en (1) se obtiene

$$\frac{1}{\lambda_0} = \frac{K}{hc} + \frac{1}{\lambda}\,.$$

En el lado derecho de esta ecuación todo es conocido. Así pues, escribiendo la constante de Planck en eV s (para lo cual hay que dividir su valor en J s entre 1.602×10^{-19}) se tiene

$$\frac{1}{\lambda_0} = \frac{450\times1.602\times10^{-19}}{6.626\times10^{-34}\times2.998\times10^{8}} - \frac{1}{1.0036\times10^{-11}} = 1.00004\times10^{11}\,\mathrm{m}^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_0 = 0.9996\times10^{-11}\,\mathrm{m}\,.$$

Substituyendo en la e. (2) se obtiene que el ángulo de dispersión:

$$\begin{aligned}\cos\theta &= 1 - \frac{mc^2}{hc}\left(\lambda-\lambda_0\right)\\ &= 1 - \frac{0.511\times10^{6}\times1.602\times10^{-19}}{6.626\times10^{-34}\times2.998\times10^{8}}\left(1.0036-0.9999\right)\times10^{-11} = 0.9850\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \theta = 0.1734\,\mathrm{rad} \approx 9.94^{\,\mathrm{o}}\,.$$

Problema 2

La continuidad de la función de ondas en $x=0$,

$$\phi_{\mathrm{II}}(0) = \phi_{\mathrm{III}}(0) \quad \Leftrightarrow \quad C+D=0\,,$$

implica que

$$\phi_{\mathrm{II}}(x) = 2\mathrm{i}C\sin(kx) \quad \Rightarrow \quad \phi'_{\mathrm{II}}(x) = 2\mathrm{i}kC\cos(kx)\,.$$

La continuidad de la función de ondas y de su derivada en $x=-a$ a su vez exigen

$$\left.\begin{aligned}\phi_{\mathrm{I}}(-a) &= \phi_{\mathrm{II}}(-a)\\ \phi'_{\mathrm{I}}(-a) &= \phi'_{\mathrm{II}}(-a)\end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned}A\,e^{-\kappa a} &= -2\mathrm{i}C\sin(ka)\\ A\kappa e^{-\kappa a} &= 2\mathrm{i}Ck\cos(ka)\end{aligned}\right\}.$$

Dividiendo la primera entre la segunda, elevando al cuadrado y usando que

$$\kappa^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0-E) = \frac{2m}{\hbar^2}\left(\frac{\hbar^2\lambda^2}{2ma^2} - \frac{\hbar^2k^2}{2m}\right) = \frac{\lambda^2}{a^2} - k^2\,,$$

se obtiene

$$-\frac{k}{\kappa} = \tan(ka) \quad \Leftrightarrow \quad k^2\cos^2(ka) = \left(\frac{\lambda^2}{a^2} - k^2\right)\sin^2(ka) \quad \Rightarrow \quad \sin(ka) = \pm\frac{ka}{|\lambda|}\,. \tag{3}$$

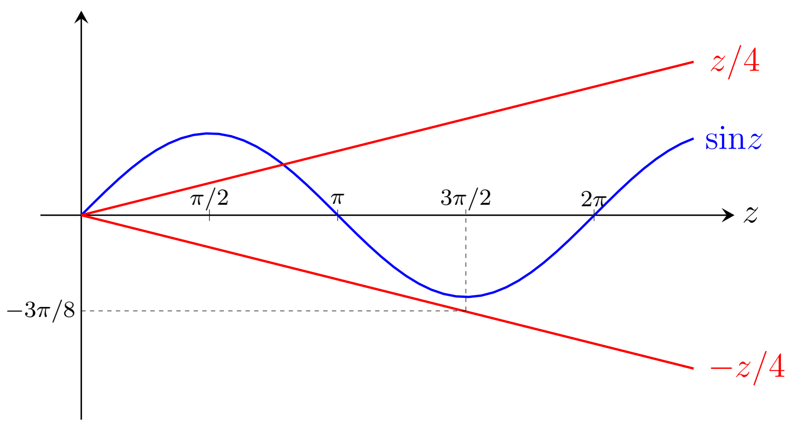
Los valores de k para los que existen estados ligados son las soluciones en k de cualquiera de estas dos ecuaciones. Por simplicidad introducimos $z := ka$, que es positiva pues k lo es. Con ello la ec. (3) se escribe

$$\sin z = \pm\frac{z}{|\lambda|}\,. \tag{4}$$

Las soluciones de (4) son los puntos en los que $\sin z$ corta a las rectas $\pm z/|\lambda|$. Estas rectas pasan por el origen y tiene pendiente $\pm1/|\lambda|$. Como la derivada de $\sin z$ es $\cos z$ y está comprendida entre -1 y 1, para que $\sin z$ corte a las rectas $\pm z/|\lambda|$, éstas deben tener pendiente entre -1 y 1. Es decir $1/|\lambda|$ debe ser menor que 1, o lo que es lo mismo $|\lambda| > 1$. Así pues, no existen estados ligados para $\lambda = 1/4$.

Consideremos $\lambda = 4$. Primero analizamos el signo positivo de (4). En este caso $\sin z$ y $z/4$ se cortan en un punto z_0 comprendido entre 0 y π. Como $z > 0$, el siguiente corte tendría que ocurrir para un punto en el que $\sin z$ fuese positivo, lo que implica $z > 2\pi$, y esto es imposible pues en $z = 2\pi$ la recta $z/4$ toma el valor $\pi/2$ que está por encima del máximo de $\sin z$.

Pasemos ahora al signo negativo de (4). En $z = 3\pi/2$, la recta $-z/4$ toma valor $-3\pi/8$, y $\sin z$ toma valor -1, que está por encima de $-3\pi/8$, por lo que $\sin z$ y $-z/4$ no se cortan y no hay soluciones para z. Ver gráfica adjunta.



Así pues, para $\lambda = 4$ sólo hay una estado ligado con energía

$$E = \frac{\hbar^2 z_0^2}{2ma^2}\,, \quad 0 < z_0 < \pi \ \text{ solución de } \sin z_0 = \frac{z_0}{4}\,.$$

Comentario. El análisis es el mismo que el hecho en clase para el pozo finito. Por completitud (no se pide en el examen), el valor de z_0 puede determinarse numéricamente mediante, por ejemplo, el método de Newton. Recordemos que, según dicho método, las soluciones de $F(z) = 0$ se obtienen a partir de un valor $z^{(0)}$ inicial mediante iteraciones

$$z^{(k+1)} = z^{(k)} - \frac{F(z^{(k)})}{F'(z^{(k)})}\,.$$

En nuestro caso, $F(z) = \sin z - \dfrac{z}{4}$. Tomando $z^{(0)} = 5\pi/6$, para el que $\sin z^{(0)} = 1/2$, tras tres iteraciones se obtiene $z^{(3)} \approx 2.4745...$

Problema 3

- *Normalización*:

$$\int_{-a/2}^{a/2} dx\, |\psi(x,0)|^2 = \frac{16}{9}\int_{-a/2}^{a/4} dx\, \left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + 16\int_{a/4}^{a/2} dx\, \left(-x+\frac{a}{2}\right)^2$$

$$= \frac{16}{27}\left(x+\frac{a}{2}\right)^3\Big|_{-a/2}^{a/4} - \frac{16}{3}\left(-x+\frac{a}{2}\right)^3\Big|_{a/4}^{a/2} = \frac{a^3}{4} + \frac{a^3}{3\times 4} = \frac{a^3}{3} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \psi(x,0)_{\text{normalizada}} = \sqrt{\frac{3}{a^3}}\, e^{i\theta}\, \psi(x,0)\,, \quad \text{con } \theta \text{ real arbitrario}\,.$$

- *La probabilidad* pedida está dada por

$$\text{Prob}_\psi(E_2) = |c_2|^2\,,$$

donde c_2 es el coeficiente de Fourier

$$c_2 = \langle \phi_2 | \psi_{\text{normalizada}} \rangle = \int_{-a/2}^{a/2} dx\, \sqrt{\frac{2}{a}}\, \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \psi_{\text{normalizada}}(x,0)\,.$$

La fase $e^{i\theta}$ en $\psi_{\text{normalizada}}$ no contribuye a $|c_2|^2$, por lo que la ignoramos. Efectuamos la integral

$$c_2 = \sqrt{\frac{2}{a}}\sqrt{\frac{3}{a^3}}\left[\frac{4}{3}\int_{-a/2}^{a/4} dx\, \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\left(x+\frac{a}{2}\right) + 4\int_{a/4}^{a/2} dx\, \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\left(-x+\frac{a}{2}\right)\right]$$

$$= \text{Por partes, con } \; u = \pm x + \frac{a}{2}\,, \quad dv = \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \quad \left[\Rightarrow \quad du = \pm\, dx\,, \quad v = -\frac{a}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right]$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{a^2}\,\frac{4}{3}\left[-\frac{a}{2\pi}\left(x+\frac{a}{2}\right)\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\Big|_{-a/2}^{a/4} + \frac{a}{2\pi}\int_{-a/2}^{a/4} dx\, \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right]$$

$$+ \frac{\sqrt{6}}{a^2}\, 4\left[-\frac{a}{2\pi}\left(-x+\frac{a}{2}\right)\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\Big|_{a/4}^{a/2} - \frac{a}{2\pi}\int_{a/4}^{a/2} dx\, \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right]$$

$$= \frac{2\sqrt{6}}{3\pi a}\left[\frac{a}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right]_{-a/2}^{a/4} - \frac{2\sqrt{6}}{\pi a}\left[\frac{a}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right]_{a/4}^{a/2}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{3\pi^2} + \frac{\sqrt{6}}{\pi^2} = \frac{4\sqrt{6}}{3\pi^2}\,.$$

Por tanto

$$\text{Prob}_\psi(E_2) = |c_2|^2 = \frac{32}{3\pi^4} \approx 0.109\,.$$