UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA I
GRADO EN FÍSICA

Física cuántica I – Grupo C – 2015/16
Examen final – 22 de junio de 2016

Nombre: **Soluciones** Firma:

Problema 1 (1 punto). Un haz de radiación monocromática con longitud de onda $\lambda = 4560$ Å incide sobre una placa de cesio con función de trabajo $w_0 = 1.93$ eV. Determinar la velocidad máxima de los fotoelectrones arrancados.

$$\boxed{v_{max} = 5.28 \times 10^5 \text{ ms}^{-1}}$$

Problema 2 (2 puntos). En una colisión Compton, un fotón con longitud de onda $\lambda = \lambda_C/2 = 0.012$ Å (con λ_C la longitud de onda Compton) incide sobre un electrón en reposo y sufre una dispersión de ángulo θ. Determinar el valor de θ para el que el electrón adquiere la máxima velocidad después de la colisión.

$$\boxed{\theta = \pi}$$

Calcular dicha velocidad máxima v_{max}.

$$\boxed{v_{\rm max} = 2.76 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}}$$

Problema 3 (1 punto). Un electrón en una dimensión se encuentra en un estado estacionario $\psi(x,t) = \phi(x)\, e^{-\mathrm{i}Et/\hbar}$, con

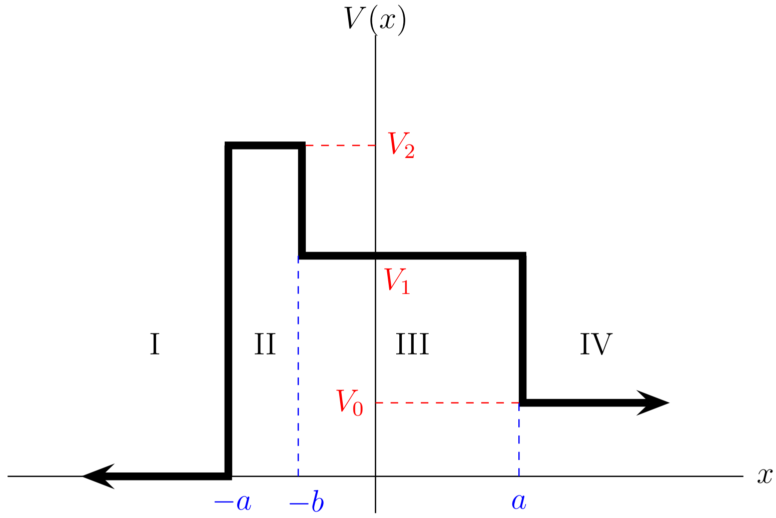
$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ N\left(e^{-x/a} - e^{-2x/a}\right) & \text{si } x \geq 0 \end{cases},$$

donde N es una constante de normalización y a y E son conocidas. ¿Dónde es máxima la probabilidad de encontrar al electrón?

$$\boxed{x_{\rm max} = a \ln 2}$$

(Operaciones en página 5)

Problema 4 (0.75+0.75 puntos). Un haz de partículas de momento p incide desde la izquierda, con energía $E = p^2/2m$, sobre el potencial de la figura.



Supóngase que $V_1 < E < V_2$. Escríbase la forma de la función de ondas en las zonas I, II, III y IV, dejando los vectores de ondas indicados en términos de las V_i.

$\phi_{\rm I}(x) = A\, e^{{\rm i}k_{\rm I}x} + B\, e^{-{\rm i}k_{\rm I}x} =$ ondas incidente + reflejada $\qquad k_{\rm I} = \dfrac{p}{\hbar} = \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

$\phi_{\rm II}(x) = C\, e^{k_{\rm II}x} + D\, e^{-k_{\rm II}x} =$ exponenciales crec. y decrec. $\qquad k_{\rm II} = \dfrac{\sqrt{2m(V_2 - E)}}{\hbar}$

$\phi_{\rm III}(x) = E\, e^{{\rm i}k_{\rm III}x} + F\, e^{-{\rm i}k_{\rm III}x} \qquad k_{\rm III} = \dfrac{\sqrt{2m(E - V_1)}}{\hbar}$

$\phi_{\rm IV}(x) = G\, e^{{\rm i}k_{\rm IV}x} =$ onda trasmitida $\qquad k_{\rm IV} = \dfrac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar}$

A, B, C, D, E, y y G constantes de integración

Sin resolver las condiciones de empalme, discutir si hay algún rango de valores de E para el que la reflexión es total.

Para que la reflexión sea total, la densidad de corriente J trasmitida en la zona IV debe ser cero. Ahora bien, la solución en IV es

(i) una exponencial compleja $\phi_{\rm IV}(x) = G\, e^{{\rm i}k_{\rm IV}x}$ si $E > V_0$, ó

(2i) una exponencial real decreciente $\phi_{\rm IV}(x) = G\, e^{-|k_{\rm IV}|x}$ si $E < V_0$.

En el caso (i) se tiene $J_{\rm IV}^{\rm trans}(x) = k_{\rm IV} \neq 0$. En el (2i), por ser $\phi_{\rm IV}(x)$ real, se tiene $J_{\rm IV}(x) = 0$. Así pues hay reflexión total para $\boldsymbol{0 < E < V_0}$.

Problema 5 (0.5+0.5+0.5+0.5+0.5+1 puntos). Un átomo de hidrógeno se encuentra en $t = 0$ en el estado

$$\psi(\mathbf{x}, 0) = c\,\psi_{100}(\mathbf{x}) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\psi_{200}(\mathbf{x}) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\psi_{211}(\mathbf{x})\,, \tag{A}$$

con c una constante y $\psi_{n\ell m}(\mathbf{x})$ los estados propios del átomo de hidrógeno. ¿Cuál de los siguientes valores es posible para c?

$$\frac{1}{3}\,, \qquad \sqrt{\frac{2}{3}}\,, \qquad \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{6}}\,, \qquad \frac{1}{\sqrt{6}}\,.$$

$$\boxed{c = \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{6}}}$$

(Operaciones en páginas 5 y 6)

Si se mide la tercera componente del momento angular, ¿cuál es la probabilidad de obtener $\hbar$ y en qué estado se queda el sistema después de la medida?

$$\boxed{\mathrm{Prob}_\psi(\hbar) = \frac{1}{3}} \qquad \boxed{\psi_{\text{después}} = \psi_{211}}$$

Calcúlense los valores esperados de la energías potencial y cinética en en el estado en que se queda.

$$\boxed{\langle V\rangle_{\text{después}} = 2E_2} \qquad \boxed{\langle T\rangle_{\text{después}} = -E_2}$$

Si se mide la energía en el estado inicial (A) ¿qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidad?

(Añádanse tantas columnas como sea necesario)

Energía	E_1	E_2		
Probabilidad	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$		

Problema 6 (1 punto). Se sabe que

$$[\mathbf{P}^2, L_x] = [\mathbf{P}^2, L_y] = [\mathbf{P}^2, L_z] = 0\,.$$

Considérese un oscilador armónico tridimensional **anisótropo** con hamiltoniano

$$H = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + \frac{1}{2}\,m\omega^2\,(x^2 + y^2 + 4z^2)\,.$$

Razónese si es posible conocer con precisión infinita la energía y la tercera componente del momento angular en un estado del sistema. Úsese el recuadro en la siguiente página (no se necesita más espacio).

Para que sea posible los operadores H y L_z deben conmmutar. Veamos si es el caso. Como $\mathbf{P}^2$ y L_z conmutan, basta con estudiar si $x^2+y^2+4z^2$ y L_z conmutan.

Forma primera (cartesianas). Como $L_z = -\mathrm{i}\hbar(x\partial_y - y\partial_x)$ no contiene derivadas con respecto a z, es trivial que $[4z^2, L_z]=0$. Falta analizar si $[x^2+y^2, L_z]=0$. Operando se tiene que, para toda función de ondas $\Psi(x,t)$,

$$\left[x^2+y^2, L_z\right]\Psi = -\mathrm{i}\hbar\left\{(x^2+y^2)\,(x\partial_y - y\partial_x)\Psi - (x\partial_y - y\partial_x)\,(x^2+y^2)\Psi\right\}$$

$$= \mathrm{i}\hbar\,\Psi\,\left\{(x\partial_y - y\partial_x)\,(x^2+y^2)\,\right\} = 2\mathrm{i}\hbar\,\Psi\,(xy-yx) = 0\,.$$

Por tanto, $\left[x^2+y^2+4z^2, L_z\right]=0$ y **sí** es posible medir la energía y la tercera componente del momento angular ambas con precisión infinita en un estado Ψ del sistema.

Forma segunda (esféricas). En coordenadas esféricas $\{r,\theta,\phi\}$,

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+4z^2 = r^2\,(\sin^2\theta + 4\cos^2\theta) \\ L_z = -\mathrm{i}\hbar\,\dfrac{\partial}{\partial\phi}\quad \text{no contiene}\ \dfrac{\partial}{\partial r}\ \text{ni}\ \dfrac{\partial}{\partial\theta} \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad \left[x^2+y^2+4z^2, L_z\right]=0$$

Datos

- $m_e = 0.511\ \mathrm{MeV}/c^2$ $\qquad h = 6.626\times 10^{-34}\ \mathrm{J\ s}$
  $|e| = 1.602\times 10^{-19}\ \mathrm{C}$ $\qquad c = 2.998\times 10^{8}\ \mathrm{m\ s^{-1}}$

- Las autofunciones del problema 4 tienen la forma $\psi_{n\ell m} = R_{n\ell}(r)\ \mathcal{Y}_\ell^m(\theta,\phi)$, con

$$R_{10}(r) = \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} 2e^{-Zr/a_0}$$

$$R_{20}(r) = \left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{3/2}\left(2-\frac{Zr}{a_0}\right)\ e^{-Zr/2a_0} \qquad\qquad R_{21}(r) = \left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{3/2}\frac{Zr}{\sqrt{3}\,a_0}\ e^{-Zr/2a_0}$$

$$\mathcal{Y}_0^0(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \qquad\qquad \mathcal{Y}_1^{\pm1}(\theta,\phi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\ \sin\theta\ e^{\pm\mathrm{i}\phi}$$

  Las autoenergías son $E_n = -\dfrac{1}{n^2}\,\dfrac{Z^2e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0} = -\,\dfrac{13.6\,Z^2}{n^2}\ \mathrm{eV}$

- $\displaystyle\int_0^\infty dx\ x^n\ e^{-ax} = \frac{n!}{a^{n+1}}$ para $a>0$ y $n=0,1,2,\cdots$.

Problema 3. La probabilidad de encontrar la partícula es máxima en el máximo de $\rho(x,t) = |\psi(x,t)|^2$. Calculémoslo:

$$\rho(x,t) = |N|^2 \left(e^{-2x/a} - 2\, e^{-3x/a} + e^{-4x/a}\right)$$
$$\rho'(x,t) = |N|^2 \left(-\frac{2}{a}\, e^{-2x/a} + \frac{6}{a}\, e^{-3x/a} - \frac{4}{a}\, e^{-4x/a}\right)$$
$$\rho'(x,t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -1 + 3\, e^{-x/a} - 2\, e^{-x/a} = 0\,.$$

Haciendo el cambio $y = e^{-x/a}$, se tiene

$$2y^2 - 3y + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_- = \frac{1}{2}\,, \quad y_+ = 1\,.$$

Para ver si algunos de estos puntos es un máximo calculamos la segunda derivada:

$$\rho''(x,t) = |N|^2 \left(\frac{4}{a^2}\, e^{-2x/a} - \frac{18}{a^2}\, e^{-3x/a} + \frac{16}{a^2}\, e^{-4x/a}\right) = \frac{2y^2|N|^2}{a^2}\left(2 - 9y + 8y^2\right),$$
$$\rho''\big(x_-, t\big) = -\frac{|N|^2}{4a^2} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{máximo}\,,$$
$$\rho''\big(x_+, t\big) = \frac{2|N|^2}{a^2} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{mínimo}\,.$$

El punto de máximo es $y_{\rm max} = 1/2$. Por tanto, $x_{\rm max} = a \ln 2$.

Nota. El punto $x = 0$ es un punto de mínimo absoluto, pues $\rho(0,t) = 0$ y $\rho(x,t) \geq 0$.

Problema 5.

i) $|c|^2 + \left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right|^2 + \left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right|^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad |c|^2 = \frac{1}{3}.$

El único c de los dados que lo satisface es $\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{6}}$.

2i) Al resultado de $\hbar$ para la medida de L_z sólo contribuyen los autoestados $\psi_{n\ell m}$ que tienen $m = 1$. Es decir, ψ_{211}. Como su coeficiente es $1/\sqrt{3}$, la probabilidad es $1/3$, y el sistema tras medir se queda en el estado ψ_{211}.

3i) Usando

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\, r} \qquad \text{y} \qquad \psi_{211} = R_{21}(r)\, \mathcal{Y}_1^1(\theta,\phi) = -\frac{Z^{5/2}}{8\, a_0^{5/2}\sqrt{\pi}}\, r\, e^{-Zr/2a_0}\, \sin\theta\, e^{\mathrm{i}\phi}$$

se tiene que

$$\langle V\rangle_{\text{después}} = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\left\langle \frac{1}{r}\right\rangle_{211} = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{(Z/a_0)^5}{64\pi}\int_0^\infty dr\, r^3\, e^{-Zr/a_0}\int_0^\pi d\theta\, \sin^3\theta \int_0^{2\pi} d\phi\,.$$

Las integrales son muy sencillas:

$$\int_0^\infty dr\ r^3\, e^{-Zr/a_0} = \Big[\text{ integral como la del dato con } n=3 \ \text{ y } \ a = Z/a_0 \Big] = \frac{6}{(Z/a_0)^4}\,,$$

$$\int_0^\pi d\theta\ \sin^3\theta = \int_0^\pi d\theta\ \ \sin\theta\,(1-\cos^2\theta) = -\cos\theta + \frac{1}{3}\ \cos^3\theta\,\Big]_0^\pi = \frac{4}{3}\,,$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi\,.$$

Juntando todo,

$$\langle V\rangle_{\text{después}} = -\,\frac{1}{2}\ \frac{Z^2e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0} = 2E_2\,.$$

4i) El valor esperado de la energía cinética es la diferencia

$$\langle T\rangle_{\text{después}} = \langle H\rangle_{211} - \langle V\rangle_{211} = E_2 - 2E_2 = -\,E_2\,.$$

5i) Volviendo a ψ, si se mide la energía, sólo puede obtenerse E_1 y E_2, pues en la combinación lineal (A) sólo entran $\psi_{n\ell m}$ con $n=1$ y $n=2$. Las probabilidades en este caso son

$$\text{Prob}_\psi(E_1) = |c|^2 = \frac{1}{3}$$

$$\text{Prob}_\psi(E_2) = \left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right|^2 + \left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right|^2 = \frac{2}{3}\,.$$