Física cuántica I - Grupos B, B2 y E

Examen – 9 de junio de 2017 – Soluciones

Problema 1 (0.75 + 0.75 + 1 puntos).
Una partícula en un pozo infinito de anchura a centrado en el origen tiene en el un instante dado función de ondas

$$\psi(x) = N\,x\left(\frac{a^2}{4} - x^2\right),$$

donde N es ua constante. Normalícese la función de ondas.

$$\boxed{\psi_{\text{normalizada}}(x) = \left(\frac{840}{a^7}\right)^{1/2} x\left(\frac{a^2}{4} - x^2\right)}$$

¿Cuál es la probabilidad de encontrar la partícula entre 0 y $a/4$?

$$\boxed{\text{Prob}\left(0, \frac{a}{4}\right) = \frac{407}{2^{11}} \approx 0.199}$$

¿A qué distancia es máxima la probabilidad de encontrar la partícula?

$$\boxed{x_{\text{máx}} = \pm\frac{a}{2\sqrt{3}}}$$

La condición de normalización es

$$1 = \|\psi\|^2 = \int_{-a/2}^{a/2} dx\ |\psi|^2 = |N|^2 \int_{-a/2}^{a/2} dx\ x^2\left(\frac{a^4}{16} - \frac{a^2x^2}{2} + x^4\right)$$

$$= 2\,|N|^2\left[\frac{a^4x^3}{2^4\times 3} - \frac{a^2x^5}{2\times 5} + \frac{x^7}{7}\right]_{x=0}^{x=a/2} = 2\,|N|^2\,a^7\left(\frac{1}{2^7\times 3} - \frac{1}{2^6\times 5} + \frac{1}{2^7\times 7}\right) = \frac{|N|^2\,a^7}{840}\,.$$

Basta coger N tal que $|N|^2 = 840/a^7$. Por ejemplo, la escrita en la solución.

$$\text{Prob}\left(0, \frac{a}{4}\right) = |N|^2\int_0^{a/4} dx\ x^2\left(\frac{a^4}{16} - \frac{a^2x^2}{2} + x^4\right) = |N|^2\left[\frac{a^4x^3}{2^4\times 3} - \frac{a^2x^5}{2\times 5} + \frac{x^7}{7}\right]_{x=0}^{x=a/4}$$

$$= |N|^2\,a^7\left(\frac{1}{2^{10}\times 3} - \frac{1}{2^{11}\times 5} + \frac{1}{2^{14}\times 7}\right) = |N|^2\,a^7\,\frac{407}{2^{11}\times 840} = \frac{407}{2^{11}} \approx 0.199\,.$$

La probabilidad es máxima en el máximo de $\rho(x) = |\psi|^2 = |N|^2\,x^2\left(\frac{a^2}{4} - x^2\right)^2$:

$$\frac{d\rho(x)}{dx} = |N|^2\left[2x\left(\frac{a^2}{4} - x^2\right)^2 - 4x^3\left(\frac{a^2}{4} - x^2\right)\right] = 2|N|^2\,x\left(\frac{a^2}{4} - x^2\right)\left(\frac{a^2}{4} - 3x^2\right)$$

$$\frac{d\rho(x)}{dx} = 0 \quad\Rightarrow\quad x = 0,\ \pm\frac{a}{2}\,,\ \pm\frac{a}{2\sqrt{3}}\,.$$

La función $\rho(x) = |\psi|^2$ es positiva, continua en su dominio y se anula en $x = 0$, $\pm a/2$. Por tanto, 0, $\pm a/2$ son puntos de mínimo y $\pm a/2\sqrt{3}$ de máximo.

Problema 2 (0.5 + 0.5 + 1.5 puntos). El hamiltoniano de un sistema cuántico es

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

¿Cuáles son los estados ligados normalizados del sistema?

$$\phi_1 = e^{-\mathrm{i}\omega t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \phi_2 = e^{-2\mathrm{i}\omega t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \phi_3 = e^{-3\mathrm{i}\omega t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Demuéstrese que el operador

$$A = \frac{\theta}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$

puede describir un observable.

A puede ser un observable pues es autoadjunto. En efecto,

$$A^{+} = (A^T)^* = \left[\frac{\theta}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \right]^* = \frac{\theta}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} = A$$

Si el sistema se encuentra en un instante en el estado dado por $v = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 2 \end{pmatrix}$ y se mide A, qué valores se obtienen y con qué probabilidades?

Medida para A	θ	0	$-\theta$
Probabilidad	$\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{2}}{12}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{2}}{12}$

Explicación de la tabla. De acuerdo con el tercer postulado, los posibles valores para una medida del observable A_{obs} son los autovalores del operador A. Calculémoslos

$$0 = \det(A - a) = \det \begin{pmatrix} -a & -\frac{\mathrm{i}\theta}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{\mathrm{i}\theta}{\sqrt{2}} & -a & -\frac{\mathrm{i}\theta}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\mathrm{i}\theta}{\sqrt{2}} & -a \end{pmatrix} = -a^3 + a\theta^2 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0, \pm\theta$$

Los autovectores normalizados φ_a correspondientes a estos autovalores son

$$a=\theta\colon\quad \frac{\theta}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i} & 0\\ \mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i}\\ 0 & \mathrm{i} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1\\ w_2\\ w_3\end{pmatrix}=\theta\begin{pmatrix}w_1\\ w_2\\ w_3\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\left\{\begin{aligned} -\mathrm{i}w_2 &= \sqrt{2}w_1\\ \mathrm{i}(w_1-w_3) &= \sqrt{2}w_2\\ \mathrm{i}w_2 &= \sqrt{2}w_3\end{aligned}\right.\quad\Rightarrow\ \varphi_\theta=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-\mathrm{i}\\ \sqrt{2}\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}$$

$$a=0\colon\quad \frac{\theta}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i} & 0\\ \mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i}\\ 0 & \mathrm{i} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1\\ w_2\\ w_3\end{pmatrix}=0\quad\Rightarrow\quad\left\{\begin{aligned} w_2 &= 0\\ w_1 &= w_3\end{aligned}\right.\quad\Rightarrow\ \varphi_0=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

$$a=-\theta\colon\quad \frac{\theta}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i} & 0\\ \mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i}\\ 0 & \mathrm{i} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1\\ w_2\\ w_3\end{pmatrix}=-\theta\begin{pmatrix}w_1\\ w_2\\ w_3\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\left\{\begin{aligned} \mathrm{i}w_2 &= \sqrt{2}w_1\\ -\mathrm{i}(w_1-w_3) &= \sqrt{2}w_2\\ -\mathrm{i}w_2 &= \sqrt{2}v_3\end{aligned}\right.\quad\Rightarrow\ \varphi_{-\theta}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\ \sqrt{2}\\ -\mathrm{i}\end{pmatrix}$$

Las probabilidades pedidas son:

$$\begin{aligned}\mathrm{Prob}_v(\theta) &= \left|\langle\varphi_\theta|v\rangle\right|^2=\left|\,(\varphi_\theta^T)^*v\,\right|^2\\ &=\left|\,\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\mathrm{i} & \sqrt{2} & -\mathrm{i}\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\\ 2\end{pmatrix}\,\right|^2=\frac{1}{24}\left|(\mathrm{i}+\mathrm{i}\sqrt{2}-2\mathrm{i})\right|^2=\frac{1}{8}-\frac{\sqrt{2}}{12}\approx 0.0071\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Prob}_v(0) &= \left|\langle\varphi_0|v\rangle\right|^2=\left|\,(\varphi_0^T)^*v\,\right|^2\\ &=\left|\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\\ 2\end{pmatrix}\,\right|^2=\frac{1}{12}\left|(1+2)\right|^2=\frac{3}{4}=0.7500\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Prob}_v(-\theta) &= \left|\langle\varphi_{-\theta}|v\rangle\right|^2=\left|\,(\varphi_{-\theta}^T)^*v\,\right|^2\\ &=\left|\,\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-\mathrm{i} & \sqrt{2} & \mathrm{i}\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\\ 2\end{pmatrix}\,\right|^2=\frac{1}{24}\left|(-\mathrm{i}+\mathrm{i}\sqrt{2}+2\mathrm{i})\right|^2=\frac{1}{8}+\frac{\sqrt{2}}{12}\approx 0.2429\,.\end{aligned}$$

Problema 3 (0.5 + 0.5 puntos).
Un átomo de hidrógeno se encuentra en un instante inicial en un estado con función de ondas

$$\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\psi_{1\,0\,0} + \frac{1}{\sqrt{5}}\,\psi_{2\,1\,-1} + \sqrt{\frac{2}{5}}\,\psi_{2\,1\,0} + C\,\psi_{2\,1\,1}\,.$$

Calcúlese C para que la función de ondas esté normalizada.

$$\boxed{C = \frac{1}{\sqrt{5}}\,, \quad \text{salvo fase } e^{i\alpha} \text{ arbitraria}}$$

Calcúlese la incertidumbre ΔL_z.

$$\boxed{\Delta L_z = \sqrt{\frac{2}{5}}\,\hbar}$$

De $L_z\,\psi_{n\ell m} = m\hbar\,\psi_{n\ell m}$ y $\langle\psi_{n\ell m}|\psi_{n'\ell' m'}\rangle = \delta_{nn'}\,\delta_{\ell\ell'}\,\delta_{mm'}$ se sigue que

$$\langle\psi_{n\ell m}\,|\,L_z\,|\,\psi_{n'\ell' m'}\rangle = m'\hbar\;\delta_{nn'}\,\delta_{\ell\ell'}\,\delta_{mm'}\,,$$
$$\langle\psi_{n\ell m}\,|\,L_z^2\,|\,\psi_{n'\ell' m'}\rangle = m'\hbar\;\langle\psi_{n\ell m}\,|L_z\,|\,\psi_{n'\ell' m'}\rangle = \left(m'\hbar\right)^2\;\delta_{nn'}\,\delta_{\ell\ell'}\,\delta_{mm'}\,.$$

Por tanto,

$$\langle\psi\,|\,L_z\,|\,\psi\rangle = -\hbar\left|\frac{1}{\sqrt{5}}\right|^2 + \hbar\,|C|^2 = 0$$

$$\langle\psi|\,L_z^2\,|\,\psi\rangle = \hbar^2\left|\frac{1}{\sqrt{5}}\right|^2 + \hbar^2\,|C|^2 = \frac{2\hbar^2}{5}\,,$$

$$(\Delta L_z)^2 = \langle L_z^2\rangle - \langle L_z\rangle^2 = \frac{2\hbar^2}{5}\,.$$

Problema 4 (0.75 + 0.75 + 0.75 puntos).
Un átomo de hidrógeno se encuentra en un estado con función de ondas normalizada

$$\Psi(x,t) = e^{-\mathrm{i}E_2 t/\hbar}\,\psi_{210}\,, \qquad \psi_{210} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}\,a_0^{3/2}}\,\frac{r}{a_o}\,e^{-r/2a_0}\,\cos\theta\,.$$

Calcúlense los valores esperados de z^2, la energía potencial $V = -\dfrac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ y la energía cinética $T = -\dfrac{\hbar^2}{2\mu}\,\Delta$.

$\langle z^2\rangle = 18\,a_0^2$	$\langle V\rangle = 2E_2$	$\langle T\rangle = -E_2$

En coordenadas esféricas $z = r\cos\theta$, de forma que (usando las integrales del formulario)

$$\langle\psi_{210}\,|\,z^2\,|\,\psi_{210}\rangle = \left(\frac{1}{4\sqrt{2\pi}\,a_0^{3/2}}\right)^2 \int_0^\infty r^2\,dr\; r^2\left(\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-r/a_0}\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta\;\cos^4\theta\int_0^{2\pi}d\phi$$

$$= \frac{1}{32\pi\,a_0^5}\int_0^\infty dr\; r^6\,e^{-r/a_0}\left[-\frac{1}{5}\,\cos^5\theta\right]_{\theta=0}^{\pi} 2\pi = \frac{1}{32\pi\,a_0^5}\;6!\,a_0^7\;\frac{4\pi}{5} = 18\,a_0^2\,.$$

Para la energía potencial se tiene

$$\langle\psi_{210}\,|\,V\,|\,\psi_{210}\rangle = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\;\langle\psi_{210}\,|\,\frac{1}{r}\,|\,\psi_{210}\rangle$$

$$= -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\;\frac{1}{32\pi\,a_0^5}\int_0^\infty r^2\,dr\;\frac{1}{r}\,r^2\,e^{-r/a_0}\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta\;\cos^2\theta\int_0^{2\pi}d\phi$$

$$= -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\;\frac{1}{32\pi\,a_0^5}\;3!\,a_0^4\;\frac{2}{3}\;2\pi = -\frac{e^2}{16\pi\epsilon_0 a_0} = 2E_2\,.$$

De aquí y de $H = T + V$ se sigue que

$$\langle\psi_{210}|\,T\,|\,\psi_{210}\rangle = \langle H\rangle - \langle V\rangle = E_2 - 2E_2 = -E_2\,.$$

Problema 5 (1.5 puntos). En este problema es necesario entregar los cálculos.
Una partícula de masa m se mueve con energía potencial

$$V(x) = V_0 \, \frac{1 - \cos(\pi x/L)}{1 + \cos(\pi x/L)} \,, \qquad V_0 = \text{const} > 0 \,.$$

Calcúlese V_0 y E para que

$$\psi(x,t) = A\, e^{-\mathrm{i}Et/\hbar} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right]$$

sea un estado ligado.

$$\boxed{V_0 = \frac{\hbar^2\pi^2}{4mL^2} \qquad\qquad E = \frac{\hbar^2\pi^2}{4mL^2} = V_0}$$

El potencial es periódico, de período $2L$ y se hace infinito en $x = \pm\, nL$, para $n = 1, 3, 5, \ldots$ Así pues, trabajermos en el intervalo $[-L, L]$.

Para que $\psi(x,t)$ sea un estado ligado, E y

$$\phi(x) = A \left[1 + \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right]$$

deben satisfacer la ecuación de Scrödinger independiente del tiempo

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\, \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + V(x)\, \phi(x) = E\, \phi(x) \,.$$

Substituyendo $\phi(x)$ y $V(x)$ por sus expresiones y simplificando una A resulta

$$\left(\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} - V_0 - E \right) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) = E - V_0 \,. \tag{A}$$

Como 1 y $\cos\bigl(\pi x/L\bigr)$ son ortogonales en $[-L, L]$, la única forma de que la ecuación se satisfaga para toda x es que el coeficiente de $\cos\bigl(\pi x/L\bigr)$ se anule y que $E = V_0$,

$$\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} - V_0 - E = 0 \,, \qquad E = V_0 \,.$$

Por tanto,

$$E = V_0 = \frac{\hbar^2\pi^2}{4mL^2} \,.$$

Se puede también particularizar la ec. (A) para $x = L/2$, que implica que $E = V_0$. Se substituye en (A), que implica que $2V_0 = \hbar^2\pi^2/2mL^2$. La ec. (A) entonces se satisface trivialmente para toda x

Problema 6 (1 punto). En este problema es necesario entregar los cálculos.
Un oscilador armónico (de masa m y frecuencia angular ω) se encuentra en su estado fundamental $\phi_0(x)$. Desde el exterior se le comunica en un instante t_0 un momento p_0, de forma que la función de ondas pasa a ser

$$\psi(x, t_0) = e^{-\mathrm{i}p_0 x/\hbar}\, \phi_0(x)\,.$$

¿Cuál es la probabilidad de que el oscilador permanezca en el estado fundamental?

$$\boxed{\text{Prob (fundamental)} = e^{-p_0^2/2m\hbar\omega}}$$

Usando las integrales en el formulario se tiene que

$$\text{Prob (fund)} = \left|\, \langle \phi_o | \psi \rangle \,\right|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} dx\; e^{-\mathrm{i}p_0 x/\hbar}\, \phi_0^2(x) \right|^2$$

$$= \left| \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\; e^{-\mathrm{i}p_0 x/\hbar}\, e^{-\alpha x^2} \right|^2 = \left| e^{-p_0^2/4\hbar^2\alpha^2} \right|^2 = e^{-p_0^2/2\hbar^2\alpha^2} = e^{-p_0^2/2m\hbar\omega}\,.$$

Nótese que la probabilidad es adimensional (pues el exponente lo es), y está entre 0 y 1. Para $p_0 << \hbar\alpha$, es decir, para momento muy pequeño, la probabilidad es próxima a 1 y el oscilador tiende a permanecer en el estado fundamental. Por el contrario, para $p_0 >> \hbar\alpha$, que corresponde a momento muy grande, la probabilidad de que permanezca en el fundamental es muy baja. De acuerdo con lo que cabe esperar.