UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

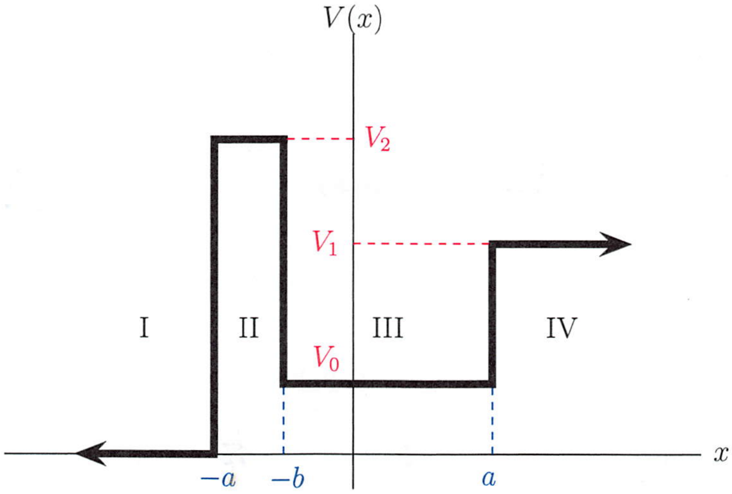
Apellidos: Soluciones

Nombre: .... D.N.I.: ....

Asignatura: Física cuántica I – Grupo C   Grupo: ....

Curso: 2º   Fecha: 12/09/2016

Problema 3 (1 punto).
Un haz de partículas de momento p incide desde la izquierda, con energía $E = p^2/2m$, sobre el potencial de la figura.



Supóngase que $V_1 < E < V_2$. Escríbase la forma de la función de ondas en las zonas I, II, III y IV, dejando los vectores de ondas indicados en términos de las V_i.

$\phi_{\mathrm{I}}(x) = A_I e^{ik_I x} + B_I e^{-ik_I x}$ $k_{\mathrm{I}} = \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ 0.25

$\phi_{\mathrm{II}}(x) = A_{II} e^{k_{II} x} + B_{II} e^{-k_{II} x}$ $k_{\mathrm{II}} = \dfrac{\sqrt{2m(V_2 - E)}}{\hbar}$ 0.25

$\phi_{\mathrm{III}}(x) = A_{III} e^{-ik_{III} x} + B_{III} e^{-ik_{III} x}$ $k_{\mathrm{III}} = \dfrac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar}$ 0.25

$\phi_{\mathrm{IV}}(x) = A_{IV} e^{ik_{IV} x}$ $k_{\mathrm{IV}} = \dfrac{\sqrt{2m(E - V_1)}}{\hbar}$ 0.25

A's and B's constant

Problema 4 (1.5 puntos).
Un átomo de hidrógeno se encuentra en $t = 0$ en el estado

$$\psi(\mathbf{x}, 0) = c\,\psi_{100}(\mathbf{x}) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\psi_{321}(\mathbf{x}) + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\psi_{211}(\mathbf{x}) , \tag{A}$$

con c una constante y $\psi_{n\ell m}(\mathbf{x})$ los estados propios del átomo de hidrógeno. ¿Qué valores reales son posibles para c?

$\boxed{c = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}}$ 0.25

Si se mide el cuadrado del momento angular, ¿cuál es la probabilidad de obtener $2\hbar^2$ y en qué estado se queda el sistema después de la medida?

$\boxed{\text{Prob}_\psi(2\hbar^2) = 1/2}$ 0.25 $\boxed{\psi_{\text{después}} = \psi_{211}}$ 0.25

Si se mide la tercera componente del momento angular en el estado (A) ¿qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidad?

(Añádanse tantas columnas como sea necesario)

L_z	0	$\hbar$	
Probabilidad	$\|c\|^2 = 1/6$	$5/6$	
	0.25	0.5	

$$\|\psi(x,0)\|^2 = 1 \iff |c|^2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1 \implies |c|^2 = 1/6$$

$$\implies c_{real} = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$2\hbar^2 = \ell(\ell+1)$ for $\ell = 1$

Only ψ_{211} (coefficient $\frac{1}{\sqrt{2}}$) has $\ell = 1$ $\implies$ $\text{Prob}(2\hbar^2) = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$

and $\psi_{\text{después}} = \psi_{211}$

$m = 0$ for ψ_{100} in (A), coefficient c $\implies$ $\text{Prob}(0) = |c|^2 = \frac{1}{6}$

$m = \hbar$ for ψ_{321}, coefficient $\frac{1}{\sqrt{3}}$, and ψ_{211}, coefficient $\frac{1}{\sqrt{2}}$,

in (A) $\implies$ $\text{Prob}(\hbar) = \left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right|^2 + \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| = \frac{5}{6}$

Apellidos	
Nombre	D.N.I. ....
Asignatura Física cuántica I – Grupo C	Grupo ....
Curso 2º	Fecha 12/09/2016

Problema 5 (1.5 punto).
Calcúlense las incertidumbres de ΔL_x y ΔL_y en un autoestado simultáneo $|\ell m\rangle$ de $\mathbf{L}^2$ y L_z, y compruébese que se satisface

$$\Delta L_x\,\Delta L_y \geq \frac{1}{2}\left|\left\langle [L_x, L_y]\right\rangle\right|.$$

$$\boxed{\Delta L_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\sqrt{\ell(\ell+1)-m^2} \qquad \Delta L_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\sqrt{\ell(\ell+1)-m^2}} \quad (**)$$

$$L_\pm = L_x \pm i L_y \Rightarrow L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)$$

$$L_y = \frac{1}{2i}(L_+ - L_-)$$

- Calculation of $\langle L_x\rangle, \langle L_y\rangle$

$$\langle L_x\rangle = \langle \ell m|\tfrac{1}{2}(L_+ + L_-)|\ell m\rangle$$

$$\langle L_y\rangle = \langle \ell m|\tfrac{1}{2}(L_+ - L_-)|\ell m\rangle$$

$$\langle \ell m|L_\pm|\ell m\rangle = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1)-m(m\pm 1)}\ \underbrace{\langle \ell m|\ell\, m\pm 1\rangle}_{=0} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle L_x\rangle = \langle L_y\rangle = 0$$

- Calculation of $\langle L_x^2\rangle, \langle L_y^2\rangle$

$$L_x^2 = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)\frac{1}{2}(L_+ + L_-) = \frac{1}{4}(L_+L_+ + L_+L_- + L_-L_+ + L_-L_-)$$

$$L_y^2 = \frac{1}{2i}(L_+ - L_-)\frac{1}{2i}(L_+ - L_-) = -\frac{1}{4}(L_+L_+ - L_+L_- - L_-L_+ + L_-L_-)$$

$\langle lm | L_\pm L_\pm | lm \rangle = 0$ since

1) $L_\pm | lm\rangle$ gives a state $| l\, m\pm 1\rangle$

2) $L_\pm (L_\pm | lm\rangle)$ gives a state $| l\, m\pm 2\rangle$

3) $\langle lm | l\, m\pm 2\rangle = 0$

$$\langle lm | L_\pm L_\mp | lm\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1)-m(m\mp 1)}\ \langle lm | L_\pm | l\, m\mp 1\rangle$$

$$= \hbar^2\sqrt{l(l+1)-m(m\mp 1)}\ \sqrt{l(l+1)-(m\mp 1)(m\mp 1\pm 1)}\ \underbrace{\langle lm | lm\rangle}_{1}$$

$$= \hbar^2 [l(l+1)-m(m\mp 1)]$$

$$\langle L_x^2\rangle = \langle L_y^2\rangle = \frac{1}{4}(\langle L_+L_-\rangle + \langle L_-L_+\rangle)$$

$$= \frac{1}{4}\hbar^2[l(l+1)-m(m-1)+l(l+1)-m(m+1)]$$

$$= \frac{\hbar^2}{2}[l(l+1)-m^2]$$

$$\Delta L_x^2 = \Delta L_y^2 = \frac{\hbar^2}{2}[l(l+1)-m^2] \implies (**)$$

$$\Delta L_x \cdot \Delta L_y = \frac{\hbar^2}{2}[l(l+1)-m^2]$$

- $\frac{1}{2}|\langle [L_x, L_y]\rangle| = \frac{1}{2}|\langle i\hbar L_z\rangle| = \frac{\hbar^2}{2}|m|$

$$\Delta L_x \Delta L_y \geq \frac{1}{2}|\langle [L_x, L_y]\rangle| \iff l(l+1)-m^2 \geq |m|$$

$$\iff l(l+1) \geq |m|(|m|+1)$$

True since $m = -l, -l+1, \dots, l \implies |m| \leq l$

Instead of calculating $\langle lm | L_\pm L_\mp | lm \rangle$ one may compute $\langle L_x^2 \rangle$, $\langle L_y^2 \rangle$ as follows:

$$\langle L_+^2 \rangle = \langle L_-^2 \rangle = 0 \Rightarrow \langle L_x^2 \rangle = \langle L_y^2 \rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle \bar{L}^2 \rangle = 2\langle L_x^2 \rangle + \langle L_z^2 \rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle L_x^2 \rangle = \frac{1}{2}\left(\langle \bar{L}^2 \rangle - \langle L_z^2 \rangle \right) = \frac{\hbar^2}{2}\left[l(l+1) - m^2 \right]$$

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

Apellidos ....

Nombre .... D.N.I. ....

Asignatura Física cuántica I – Grupo C Grupo ....

Curso 2º Fecha 12/09/2016

Problema 6 (1 punto).
Una partícula se mueve en una dimensión con hamiltoniano

$$H = \frac{P^2}{2m} + V(X)\,.$$

Demuéstrese que el operador momento puede escribirse como

$$P = -\frac{m}{\mathrm{i}\hbar}\,[H, X]\,. \qquad (*)$$

A partir de este resultado pruébese que si ϕ_n y ϕ_k son dos autoestados de H con energías E_n y E_k entonces

$$\langle \phi_n | P | \phi_k \rangle = -\frac{m}{\mathrm{i}\hbar}\,(E_n - E_k)\,\langle \phi_n | X | \phi_k \rangle$$

$[H,X] =$ since $[V(X),X]=0$

$= \frac{1}{2m}[P^2,X]$

$= \frac{1}{2m}(P[P,X]+[P,X]P) =$ since $[P,X]=-i\hbar$

$= -\frac{i\hbar}{m}P \Rightarrow (*)$ 0.5

$\langle\phi_n|P|\phi_k\rangle = -\frac{m}{i\hbar}\langle\phi_n|[H,X]|\phi_k\rangle$

$= -\frac{m}{i\hbar}\langle\phi_n|(HX-XH)|\phi_k\rangle \underset{\uparrow}{=} -\frac{m}{i\hbar}(E_n-E_k)\langle\phi_n|X|\phi_k\rangle$

$\langle\phi_n|HX|\phi_k\rangle =$ use H is hermitian $= \langle H\phi_n|X\phi_k\rangle$

$= E_n\langle\phi_n|X|\phi_k\rangle$

$\langle\phi_n|XH|\phi_k\rangle = E_k\langle\phi_n|X|\phi_k\rangle$ 0.5

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

Apellidos	
Nombre	D.N.I. ....
Asignatura Física cuántica I – Grupo C	Grupo ....
Curso 2º	Fecha 12/09/2016

Problema 7 (1.5 puntos).
Un átomo de hidrógeno se encuentra en un estado

$$\psi(r,\theta,\phi) = N\, r\, e^{-Zr/a_0}\, \cos\theta\, \sin\phi$$

¿Cuál es la distancia más probable a la que puede encontrarse el electrón del núcleo? ¿Y el valor esperado para dicha distancia?

$r_{\max} = \frac{2a_0}{Z}$ $\qquad\qquad$ $\langle r \rangle = \frac{5a_0}{2Z}$

- Probability of finding e^- at r with any $(\theta,\phi) =: P(r)$

$$= \int d\Omega\, r^2 |\psi(r,\theta,\phi)|^2$$

$$= \underbrace{|N|^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta \cos^2\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sin^2\phi}\; r^4 e^{-2Zr/a_0} = K r^4 e^{-2Zr/a_0}$$

Constant. Call it K. Its value $\left(K = |N|^2 \frac{2\pi}{3}\right)$ is not necessary for the calculations below

Most probable distance = maximum of $P(r)$:

$$\frac{dP}{dr} = K e^{-2Zr/a_0}\left(4r^3 - \frac{2Z}{a_0} r^4\right)$$

$$\frac{dP}{dr} = 0 \implies \begin{cases} r \to \infty,\ r = 0 & \text{minima} \\ r = \frac{2a_0}{Z} =: r_{max} & \text{maximum} \end{cases}$$

0.75

$$\boxed{\frac{d^2P}{dr^2} = K e^{-2Zr/a_0}\left[12r^2 - \frac{8Z}{a_0} r^3 - \left(4r^3 - \frac{2Z}{a_0} r^4\right)\frac{2Z}{a_0}\right] \text{ and}}$$

$$\boxed{\frac{d^2P}{dr^2}(r_{max}) = -K e^{-4}\left(\frac{2a_0}{Z}\right)^2 < 0}$$

- $$\langle r \rangle = \frac{\int d^3x\, r|\psi|^2}{\int d^3x\, |\psi|^2} = \frac{K\int_0^\infty dr\, r^2\, r\, r^2 e^{-2Zr/a_0}}{K\int_0^\infty dr\, r^2\, r^2 e^{-2Zr/a_0}}$$

0.75

$$= \frac{\int_0^\infty dr\, r^5 e^{-2Zr/a_0}}{\int_0^\infty dr\, r^4 e^{-2Zr/a_0}} = \frac{5!\,(2Z/a_0)^{-6}}{4!\,(2Z/a_0)^{-5}} = \frac{5a_0}{2Z}$$