UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

Apellidos	
Nombre	DNI .....
Asignatura **Física cuántica I**	Grupo .....
Curso **2º**	Fecha .....

Física cuántica I - Grupos B, B2 y E
Examen final – 12 de septiembre de 2017
Soluciones

Problema 1 (1+1+1 puntos).
Una partícula tiene función de ondas en un instante t_0

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; x \leq 0\,, \\ \sqrt{x}\, e^{-x^2/4a^2} & \text{si } \; x > 0\,, \end{cases}$$

con $a > 0$ una constante con dimensiones de longitud. Normalícese la función de ondas.

$$\psi_{\text{normalizada}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; x \leq 0\,, \\ \dfrac{1}{a}\sqrt{x}\, e^{-x^2/4a^2} & \text{si } \; x > 0 \end{cases}$$

¿Cuál es la probabilidad de encontrar la partícula entre 0 y a?

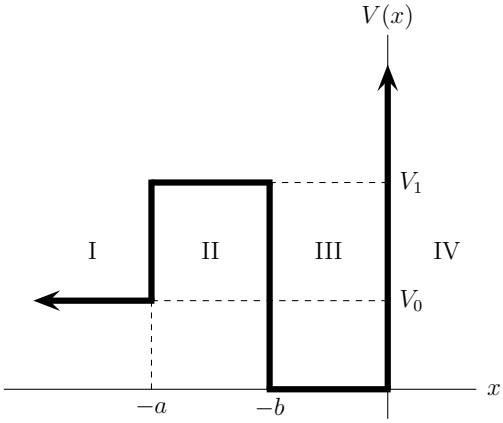
$$\text{Prob}(0,a) = 1 - \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0.393$$

Calcúlense el valor esperado de x^2.

$$\langle x^2 \rangle = 2a^2$$

(Operaciones al final)

Problema 2 (1 punto). Una partícula con energía $E = \hbar^2 k^2/2m$ incide desde la izquierda en forma de onda plana sobre el potencial de la figura. Se sabe que $V_0 < E < V_1$.



Escríbase la función de ondas en las distintas zonas. No se pide imponer las condiciones de pegado sobre la función de ondas y determinar las constantes de integración, sólo el tipo de solución permitida en cada zona.

$$\phi_{\rm I}(x) = A\, e^{{\rm i}k_1 x} + B\, e^{-{\rm i}k_1 x} \qquad k_1 = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}$$

$$\phi_{\rm II}(x) = C\, e^{k_2 x} + D\, e^{-k_2 x} \qquad k_2 = \frac{\sqrt{2m(V_1-E)}}{\hbar}$$

$$\phi_{\rm III}(x) = E\, e^{{\rm i}k_3 x} + F\, e^{-{\rm i}k_3 x} \qquad k_3 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = k$$

$$\phi_{\rm IV}(x) = 0$$

Nombre _____

Problema 3 (0.4 × 5 = 2 puntos).
Un átomo de hidrógeno se encuentra en un instante en un estado con función de ondas

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{15}}\,\psi_{100} + \frac{1}{\sqrt{5}}\,\psi_{21-1} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{5}}\,\psi_{210} + \frac{1}{\sqrt{5}}\,\psi_{32-1} + \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{6}}\,\psi_{311}\,.$$

(1) ¿Cuál es probabilidad de obtener E_1 al medir la energía?

$$\boxed{\text{Prob}\,(E_1) = \left|\frac{1}{\sqrt{15}}\right|^2 = \frac{1}{15}}$$

(2) ¿Cuál es probabilidad de obtener E_2 al medir la energía?

$$\boxed{\text{Prob}\,(E_2) = \left|\frac{1}{\sqrt{5}}\right|^2 + \left|\frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{5}}\right|^2 = \frac{2}{5}}$$

(3) ¿Cuál es la probabilidad de obtener $\hbar$ al medir la tercera componente del momento angular?

$$\boxed{\text{Prob}\,(\hbar) = \left|\frac{1+1}{\sqrt{6}}\right|^2 = \frac{1}{3}}$$

(4) ¿Cuál es el valor esperado de la tercera componente L_z del momento angular?

$$\boxed{\langle L_z\rangle = 0 + \left|\frac{1}{\sqrt{5}}\right|^2(-\hbar) + 0 + \left|\frac{1}{\sqrt{5}}\right|^2(-\hbar) + \left|\frac{1+\mathrm{i}}{6}\right|^2\hbar = -\frac{1}{15}\,\hbar}$$

(5) ¿Cuál es el valor esperado del cuadrado $\mathbf{L}^2$ del momento angular?

$$\boxed{\langle \mathbf{L}^2\rangle = 0 + \left|\frac{1}{\sqrt{5}}\right|^2 2\hbar^2 + \left|\frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{5}}\right|^2 2\hbar^2 + \left|\frac{1}{\sqrt{5}}\right|^2 6\hbar^2 + \left|\frac{1+\mathrm{i}}{6}\right|^2 2\hbar^2 = \frac{8}{3}\,\hbar^2}$$

Lo primero que hay que hacer es comprobar si la función de ondas dada está normalizada. Las suma de los módulos de los coeficientes al cuadrado es

$$\left|\frac{1}{\sqrt{15}}\right|^2 + \left|\frac{1}{\sqrt{5}}\right|^2 + \left|\frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{15}}\right|^2 + \left|\frac{1}{\sqrt{15}}\right|^2 + \left|\frac{1+\mathrm{i}}{6}\right|^2 = \frac{1}{15} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} = 1\,.$$

Como ψ está normalizada, las probabilidades son (las sumas de) los módulos de los coeficientes al cuadrado que se dan arriba.

Problema 4 (1+1 puntos).
Un átomo de hidrógeno se encuentra en un estado con función de ondas normalizada

$$\psi_{321}(x,t) = e^{-\mathrm{i}E_3 t/\hbar}\,\frac{1}{81\sqrt{\pi a_0^3}}\left(\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-r/3a_0}\,\sin\theta\,\cos\theta\,e^{\mathrm{i}\phi}\,,$$

donde a_0 es el radio de Bohr. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar el electrón a una distancia del núcleo comprendida entre r y $r+dr$?

$$\mathrm{Prob}_{321}\,(r, r+dr) = \frac{8}{98415\,a_0^7}\,r^6\,e^{-2r/3a_0}\,dr =: P(r)\,dr$$

¿A qué distancia r es máxima dicha probabilidad? **En este apartado es necesario entregar los cálculos.**

$$r_{\text{máx}} = 9a_0$$

- $\mathrm{Prob}_{321}(r, r+dr)$ está dada por

$$\begin{aligned}
\mathrm{Prob}_{321}\,(r, r+dr) &= \int_0^\pi d\theta\,\sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi\; r^2 dr\;|\psi_{321}|^2 \\
&= r^2\,dr\,\frac{r^4\,e^{-2r/3a_0}}{3^8\pi\,a_0^7}\int_0^\pi d\theta\,\sin^3\theta\,\cos^2\theta\int_0^{2\pi} d\phi \\
&= \text{ escribiendo } \sin^3\theta = (1-\cos^2\theta)\sin\theta \text{ las integrales angulares dan } \frac{8\pi}{15} \\
&= \frac{8}{98415\,a_0^5}\,r^6\,e^{-2r/3a_0}\,dr =: P(r)\,dr
\end{aligned}$$

- $\mathrm{Prob}_{321}(r, r+dr)$ alcanza su máximo en

$$P'(r) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad e^{-2r/3a_0}\left(6r^5 - \frac{2r^6}{3a_0}\right) = 0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} r\to\infty & \text{mínimo} \\ r = 0 & \text{mínimo} \\ r = 9a_0 & \text{máximo} \end{cases}$$

Nombre _____

Problema 5 (1+1 puntos). En este problema es necesario entregar los cálculos.
Una partícula de masa m se mueve en un pozo infinito unidimensional de anchura a centrado en $x = 0$. En un tiempo t_0 su estado está descrito por la función de ondas normalizada

$$\psi(x, t_0) = \sqrt{\frac{30}{a^5}} \left(\frac{a^2}{4} - x^2 \right).$$

¿Cuál es la probabilidad de que al medir la energía se obtengan las autoenergías E_1 y E_2 del pozo?

$\text{Prob}\,(E_1) = \dfrac{960}{\pi^6}$	$\text{Prob}\,(E_2) = 0$

La probabilidad de obtener una autoenergía E_n es el módulo al cuadrado del coeficiente c_n del desarrollo de Fourier de ψ en la base $\{\phi_n\}$ de autoestados del pozo infinito. Es decir,

$$\text{Prob}(E_n) = |c_n|^2\,, \quad \text{con} \quad c_n = \int_{-a/2}^{a/2} dx\; \phi_n^*(x)\, \psi(x, t_0)\,.$$

Como $\psi(x, t_0)$ es par, $\phi_2 = \sqrt{2/a}\sin(2\pi/x)$ es impar y el intervalo de integración es simétrico (con respecto al origen) se tiene que

$$\text{Prob}(E_2) = 0\,.$$

Pasemos a calcular $\text{Prob}(E_1)$:

$$\begin{aligned} \text{Prob}(E_1) &= \int_{-a/2}^{a/2} dx\; \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sqrt{\frac{30}{a^5}} \left(\frac{a^2}{4} - x^2 \right) \\ &= \frac{2\sqrt{15}}{a^3} \left[\frac{a^2}{4} \int_{-a/2}^{a/2} dx\; \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) - \int_{-a/2}^{a/2} dx\; x^2 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \right]. \end{aligned}$$

La primera integral es trivial,

$$\frac{a^2}{4} \int_{-a/2}^{a/2} dx\; \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) = \frac{a^3}{2\pi}\,.$$

Nombre _____

La segunda se hace integrando dos veces por partes:

$$\int_{-a/2}^{a/2} dx\; x^2 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) = \left\{ \begin{array}{rcl} u = x^2 & \Rightarrow & du = 2x\,dx \\ dv = \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx & \Rightarrow & v = \frac{a}{\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \end{array} \right\}$$

$$= \frac{ax^2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\Big|_{-a/2}^{a/2} - \frac{2a}{\pi}\int_{-a/2}^{a/2} dx\; x\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

$$= \frac{a^3}{2\pi} - \frac{2a}{\pi}\left\{ \begin{array}{rcl} u = x & \Rightarrow & du = dx \\ dv = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx & \Rightarrow & v = -\frac{a}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \end{array} \right\}$$

$$= \frac{a^3}{2\pi} - \frac{2a}{\pi}\left[-\frac{ax}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\Big|_{-a/2}^{a/2} + \frac{a}{\pi}\int_{-a/2}^{a/2} dx\; \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right]$$

$$= \frac{a^3}{2\pi} - \frac{2a}{\pi}\left[0 + \frac{2a^2}{\pi^2}\right].$$

Poniendo todo junto se tiene

$$\text{Prob}(E_1) = \left|\frac{8\sqrt{15}}{\pi^3}\right|^2.$$

Cálculos del problema 1.

- La condición de normalización para la función de ondas normalizada $\psi_{\text{nor}} = N\psi$ es

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\left|\psi_{\text{nor}}(x)\right|^2 = |N|^2\int_0^{\infty} dx\,\left|\sqrt{x}\,e^{-x^2/4a^2}\right|^2 = |N|^2\int_0^{\infty} dx\; x\,e^{-x^2/2a^2} = |N|^2 a^a\,.$$

Basta tomar, por ejemplo, $N = 1/a$.

- $\text{Prob}(0,a) = \displaystyle\int_0^a dx\,\left|\psi_{\text{nor}}(x)\right|^2 = \frac{1}{a^2}\int_0^a dx\; x\,e^{-x^2/2a^2} = -\,e^{-x^2/2a^2}\Big]_0^a = 1 - \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0.393\,.$

- $\langle x^2\rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx\; x^2\,\left|\psi_{\text{nor}}(x)\right|^2 = \frac{1}{a^2}\int_0^{\infty} dx\; x^3\,e^{-x^2/2a^2} = 2a^2\,.$