Física cuántica I C

Examen parcial – 23 de Mayo de 2016

Problema 1 (0.5+0.5+1.0+0.5+1.0+1.5 puntos). Una partícula de masa m en un pozo infinito unidimensional de anchura a centrado en el origen se encuentra en $t = 0$ en un estado descrito por la función de onfas

$$\psi(x, 0) = N \left[4\mathrm{i}\, \phi_1(x) - 3\phi_2(x)\right],$$

donde N es una constante y $\phi_n(x)$ son los autoestado normalizados del pozo, cuyas autoenergías denotamos E_n. ¿Cuál de los siguientes valores de N da una función de ondas normalizada?

$$-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{5}}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{7}}, \quad \frac{1}{7}.$$

$N = \frac{1}{5}$ 0.5

Escríbase la función de ondas en un tiempo $t > 0$.

$\psi(x, t) = \frac{4i}{5} e^{-iE_1 t/\hbar} \phi_1(x) - \frac{3}{5} e^{-iE_2 t/\hbar} \phi_2(x)$ 0.5

Si se mide la energía en $t > 0$, ¿qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidades?

(Añádanse tantas columnas como sea necesario)

Energía	E_1	E_2		
Probabilidad	$\frac{16}{25}$	$\frac{9}{25}$		

1

Calcúlese el valor esperado de la energía y su incertidumbre

$\langle H \rangle_t = \frac{16}{25} E_1 + \frac{9}{25} E_2$ 0.5

$\Delta E = \frac{12}{25} |E_1 - E_2|$ 1.0

Calcúlense los valores esperados del momento y de su cuadrado en $t > 0$.

$\langle P \rangle_t = \frac{64\hbar}{25a} \cos\left[\frac{(E_1 - E_2)t}{\hbar}\right]$ 1.5

Problema 2 (2 puntos). Una partícula se mueve en una dimensión en el intervalo $[0, \infty)$. Su estado está descrito por la función de ondas

$$\psi(x,t) = N e^{-\mathrm{i}\,Et/\hbar}\, e^{-x^2/x_0^2}\, \frac{x}{x_0}$$

donde N es una constante sin dimensiones y x_0 es una constante conocida con dimensiones de longitud. Calcúlese el valor esperado de X.

$\langle X \rangle_t = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x_0$ 1.0

¿A qué distancia del origen es más probable encontrar la partícula?

$x_{\text{máx}} = \frac{x_0}{\sqrt{2}}$ 1.0

Problema 3 (3 puntos). En este problema es necesario entregar los cálculos. Una partícula de masa m se mueve en un pozo unidimensional cuya energía potencial es

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{si} \quad -\infty < x \le -\dfrac{1}{\alpha} \\ \dfrac{1}{2} m\omega^2 x^2 & \text{si} \quad -\dfrac{1}{\alpha} < x \le \dfrac{1}{\alpha} \\ V_0 & \text{si} \quad \dfrac{1}{\alpha} \le x < \infty \end{cases}, \qquad V_0 > 0\,, \qquad \alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,.$$

Considérese la función de ondas

$$\psi(x,t) = \phi(x)\, e^{-\mathrm{i}\omega t/2}\,, \qquad \phi(x) = \begin{cases} e^{kx} & \text{si} \quad -\infty < x \le -\dfrac{1}{\alpha} \\ C\, e^{-(\alpha x)^2/2} & \text{si} \quad -\dfrac{1}{\alpha} < x \le \dfrac{1}{\alpha} \\ e^{-kx} & \text{si} \quad \dfrac{1}{\alpha} \le x < \infty \end{cases}.$$

Calcúlense k, C y V_0 en términos de α para que $\psi(x,t)$ sea estado estacionario.

Datos

- Los autoestados y autoenergías del pozo infinito unidimensional de anchura a centrado en el origen son

$$\left.\begin{aligned} \phi_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{a}}\, \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \qquad n = 1, 3, 5, \ldots \\ \phi_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{a}}\, \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \qquad n = 2, 4, 6, \ldots \end{aligned}\right\} \qquad E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2.$$

- Para $a > 0$ y $n = 0, 1, 2, \ldots$, se tiene

$$\int_0^\infty dx\, x^{2n}\, e^{-ax^2} = \frac{(2n-1)!!}{2\,(2a)^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,, \qquad \int_0^\infty dx\, x^{2n+1}\, e^{-ax^2} = \frac{n!}{2\, a^{n+1}}\,.$$

Ejercicios del ALUMNO

APELLIDOS Soluciones - 1

NOMBRE D.N.I. n.º

ASIGNATURA Física cuántica I GRUPO C

CURSO N.º DE MATRICULA FECHA 23.5.16

Problema 1

(a) Condición de normalización:

$$1 = \langle \psi(x,0) | \psi(x,0) \rangle = \sum_n |c_n|^2$$

con

$$c_1 = 4iN \quad , \quad c_2 = -3N \quad , \quad c_n = 0 \quad \text{para} \quad n \geq 3$$

Se tiene

$$1 = |N|^2 (16+9) \Rightarrow |N| = \frac{1}{5} \Rightarrow N = \frac{1}{5} \text{ de las propuestas}$$

(b) Trivial

(c) $\langle H \rangle_t = \sum_n E_n |c_n|^2$ y

Se obtiene E_1 con probabilidad $|c_1|^2 = \frac{16}{25}$

Se obtiene E_2 con probabilidad $|c_2|^2 = \frac{9}{25}$

No se obtiene E_n para $n \geq 3$.

(d) $$\langle H \rangle_t = \frac{16}{25} E_1 + \frac{9}{25} E_2 = \frac{1}{25} \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} (16 + 9 \cdot 4) = \frac{26}{25} \frac{\hbar^2 \pi^2}{ma^2}$$

(e) $$\langle H^2 \rangle_t = \sum_n |c_n|^2 E_n^2 = \frac{16}{25} E_1^2 + \frac{9}{25} E_2^2$$

$$\Delta E^2 = \langle H^2 \rangle_t - \langle H \rangle_t^2 = \frac{16}{25} E_1^2 + \frac{9}{25} E_2^2 - \left(\frac{16}{25} E_1 + \frac{9}{25} E_2 \right)^2$$

$$= \frac{16}{25} E_1^2 \left(1 - \frac{16}{25}\right) + \frac{9}{25} E_2^2 \left(1 - \frac{9}{25}\right) - 2 \, \frac{9 \times 16}{25^2} E_1 E_2$$

$$= \frac{9 \times 16}{25^2} (E_1 - E_2)^2$$

$$\Delta E = \frac{3\cdot 4}{25}|E_1 - E_2| = \frac{12}{25}\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}\cdot 3 = \frac{18}{25}\frac{\hbar^2\pi^2}{ma^2}$$

(f) $$\langle P\rangle_t = \langle \frac{1}{5}(4ie^{-iE_1t/\hbar}\phi_1 - 3e^{-iE_2t/\hbar}\phi_2)\cdot$$

$$\cdot |P| \frac{1}{5}(4ie^{-iE_1t/\hbar}\phi_1 - 3e^{-iE_2t/\hbar}\phi_2)\rangle$$

$$= \frac{1}{25}\Big[16\langle\phi_1|P\phi_1\rangle + 9\langle\phi_2|P\phi_2\rangle$$

$$+ (-4i)(-3)\, e^{i(E_1-E_2)t/\hbar}\langle\phi_1|P\phi_2\rangle$$

$$+ (-3)(4i)\, e^{-i(E_1-E_2)t/\hbar}\langle\phi_2|P\phi_1\rangle\Big]$$

$$\langle\phi_n|P\phi_n\rangle = \int_{-a/2}^{a/2}\phi_n(x)(-i\hbar)\frac{d}{dx}\phi_n(x) = 0$$

par × par ó impar × impar = par

$\frac{d}{dx}$ = cambia paridad

$\phi_n \frac{d}{dx}\phi_n$ = impar

P autoadjunto

$$\langle\phi_1|P\phi_2\rangle = \langle P\phi_1|\phi_2\rangle = \langle\phi_2|P\phi_1\rangle^*$$

$$\langle\phi_1|P\phi_2\rangle = \frac{2}{a}(-i\hbar)\int_{-a/2}^{a/2}dx\,\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\frac{d}{dx}\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)$$

$$= -\frac{4\pi}{a^2}i\hbar\int_{-a/2}^{a/2}dx\,\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)$$

$$\cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

$$= -4i\hbar\frac{\pi}{a^2}\int_{-a/2}^{a/2}dx\left[\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) - 2\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right]$$

$$= -\frac{4i\hbar}{a}\left[\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) - \frac{2}{3}\sin^3\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right]_{x=-a/2}^{x=a/2} = -\frac{4i\hbar}{a}\left[2 - \frac{2}{3}\cdot 2\right] = -\frac{8i\hbar}{3a}$$

Ejercicios del ALUMNO

APELLIDOS Soluciones - 2

NOMBRE

D.N.I. n.º

ASIGNATURA Física cuántica I

GRUPO

CURSO

N.º DE MATRICULA

FECHA 23.5.16

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

Por tanto,

$$\langle P \rangle_t = \frac{1}{25} 12i \left(-\frac{8i\hbar}{3a}\right)\left[e^{i(E_1-E_2)t/\hbar} + e^{-i(E_1-E_2)t/\hbar}\right]$$

$$= \frac{64\hbar}{25a} \cos\left[\frac{(E_1-E_2)t}{\hbar}\right] = \frac{64\hbar}{25a} \cos\left(\frac{3\pi^2\hbar}{2m a^2} t\right)$$

Problema 2

- Normalización

$$1 = \int_0^\infty dx\, \psi^*(x,t)\psi(x,t) = \frac{|N|^2}{x_0^2}\int_0^\infty dx\, x^2 e^{-2x^2/x_0^2}$$

$$= (\text{usar dato con } a = 2/x_0^2) = \frac{x_0\sqrt{\pi}}{8\sqrt{2}} |N|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad N = \left(\frac{8}{x_0}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^{1/2} \quad \text{salvo fase arbitraria}$$

- $$\langle X \rangle_t = \int_0^\infty dx\, \psi^* x \psi = \frac{|N|^2}{x_0^2}\int_0^\infty dx\, x^3 e^{-2x^2/x_0^2}$$

$$= \frac{|N|^2}{x_0^2} \frac{1!}{2\left(\frac{2}{x_0^2}\right)^2} = |N|^2 \frac{x_0^2}{8} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x_0$$

- $\rho(x,t) = |\psi|^2 = \frac{|N|^2}{x_0^2} x^2 e^{-2x^2/x_0^2}$ es máxima en

$$\rho'(x_{max}, t) = 0 \iff e^{-2x^2/x_0^2}\left[2x - x^2 \frac{4x}{x_0^2}\right] = 0$$

$$\iff x_{max} = \frac{x_0}{\sqrt{2}}$$

Para que x_{max} sea realmente máximo se necesita

$\rho''(x_{max}, t) < 0$

Ahora bien

$$\rho'' = e^{-2x^2/x_0^2}\left[2 - \frac{12x^2}{x_0^2} + \left(2x - \frac{4x^3}{x_0^2}\right)\left(-\frac{4x}{x_0^2}\right)\right]$$

$$= e^{-2x^2/x_0^2}\left[2 - \frac{20x^2}{x_0^2} + \frac{16x^4}{x_0^4}\right]$$

$$\rho''\left(x = \frac{x_0}{\sqrt{2}}\right) = e^{-1}\left(2 - 10 + 4\right) < 0 \implies \text{Máximo}$$

Problema 3

Las condiciones de empalme son:

$x = -\frac{1}{\alpha}$

$$e^{-k/\alpha} = c\, e^{-1/2} \leftarrow \psi\left(\frac{1^-}{\alpha}\right) = \psi\left(\frac{1^+}{\alpha}\right)$$

$$k e^{-k/\alpha} = c\, e^{-1/2}\alpha \leftarrow \left\{ \begin{array}{l} \psi'\left(\frac{1^-}{\alpha}\right) = \psi'\left(\frac{1^+}{\alpha}\right) \\ (e^{kx})' = k e^{kx} \\ \left[c e^{-(\alpha x)^2/2}\right]' = c e^{-(\alpha x)^2/2}(-\alpha^2 x) \end{array} \right.$$

$x = \frac{1}{\alpha}$

$$c\, e^{-1/2} = e^{-k/\alpha} \leftarrow \psi\left(\frac{1}{\alpha}^-\right) = \psi\left(\frac{1}{\alpha}^+\right)$$

$$-c\alpha\, e^{-1/2} = -k e^{-k/\alpha} \leftarrow \psi'\left(\frac{1}{\alpha}^-\right) = \psi'\left(\frac{1}{\alpha}^+\right)$$

Se sigue que $k = \alpha$, $c = e^{-1/2}$. Para calcular V_0 usamos la ec. de Schrödinger independiente del tiempo en las zonas I y III:

Ejercicios del ALUMNO

APELLIDOS Soluciones 3	
NOMBRE	D.N.I. n.º
ASIGNATURA Física cuántica I	GRUPO C
CURSO N.º DE MATRICULA	FECHA 23.5.16

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

Zona I: $x < -\frac{1}{\alpha}$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}e^{kx} + V_0 e^{kx} = \frac{\hbar\omega}{2}e^{kx} \Longrightarrow$$

$$\Psi(x,t) = \phi(x)e^{-iEt/\hbar} \Rightarrow \frac{E}{\hbar} = \frac{\omega}{2}$$

$$= \phi(x)e^{-i\omega t/2}$$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V_0 = \frac{\hbar\omega}{2} \underset{k=\alpha}{\Longleftrightarrow} -\frac{\hbar^2\alpha^2}{2m} + V_0 = \frac{\hbar\omega}{2} \underset{\alpha=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}}{\Longrightarrow} V_0 = \hbar\omega$$

Zona III: $x > \frac{1}{\alpha}$. Por consistencia comprobamos que la solución obtenida para V_0 en zona I es consistente con la que se obtiene de la zona III. Pero esto es trivial, pues lo único que cambia es k por $-k$

1