UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA I
GRADO EN FÍSICA

Física cuántica I – Grupo E – 2014/15
Examen primera parte – 8 de Mayo de 2015

Nombre:______________________________ Firma:________________

Se recuerda que para aprobar la asignatura es necesario:

(1) Obtener al menos una calificación de 3 sobre 10 en cada una de las dos partes en las que se ha dividido la misma, y

(2) Que la media aritmética entre las dos partes sea igual o superior a 5 sobre 10.

Dicho lo cual, aquellos alumnos que aprueben el presente examen y deseen liberar la materia que comprende, pueden hacerlo. Recomendación: hacerlo sólo si la nota es superior a 7.

El tiempo para realizar el examen es de **1 hora hora 30 minutos**. Escriba las respuestas en el espacio indicado.

Cuestión 1 (1.5 puntos). En un experimento fotoeléctrico se observa que cuando se ilumina un metal con luz de frecuencia $1.94 \times 10^{15}\,\mathrm{s}^{-1}$ se necesita un potencial retardador de 0.73 V para que desaparezca la corriente. Si la luz incidente tiene frecuencia $2.91 \times 10^{15}\,\mathrm{s}^{-1}$ el potencial retardador pasa a ser 4.38 V. Determínese a partir de estos resultados experimentales el valor de la constante de Planck con cuatro cifras significativas. Calcúlese a partir de ellos la función de trabajo del metal. (Número 8 de la hoja de problemas)

$h = 6.029 \times 10^{-34}\ J s^{-1}$

$W_{\text{metal}} = 1.053 \times 10^{-18} J = 6.57\, eV$

Cuestión 2 (1.5 puntos). Calcúlese el conmutador $[X^2, P_X^2]$, donde X y P_X son los operadores posición y momento en la dirección del eje x.

$[X^2, P_X^2] = 2\hbar^2\left(1 + 2x\frac{\partial}{\partial x}\right)$

Si $[X^2, P^2] = 2i\hbar(XP + PX)$, también

Cuestión 3 (1.5 puntos). Una partícula se mueve en tres dimensiones. Su función de ondas en coordenadas esféricas es

$$\psi(\mathbf{x},t) = e^{-\mathrm{i}Et/\hbar}\, e^{-r^2/r_0^2}\,.$$

¿A qué distancia del origen es máxima la probabilidad de encontrar la partícula?

$$\boxed{r_{\max} = \frac{r_0}{\sqrt{2}}}$$

(Número 17 de la hoja de problemas)

Cuestión 4 (1.5 puntos). En un instante, que se toma como inicial, un sistema unidimensional se encuentra en el estado

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\phi_1(x) + \frac{2}{\sqrt{3}}\,\phi_2(x) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\phi_3(x)\,.$$

donde $\phi_n(x)$ son estados propios ortonormales del hamiltoniano con valores propios E_n. Escríbase la función de ondas en un tiempo $t > 0$.

$$\boxed{\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{3}}\, e^{-iE_1t/\hbar}\,\phi_1(x) + \frac{2}{\sqrt{3}}\, e^{-iE_2t/\hbar}\,\phi_2(x) + \frac{1}{\sqrt{3}}\, e^{-iE_3t/\hbar}\,\phi_3(x)}$$

Calcúlese la probabilidad de que al medir la energía en $t > 0$ se obtenga el valor E_2 y el estado en el que se queda el sistema después de la medida.

$$\boxed{\mathrm{Prob}(E_2) = \frac{4/3}{\|\psi\|^2} = \frac{4/3}{2} = \frac{2}{3}}$$

$$\boxed{\psi_{\text{después}}(x,t) = \phi_3(x) \times \text{fase arbitraria}}$$

Problema 5 (1+2+1 puntos). *En este problema es necesario entregar los cálculos. Las respuestas deben estar debidamente razonadas y redactadas con claridad.*

Se preparan 1000 copias idénticas de de un sistema cuántico consistente en una partícula que se mueve en un pozo infinito unidimensional de anchura a centrado en el origen. En el instante inicial el estado de cada uno de ellos está dado por la función de ondas

$$\psi(x,0) = \begin{cases} \dfrac{a^2}{4} - x^2 & \text{si} \quad |x| \le \dfrac{a}{2} \\ 0 & \text{si} \quad |x| \ge \dfrac{a}{2} \end{cases}\,.$$

(1) ¿Cuántas partículas se encuentran en el intervalo $[-a/4, 0]$ en $t = 0$?

(2) ¿Qué valores pueden obtenerse al medir la energía y con qué probabilidades en $t = 0$? ¿Y en $t > 0$?

(3) ¿Cuál es la incertidumbre en la posición y en el momento en $t = 0$?

(Número 28 de la hoja de problemas)

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA I
GRADO EN FÍSICA

Física cuántica I – Grupo E – 2014/15
Examen primera parte – 8 de mayo de 2015

Nombre:______________________________ Firma:________________

Se recuerda que para aprobar la asignatura es necesario:

(1) Obtener al menos una calificación de 3 sobre 10 en cada una de las dos partes en las que se ha dividido la misma, y

(2) Que la media aritmética entre las dos partes sea igual o superior a 5 sobre 10.

Dicho lo cual, aquellos alumnos que aprueben el presente examen y deseen liberar la materia que comprende, pueden hacerlo. Recomendación: hacerlo sólo si la nota es superior a 7.

El tiempo para realizar el examen es de **1 hora hora 30 minutos**. Escriba las respuestas en el espacio indicado.

Cuestión 1 (1.5 puntos). En un experimento fotoeléctrico se observa que cuando se ilumina un metal con luz de frecuencia $1.94 \times 10^{15}\,\mathrm{s}^{-1}$ se necesita un potencial retardador de $0.74\,\mathrm{V}$ para que desaparezca la corriente. Si la luz incidente tiene frecuencia $2.91 \times 10^{15}\,\mathrm{s}^{-1}$ el potencial retardador pasa a ser $4.44\,\mathrm{V}$. Determínese a partir de estos resultados experimentales el valor de la constante de Planck con cuatro cifras significativas. Calcúlese a partir de ellos la función de trabajo del metal.

$h = 6.111 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$

$W_{\mathrm{metal}} = 1.067 \times 10^{-18}\,\mathrm{J} = 6.67\,\mathrm{eV}$

Cuestión 2 (1.5 puntos). Calcúlese el conmutador $[X^2, H]$, donde X es el operador posición de un partícula que se mueve en el eje x y $H = P^2/2m + V(x)$ su hamiltoniano.

$[X^2, H] = \frac{\hbar^2}{m}\left(1 + 2x\frac{\partial}{\partial x}\right)$

Si $[X^2, H] = \frac{i\hbar}{m}(PX + XP)$, también

Cuestión 3 (1.5 puntos). Una partícula se mueve en tres dimensiones. Su función de ondas en coordenadas esféricas es

$$\psi(\mathbf{x}, t) = e^{-\mathrm{i}Et/\hbar}\, e^{-r/r_0}\,.$$

¿A qué distancia del origen es máxima la probabilidad de encontrar la partícula?

$r_{\max} =$ r_0

Cuestión 4 (1.5 puntos). En un instante, que se toma como inicial, un sistema unidimensional se encuentra en el estado

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\phi_3(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\phi_4(x) + \sqrt{\frac{3}{2}}\,\phi_5(x)\,.$$

donde $\phi_n(x)$ son estados propios ortonormales del hamiltoniano con valores propios E_n. Escríbase la función de ondas en un tiempo $t > 0$.

$\psi(x, t) =$ $\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-iE_3t/\hbar} \phi_3(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-iE_4t/\hbar} \phi_4(x) + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} e^{-iE_5t/\hbar} \phi_5(x)$

Calcúlese la probabilidad de que al medir la energía en $t > 0$ se obtenga el valor E_5 y el estado en el que se queda el sistema después de la medida.

$\mathrm{Prob}(E_5) =$ $\frac{3/2}{\|\psi\|^2} = \frac{3/2}{5/2} = \frac{3}{5}$

$\psi_{\text{después}}(x, t) =$ $\phi_5(x)$ × fase arbitraria

Problema 5 (4 puntos). *En este problema es necesario entregar los cálculos. Las respuestas deben estar debidamente razonadas y redactadas con claridad.*

Se preparan 1000 copias idénticas de de un sistema cuántico consistente en una partícula que se mueve en un pozo infinito unidimensional de anchura a centrado en el origen. En el instante inicial el estado de cada uno de ellos está dado por la función de ondas

$$\psi(x, 0) = \begin{cases} \dfrac{a^2}{4} - x^2 & \text{si} \quad |x| \le \dfrac{a}{2} \\ 0 & \text{si} \quad |x| \ge \dfrac{a}{2} \end{cases}\,.$$

(1) ¿Cuántas partículas se encuentran en el intervalo $[-a/4, 0]$ en $t = 0$?

(2) ¿Qué valores pueden obtenerse al medir la energía y con qué probabilidades en $t = 0$? ¿Y en $t > 0$?

(3) ¿Cuál es la incertidumbre en la posición y en el momento en $t = 0$?

En un experimento fotoeléctrico se observa que cuando se ilumina un metal con luz de frecuencia $9.70\times 10^{14}\,\mathrm{s}^{-1}$ se necesita un potencial retardador de 3 V para que desaparezca la corriente producida. Si la luz incidente tiene frecuencia $1.94\times 10^{15}\,\mathrm{s}^{-1}$ el potencial retardador pasa a ser 7 V. Determínese la función de trabajo del metal y la constante de Planck.

$$\left.\begin{aligned} h\nu_1 &= W + eV_1 \\ h\nu_2 &= W + eV_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow h(\nu_1-\nu_2) = e(V_1-V_2)$$

$$h = e\,\frac{V_1-V_2}{\nu_1-\nu_2}$$

$$\Rightarrow W = e\,\frac{V_1-V_2}{\nu_1-\nu_2}\,\nu_1 - eV_1$$

$$W = \frac{e}{\nu_1-\nu_2}\left[(\cancel{V_1}-V_2)\nu_1 - V_1(\cancel{\nu_1}-\nu_2)\right]$$

$$W = \frac{e}{\nu_1-\nu_2}(\nu_2 V_1 - V_2\nu_1)$$

Numéricamente,

$$h = 1.602\times 10^{-19}\,\frac{7-3}{0.97\times 10^{15}} = 6.607\times 10^{-34}\ \mathrm{Js}$$

$$W = \frac{1.602\times 10^{-19}}{0.97\times 10^{15}}(0.97\cdot 7 - 1.94\cdot 3)\cdot 10^{15}\ \mathrm{J} = 1\,\mathrm{eV}$$

Examen 8 Mayo 2015

$$\left.\begin{aligned} \nu_1 &= 1.94\times 10^{15}\,\mathrm{s}^{-1} & V_1 &= 0.73\,\mathrm{V} \\ \nu_2 &= 2.91\times 10^{15}\,\mathrm{s}^{-1} & V_2 &= 4.38\,\mathrm{V} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} h &= 6.0288\times 10^{-34}\ \mathrm{Js} \\ W &= 1.0526\times 10^{-18}\ \mathrm{J} \\ &= 6.57\ \mathrm{eV} \end{aligned}$$

Examen 8 mayo 2015

$$v_1 = 1.94 \times 10^{-15}\ s \qquad V_1 = 0.74\ V$$

$$v_2 = 2.91 \times 10^{-15}\ s \qquad V_2 = 4.44\ V$$

$$\Rightarrow \quad h = 6.1114 \times 10^{-34}\ J\ s^{-1}$$

$$W = 1.0671 \times 10^{-18}\ J$$

$$= 6.66\ eV$$

8 Mayo 2015   8 mayo 2015

2. $[X^2, P^2] = P[X^2,P] + [X^2,P]P = 2i\hbar\,(PX + XP)$

$[X^2,P] = X[X,P] + [X,P]X = Xi\hbar + i\hbar X = 2i\hbar X$

$PX\psi = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} x\psi = -i\hbar\left(\psi + x\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = -i\hbar + XP$

$[X^2,P^2] = 2i\hbar\,(-i\hbar + 2XP) = 2i\hbar\left(-i\hbar - 2i\hbar\, x \frac{\partial}{\partial x}\right)$

$= 2\hbar^2\left(1+2x\frac{\partial}{\partial x}\right)$

---

2. $[X^2,H] = \left[X^2, \frac{P^2}{2m} + V(x)\right] = \left[X^2, \frac{P^2}{2m}\right] = \frac{1}{2m}[X^2, PX]$

$= \frac{i\hbar}{m}\left(1+2x\frac{\partial}{\partial x}\right)$

---

3. Función de ondas sin normalizar. Si N es la norma,

$N^2 = \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi\; e^{-2r^2/r_0^2}$

se tiene

$P(r, r+\Delta r) = \int d\Omega \int_r^{r+\Delta r} dr\, \frac{1}{N^2}|\psi|^2$

$= \frac{4\pi}{N^2}\int_r^{r+\Delta r} r^2 dr\, e^{-2r^2/r_0^2} \simeq \frac{4\pi}{N^2} r^2 e^{-2r^2/r_0^2}\Delta r$

RECORDATORIO DE TEORIA

Probabilidad de encontrar la partícula en Δr entorno a r

$P(r) = \frac{4\pi}{N^2} e^{-2r^2/r_0^2} r^2 = \text{cnst} \times e^{-2r^2/r_0^2}$

$P(r)$ es máxima en

$$P'(r) = 0 \Leftrightarrow e^{-2r^2/r_0^2}\left(2r + r^2\left(-\frac{4r}{r_0^2}\right)\right) = 0$$

$$1 - 2\frac{r^2}{r_0^2} = 0 \Rightarrow r = +\frac{r_0}{\sqrt{2}}$$

---

3 $P(r) = \text{cnst} \times r^2 e^{-2r/r_0}$

$$P'(r) = 0 \Leftrightarrow e^{-2r/r_0}\left(2r + r^2\left(-\frac{2}{r_0}\right)\right) = 0$$

$$1 - \frac{r}{r_0} = 0 \Rightarrow r = r_0$$

5.5

(1) $P_{1\,\text{partícula}}\left(-\frac{a}{4}, 0\right) = \int_{-a/4}^{0} dx\, |\psi_{norm}|^2$

Normalización: $\int_{-a/2}^{a/2} dx\, |\psi|^2 = \int_{-a/2}^{a/2} dx \left(\frac{a^2}{4} - x^2\right)^2 =$

$$= \frac{a^4}{16}\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right) - \frac{a^2}{2}\frac{1}{3}\left(\frac{a^3}{8} + \frac{a^3}{8}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{a^5}{32} + \frac{a^5}{32}\right) = \frac{a^5}{30} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi_{norm}(x,0) = \frac{\sqrt{30}}{a^2\sqrt{a}}\,\psi(x,0)$$

$$P_1\,\text{part} = \frac{30}{a^5}\int_{-a/4}^{0} dx \left(\frac{a^2}{4} - x^2\right)^2 = 0.396$$

$$= \frac{30}{\cancel{a^5}}\left[\frac{a^4}{16}\frac{a}{4} - \frac{a^2}{2}\frac{1}{3}\left(\frac{a}{4}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{a}{4}\right)^5\right] = \frac{30}{64}\left(1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{5 \times 16}\right)$$

$$= \frac{203}{512} \simeq 0.396 \Rightarrow \boxed{\text{396 partículas se encuentran en } \left[-\frac{a}{4}, 0\right]}$$

(3) $$\langle x \rangle = \frac{30}{a^5} \int_{-a/2}^{a/2} dx \; x \left(\frac{a^2}{4} - x^2\right)^2 = 0$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{30}{a^5} \int_{-a/2}^{a/2} dx \; x^2 \left(\frac{a^2}{4} - x^2\right)^2 = \dots = \frac{a^2}{28}$$

$$\langle P \rangle = \frac{30}{a^5} \int_{-a/2}^{a/2} dx \left(\frac{a^2}{4} - x^2\right) (-i\hbar) \underbrace{\frac{d}{dx}\left(\frac{a^2}{4} - x^2\right)}_{-2x} = 0$$

$$\langle P^2 \rangle = -\hbar^2 \frac{30}{a^5} \int_{-a/2}^{a/2} dx \left(\frac{a^2}{4} - x^2\right)(-2) = 10 \frac{\hbar^2}{a^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \langle x^2 \rangle_0 - \langle x \rangle_0^2 &= (\Delta x)_0^2 = \frac{a^2}{28} \\ \langle P^2 \rangle_0 - \langle P \rangle_0^2 &= (\Delta P)_0^2 = 10 \frac{\hbar^2}{a^2} \end{aligned}}$$

(2) $$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-iE_n t/\hbar} \phi_n(x)$$

$$\phi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) & n = 1,3,5,\dots \text{ impar} \\ \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) & n = 2,4,6,\dots \text{ par} \end{cases} \qquad \langle \phi_n | \phi_m \rangle = \delta_{nm}$$

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + V_0$$

↳ Puede tomarse 0 sin pérdida de generalidad.

RECORDATORIO DE TEORIA

$$c_n = \langle \psi(x,0) | \phi_n \rangle$$

c_n, n par = integral de función impar sobre intervalo simétrico = 0

$$c_n,\ n \text{ impar} = [n = 2k+1,\quad k=0,1,2,\dots] = c_{2k+1}$$

$$= \int_{-a/2}^{a/2} dx \sqrt{\frac{30}{a^5}} \left(\frac{a^2}{4} - x^2\right) \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\left[\frac{(2k+1)\pi x}{a}\right] = \left[y = \frac{\pi x}{a}\right]$$

$$= \frac{2\sqrt{15}}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dy \left(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{\pi^2}\right) \cos[(2k+1)y]$$

$$= \frac{2\sqrt{15}}{\pi} \left\{ \underbrace{\frac{1}{4(2k+1)} \sin[(2k+1)y] \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}}_{\frac{1}{2(2k+1)}(-1)^k} - \underbrace{\frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dy\, \overbrace{y^2 \cos[(2k+1)y]}^{\text{par}}}_{I} \right\}$$

$$I = \text{por partes dos veces} = \left\{ \begin{array}{l} u = y^2 \quad du = 2y\,dy \\ dv = \cos[(2k+1)y]\,dy \Rightarrow v = \dfrac{\sin[\ ]}{2k+1} \end{array} \right\}$$

$$= -\frac{2}{\pi^2} \left\{ \frac{y^2 \sin[(2k+1)y]}{(2k+1)} \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2y\,dy \frac{\sin[(2k+1)y]}{2k+1} \right\}$$

$$= -\frac{2}{\pi^2} \frac{\pi^2}{4} \frac{(-1)^k}{2k+1} + \frac{4}{\pi^2(2k+1)} \int_0^{\pi/2} dy\, y \sin[(2k+1)y]$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = y \Rightarrow du = dy \\ dv = \sin[(2k+1)y]\,dy \Rightarrow v = -\dfrac{\cos[(2k+1)y]}{2k+1} \end{array} \right\}$$

$$= -\frac{(-1)^k}{2(2k+1)} + \frac{4}{\pi^2(2k+1)} \left\{ - \cancelto{0}{\frac{y \cos[(2k+1)y]}{2k+1}} \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos[(2k+1)y]}{2k+1} \right\}$$

$$= -\frac{(-1)^k}{2(2k+1)} + \frac{4}{\pi^2(2k+1)} \left.\frac{\sin[(2k+1)y]}{(2k+1)^2}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= -\frac{(-1)^k}{2(2k+1)} + \frac{4}{\pi^2}\frac{(-)^k}{(2k+1)^3}$$

$$c_{n=2k+1} = \frac{2\sqrt{15}}{\pi}\frac{4}{\pi^2}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{8\sqrt{15}}{\pi^3}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$$

Al medir la energía pueden obtenerse los valores

$$E = \frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{(2k+1)\pi}{a}\right]^2 \text{ con probabilidades } \left|\frac{8\sqrt{15}}{\pi^3}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}\right|^2$$

$\updownarrow$

corresponde a $n =$ impar

$\phi_n(x)$ par