UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA I
GRADO EN FÍSICA

Física cuántica I – Problemas

1. Sabiendo que la radiancia espectral medida en una cavidad radiante es $c/4$ de la densidad $u(\nu, T)$ de energía por unidad de tiempo, demuéstrese la ley de Stefan-Boltzmann a partir de la fórmula de Planck para $u(\nu, T)$.

Dato. Se sabe que

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}\, dx = \frac{\pi^4}{15}\,.$$

2. Sabiendo que la ecuación $5(e^x - 1) = xe^x$ tiene como solución $x = 4.9651...$, dedúzcase la ley de Wien que relaciona la longitud de onda para la que la radiancia espectral es máxima con la temperatura del cuerpo negro.

3. El Sol tiene una masa de $M_\odot = 2.989 \times 10^{30}$ kg y un radio $R_\odot = 6.96 \times 10^8$ m, y emite aproximadamente como un cuerpo negro a 5700 K. ¿Qué energía es emitida cada año en forma de radiación? ¿Qué fracción de la masa solar representa esta energía?

4. La constante solar se define como la anergía que llega del Sol por unidad de tiempo y de área en incidencia normal sobre la superficie terrestre. Su valor es $C_\odot = 0.0323$ cal cm^{-2} s^{-1}. Suponiendo que los rayos inciden paralelos entre sí, calcúlese la cantidad media de energía solar Q que incide por unidad de área y de tiempo sobre la superficie terrestre. Si la Tierra se comportase como un cuerpo negro ¿cúal debería ser su temperatura para que emitiera la misma energía?

5. Una cavidad tiene una distribución de energía correspondiente al cuerpo negro. En su superficie se hace un agujero circular de 0.1 mm de diámetro. Encuéntrese la potencia radiada a través del mismo con longitud de onda comprendida entre 5500 Å y 5510 Å. La temperatura es 6000 K.

6. Un miliwatio de luz de longitud de onda 4560 Å incide sobre una superficie de cesio. Calcúlese la corriente de electrones liberada y el potencial de frenado suponiendo una eficacia del 1% para el proceso. Tómese como función de trabajo del cesio 1.93 eV.

7. En un experimento fotoeléctrico se observa que cuando se ilumina un metal con luz de frecuencia 9.70×10^{14} s^{-1} se necesita un potencial retardador de 3 V para que desparezca la corriente. Si la luz incidente tiene frecuencia $1.94 \times 10^{15}\,\mathrm{s}^{-1}$ el potencial retardador pasa a ser 7 V. Determínese la función de trabajo del metal y la constante de Planck.

8. En un experimento de dispersión Compton incide radiación de longitud de onda 1 Å sobre un electrón en reposo. Se observa radiación dispersada en la dirección perpendicular a la de incidencia. Calcúlese su longitud de onda y el ángulo de retroceso del electrón.de Planck.

9. [El problema pretende ilustrar algunas de las diferencias entre rayos X y rayos γ] Considérese un haz de rayos X con longitud de onda $\lambda = 1$ Å que incide sobre electrones libres en reposo (dispersión Compton). Para radiación dispersada a 90° de la dirección de incidencia se pide:

(a) La longitud de onda del haz dispersado.

(b) La energía cinética comunicada al electrón.

(c) El porcentaje de energía perdida por el fotón.

Repítase el problema para una longitud de onda $\lambda = 1.88 \times 10^{-2}$ Å (que corresponde a rayos γ).

10. [Liboff 2.32] La ecuación de Schrödinger para una partícula en una dimensión sometida a un cierto potencial admite, entre otras, las siguientes tres soluciones:

$$\begin{aligned}
\psi_1(x,t) &= e^{-\mathrm{i}E_1 t/\hbar}\, e^{-x^2/4}\,,\\
\psi_2(x,t) &= e^{-\mathrm{i}E_2 t/\hbar}\, x\, e^{-x^2/8}\,,\\
\psi_3(x,t) &= \psi_1(x,t) + \psi_2(x,t)\,,
\end{aligned}$$

con $-\infty < x < \infty$. Normalícense las tres funciones de onda. Calcúlese la probabilidad de encontrar la partícula en el intervalo $[0,1]$ cuándo ésta se encuentra en el estado descrito por ψ_3. Compárese el resultado con la suma de las probabilidades de encontrarla en el mismo intervalo para los estados descritos por ψ_1 y ψ_2. Repítase el ejercicio para el intervalo $[-1,1]$.

11. [Liboff 2.34] Se prepara una muestra de 1000 electrones, todos con función de ondas

$$\psi(x,t) = e^{\mathrm{i}\omega t}\, e^{-|x|}\, \cos(\pi x)\,.$$

En el instante $t = t'$ se realiza una medida para determinar sus posiciones. ¿Cuántos de ellos se encontrarán aproximadamente en el intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$?

12. Calculénse las incertidumbres Δx y Δp para el paquete de ondas libre gaussiano y estudiése el producto $\Delta x\, \Delta p$.

Ayuda. Para hallar la incertidumbre Δp es necesario evaluar $\langle p^2 \rangle$. Para hacer esto último es conveniente integrar por partes unaz vez, de forma que

$$\begin{aligned}
\langle p^2 \rangle &= -\hbar^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \psi^* \frac{d^2\psi}{dx^2}\\
&= -\hbar^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \left[\frac{d}{dx}\left(\psi^* \frac{d\psi}{dx}\right) - \frac{d\psi^*}{dx}\,\frac{d\psi}{dx}\right]\\
&= \text{el primer término se anula pues } \psi(x,t) \to 0 \text{ para } x \to \pm\infty\\
&= \hbar^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \left|\frac{d\psi}{dx}\right|^2 .
\end{aligned}$$

13. Considérese el paquete de ondas unidimensional para una partícula libre

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \phi(k)\, e^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}\,, \quad \omega = \frac{\hbar k^2}{2m}\,,$$

con

$$\phi(k) = \begin{cases} N & \text{si } -K \leq k \leq K \\ 0 & \text{en caso contario} \end{cases}\,,$$

Demuéstrese que aunque la función de ondas tiene norma finita, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\psi(x,t)|^2 = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dk\, |\phi(k)|^2 < \infty\,,$$

el valor esperado de X^2 no existe. Esto significa, en sentido estricto, que dicho paquete no es aceptable. Búsquese, a pesar de ello, un argumento para estimar la anchura del paquete en $t = 0$.

14. Considérese el paquete de ondas unidimensional para una partícula libre

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \phi(k)\, e^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}\,, \quad \omega = \frac{\hbar k^2}{2m}\,,$$

con

$$\phi(k) = \frac{N}{\beta^2 + k^2}\,, \quad \beta = \text{const.}$$

Calcúlese $\psi(x,0)$ y las incertidumbres Δx y Δp para $t = 0$. Estudiése su producto.

15. [Gasiorowicz , ejemplo 2-4] Considérese una partícula que se mueve en un potencial. Se sabe que se encuentra en un estado estacionario

$$\psi(x,t) = e^{-\mathrm{i}Et/\hbar}\, \phi(x)\,,$$
$$\phi(x) = 0 \;\text{ si }\; -\infty < x < 0\,, \qquad \phi(x) = 2\alpha\sqrt{\alpha}x\, e^{-\alpha x} \;\text{ si }\; 0 < x < \infty\,,$$

con α una constante real positiva con dimensiones de $(\text{longitud})^{-1}$.

(a) ¿Dónde es máxima la densidad de probabilidad?
(b) Hállese la probabilidad de que la partícula se encuentre entre 0 y $1/\alpha$.
(c) Calcúlese los valores esperados de x, x^2, la energía cinética y la energía potencial.
(d) Si se escribe

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \varphi(k)\, e^{\mathrm{i}kx}\,,$$

calcúlese $\varphi(k)$.

16. Calcúlese, utilizando $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$, los conmutadores $[X^n, P]$ y $[X, P^n]$, donde X y P son los operadores poisición y momento en una dimensión y n un entero positivo.

17. Una partícula en tres dimensiones está sometida a un potencial central $V(r)$. Se sabe que su función de ondas es

$$\psi(\mathbf{x},t) = e^{-\mathrm{i}Et/\hbar}\, e^{-r/r_0}\,, \qquad r = |\mathbf{x}|$$

Determínese para que valor de r es máxima la probabilidad de encontrar la partícula.

Nota. Recuérdese que la probabiliedad de encontrar la partícula en el volumen d^3x en torno a $\mathbf{x}$ es $|\psi|^2 d^3x$. Por tanto la probabilidad de encontrar la partícula entre r y $r+dr$ con dirección arbitraria es $P(r)dr$, con

$$P(r) = r^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \; |\psi(r,\theta,\phi,t)|^2$$

Esta es la cantidad cuyo máximo hay que calcular.

18. [Ver, por ejemplo, Griffiths 2-1] Considérese un estado estacionario

$$\psi(x,t) = e^{-\mathrm{i}Et/\hbar}\, \phi(x)\,. \tag{1}$$

(1) Demuéstrese que, si $V(-x) = V(x)$, la función $\phi(x)$ siempre puede tomarse como una función par o impar. Para ello basta probar que $\phi(x) \pm \phi(-x)$ son soluciones de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo.

(2) Demuéstrese que $\phi(x)$ siempre puede tomarse real. Para ello basta ver que $\phi + \phi^*$ e $\mathrm{i}(\phi - \phi^*)$ son soluciones de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo.

(3) Hasta ahora siempre se ha supuesto que E es real. Este apartado muestra que efectivamente esto es así. Pruébese que la conservación de probabilidad, en su sentido más básico,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \; |\psi|^2 = 1\,, \tag{2}$$

implica que E es real. Tómese para ello $E = E_0 + \mathrm{i}\Gamma$, con E_0 y Γ reales, y demuéstrese que $\Gamma \neq 0$ es incompatible con (2).

19. [Ver, por ejemplo, Griffiths 2-2] Demuéstrese que no existen soluciones de tipo estacionario (1) a la ecuación de Schrödinger con $E < \min\{V(x)\}$.

Ayuda. Por reducción al absurdo. Úsese integración por partes y la ecuación de Schrödinger para llegar a $\int dx\, |\psi'|^2 < 0$, lo cual es imposible.

20. [Difícil] Para fijar la "normalización de una onda plana" en una dimensión se exige que la densidad de probabilidad relativa del momento sea igual a $1/2\pi\hbar$, es decir que

$$m\,\frac{dJ}{dp} = \frac{1}{2\pi\hbar}\,. \tag{3}$$

Nótese que en una dimensipn mJ es la probabilidad por unidad longitud de que la partícula viaje con momento p. Por tanto, $m\,\dfrac{dJ}{dp}$ es la probabilidad por unidad de longitud y de momento. En este problem se justifica por qué se exige la condición (3).

Empezamos trabajando en una caja de longitud L finita y luego tomaremos el límite $L \to \infty$. Para garantizar onda planas que puedan viajar hasta $\pm\infty$ cuando $L \to \infty$, se imponen condiciones de contorno periódicas para la funciónde ondas y su derivada, de forma que el problema de Schrödinger que hay que resolver es

$$\left.\begin{array}{ll} \mathrm{i}\hbar\,\dfrac{\partial\psi}{\partial t} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\,\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\,, & t>0\,, \quad -\dfrac{L}{2}\le x\le\dfrac{L}{2} \\ \psi\Big(-\dfrac{L}{2}\,,t\Big) = \psi\Big(\dfrac{L}{2}\,,t\Big) & \\ \psi'\Big(-\dfrac{L}{2}\,,t\Big) = \psi'\Big(\dfrac{L}{2}\,,t\Big) & \end{array}\right\}\,,$$

donde la prima indica derivada con respecto a x. Encuéntrense los estados ligados; es decir los estados propios de este problema de contorno. Pruébese que los autovaloares para el operador $P = -\mathrm{i}\hbar\partial_x$ son $p = n/2\pi\hbar$, con n un entero arbitrario. Demuéstrese que en el intervalo $[p, p+dp]$ hay $N = Ldp/2\pi\hbar$ momentos permitidos. Estos son los úncios valores permitidos para el momento. Se sigue entonces que el número de momentos por unidad de momento y de longitud (es decir, la densidad de momentos por unidad de momento) es $N/Ldp = 1/2\pi\hbar$, que permanece constante cuando $L\to\infty$, tal y como se quería probar.

21. Demuéstrese que la densidad de corriente de probabilidad $\mathbf{J}(\mathbf{x},t)$ para estados estacionarios es (i) cero para estados no degenerados y (ii) [difícil] distinta de cero en general para estados degenerados.

22. Dada una partícula en un potencial unidimensional

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{si} \quad x<0 \\ 0 & \text{si} \quad 0<x<a \\ V_0 & \text{si} \quad x\ge a \end{cases}\,,$$

con V_0 positivo,

(a) Descríbanse cualitativamente las soluciones estacionarias en función de la energía.
(b) Hallar V_0 para que existan soluciones de energía $E = V_0/2$.
(c) Calcúlese para las soluciones del apartado anterior la probabilidad de que la partícula se encuentre en la zona $x>a$.

23. [Examen 25/06/2014] Se considera una partícula en un potencial unidimensional $V(x)$ definido por $V=0$ si $x<-a$; $V=V_0$ positivo si $-a<x<0$, y $V=\infty$ si $x>0$. Se supone que la partícula incide desde $x=-\infty$ en forma de onda plana representada por $\exp(ikx)$ con $k>0$. Supóngase un estado estacionario con energía $E=\hbar^2k^2/2m > V_0$.

(a) Formúlense las condiciones que debe satisfacer la función de onda en $x=-a$ y en $x=0$.
(b) Obtener el estado estacionario correspondiente en todo x.
(c) Hállense las densidades de corriente de probabilidad en $x<-a$.
(d) Calcúlese el coeficiente de reflexión. Explíquese el resultado.

24. [Gasiorowicz 4-4] Descríbanse las soluciones estacionarias con energía E y las condiciones de empalme para la función de onda y su derivada para los siguientes potenciales unidimensionales $V(x)$.

(a) $V(x)$ dado por $V = 0$ si $x < a$; $V = V_0$ positivo si $a < x < b$; $V = 0$ si $b < x < c$; $V = -V_1$ negativo si $c < x < d$; y $V = 0$ si $x > d$. Tómese $0 < E < V_0$ y supóngase una partícula que incide desde la izquierda.

(b) $V(x)$ dado por $V = \infty$ si $x < 0$; $V = 0$ si $0 < x < a$; $V = V_0$ positivo si $a < x < b$; y $V = 0$ si $x > b$. Supóngase $E < V_0$ y que la partícula incide desde la derecha.

25. [Gasiorowicz 3-7] Considérese un electrón en un pozo infinito unidimensional de achura desconocida. El electrón puede puede transitar entre dos estados contiguos emitiendo fotones. Si la mayor longitud de onda de los fotones emitidos es 4500 Å, cálculese la anchura del pozo.

26. [Gasiorowicz, ejemplos 3-2 y 3-3] Considérese un electrón en un pozo infinito unidimensional de anchura 1 mm. El electrón se encuentra en un estado ligado de energía 0.01 eV. Estímese el número cuántico n de dicho estado. Estímese el número de estados con energía comprendida en un intervalo 10^{-4} eV en torno a 0.01 eV.

27. [Gasiorowicz, ejemplo 3-5; modificado conforme los convenios usados en clase para el pozo infinito y para tener en cuenta la evolución temporal]. Una partícula de masa m se mueve en un pozo infinito unidimensional de anchura a centrado en $x = 0$. Se sabe que su función de ondas en el instante inicial es

$$\psi(x,0) = \begin{cases} x + \dfrac{a}{2} & \text{si} \quad -\dfrac{a}{2} \leq x < 0 \\ -x + \dfrac{a}{2} & \text{si} \quad 0 < x \leq \dfrac{a}{2} \end{cases} .$$

Calcúlese la función de ondas en un instante arbitrario t. Determínense los valores que pueden obtenerse al medir la energía de la partícula y la probabilidad con que se pueden obtener.

28. [Liboff 5-2] Mil neutrones se encuentran en un pozo infinito unidimensional de anchura a centrado en el origen, cada uno de ellos con función de ondas inicial dada por

$$\psi(x,0) = \begin{cases} \dfrac{a^2}{4} - x^2 & \text{si} \quad |x| \leq \dfrac{a}{2} \\ 0 & \text{si} \quad |x| \geq \dfrac{a}{2} \end{cases} .$$

(1) ¿Cuántos neutrones se encuentran en el intervalo $[-a/4, 0]$ en $t = 0$?
(2) ¿Cuántos tienen energía E_5 en $t = 0$?
(3) ¿Cuál es el valor esperado de la energía en $t = 0$?
(4) ¿Cuál es el estado de un neutrón en un instante t arbitrario?

29. Se preparan 100 copias de un sistema, todas en el mismo estado, consistente en un electrón en un pozo infinito unidimensional de longitud a. Se sabe que al medir la energía se obtiene el valor E_1 64 veces y el valor E_2 36 veces. Encuéntrese una función de ondas que reproduzca estos resultados. ¿En cuántos sistemas se encuentra el electrón en la mitad izquierda de la caja en $t = 0$? Utilícese la función de ondas encontrada para calcular la densidad de electrones en un tiempo t posterior.

30. Considérese un oscilador armónico centrado en el origen de frecuencia angular ω. Demuéstrese que

$$\psi(x,t) = e^{-\mathrm{i}Et/\hbar}\left[c\,\phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\phi_1(x) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\phi_2(x)\right], \qquad \alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,,$$

con c un coeficiente real y ϕ_0, ϕ_1 y ϕ_2 las autofunciones de los estados fundamental, primer y segundo excitado, no es solución de la ecuación de Schrödinger. Tómese en su lugar

$$\chi(x,t) = \left[e^{-\mathrm{i}E_0t/\hbar}\,c\,\phi_0(x) + e^{-\mathrm{i}E_1t/\hbar}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,\phi_1(x) + e^{-\mathrm{i}E_2t/\hbar}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\,\phi_2(x)\right]$$

y compruébese que χ es solución de la ecuación de Schrödinger para todo c. Supóngase que $\chi(x,t)$ describe un estado físico del sistema, es decir, de norma 1. Hállese el valor esperado del Hamiltoniano en χ. ¿Depende de c?

31. [Examen 2014/15] En un instante, que se toma como inicial, un sistema unidimensional viene descrito pot la función de ondas

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\phi_1(x) + \frac{2}{\sqrt{3}}\,\phi_2(x) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\phi_3(x)\,.$$

donde $\phi_n(x)$ son estados propios ortonormales del hamiltoniano con valores propios E_n. Escríbase la función de ondas en un tiempo $t > 0$. Calcúlese la probabilidad de que al medir la energía en $t > 0$ se obtenga el valor E_2. ¿En qué estado se queda el sistema tras la la medida.

32. Calcúlese en el problema anterior la incertidumbre en la energía en un tiemepo t en términos de E_1, E_2 y E_3.

33. En el instante inicial un oscilador armónico unidimensional se encuentra en el estado

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\phi_0(x) + \phi_1(x)\right],$$

donde ϕ_n son las autofunciones normalizadas correspondientes al estado n-ésimo.

(a) Hállense los valores esperados de X y P y sus incertidumbres en el estado $\psi(x,t)$.

(b) Considérese ahora

$$\chi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{-\mathrm{i}E_nt/\hbar}\phi_n(x) + e^{-\mathrm{i}E_mt/\hbar}\phi_m(x)\right].$$

Calcúlese $\langle X\rangle_\chi$ para n y m arbitrarios.

34. Demuéstrese que los valores esperados de la energía cinética $\langle T\rangle_n$ y el de la a energía potencial $\langle V\rangle_n$ en el estado n-ésimo del oscilador armónico unidimensional son ambos iguales a $\hbar\omega(2n+1)/4$.

35. Dos observables A y B, están descritos por operadores autoadjuntos que denotamos por las mismas letras A y B. El operador A tienen autoestados normalizados $|\alpha_1\rangle$ y $|\alpha_2\rangle$ con autovalores a_1 y a a_2. El B autoestados normalizados $|\beta_1\rangle$ y $|\beta_2\rangle$ con autovalores b_1 y b_2,

$$A|\alpha_i\rangle = a_i|\alpha_i\rangle\,, \qquad B|\beta_i\rangle = b_i|\beta_i\rangle\,, \qquad i = 1,2.$$

Los autoestados están relacionados mediante

$$|\alpha_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}\big(|\beta_1\rangle + 3|\beta_2\rangle\big)\,, \qquad |\alpha_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}\big(3|\beta_1\rangle - |\beta_2\rangle\big)\,.$$

El sistema se encuentra en un estado $|\psi\rangle$. Se mide el observable A y se obtiene el autovalor a_1. A continuación se mide el observable B y nuevamente el A. ¿Cuál es la probabilidad de que vuelva a obtenerse a_1?

36. Demuéstrese que si un operador A es autoadjunto, entonces el valor esperado $\langle A^2\rangle_f \geq 0$ para todo vector $|f\rangle$ del espacio de Hilbert correspondiente.

37. Dos operadores autoadjuntos A y B satsifacen $[A, B] = \mathrm{i}\lambda\mathbf{1}$, donde λ es una constante real y $\mathbf{1}$ es el operador identidad. Demuéstrese que ninguno de ellos tiene estados ligados.

38. Dos operadores A y B autoadjuntos conmutan, $[A, B] = 0$. Demuéstrese que A y B tiene autovectores comunes.

39. Considérese un sistema cuántico con hamiltoniano

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

¿Cuántos estados estacionarios tiene el sistema? Calcúlense. Supóngase un observable A descrito por

$$A = \theta \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

¿Por qué A puede describir un observable? Y $B = \mathrm{i}A$ ¿puede describir un observable? ¿Cuáles son los posibles valores que pueden obtenerse en una medida de A? ¿Existe algún estado en el que pueda medirse con certidumbre la energía y el observable descrito por A? Se realizan dos medidas de A separadas por un tiempo t. Si el resultado para la primera es $\sqrt{2}\theta$, en qué estado se encuentra el sistema después de la medida. Determínese el valor esperado para la segunda medida.

40. Considerérese en coordendas esféricas (r, θ, ϕ) los operadores

$$R\psi = r\psi\,, \qquad P_r\psi = -\mathrm{i}\hbar\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\psi\,,$$

donde $\psi = \psi(r, \theta, \phi)$. ¿Son simétricos? Calcúlese $[R, P_r]$.

41. El operador momento angular está dado por $\mathbf{L} = \mathbf{X} \wedge \mathbf{P}$, donde $\mathbf{X}$ y $\mathbf{P}$ son los operadores posición y momento. Sus componentes son

$$L_x = -\mathrm{i}\hbar\,(y\partial_z - z\partial_y)\,, \qquad L_y = -\mathrm{i}\hbar\,(z\partial_x - x\partial_z)\,, \qquad L_z = -\mathrm{i}\hbar\,(x\partial_y - y\partial_x)\,,$$

o, en notación más concisa, $L_i = -\mathrm{i}\hbar\,\epsilon_{ijk}\,x_j\partial_k$. Demuéstrese que $\mathbf{L}$ es un operador simétrico. Demuéstrese que

$$[L_x, L_y] = \mathrm{i}\hbar L_z\,, \qquad [L_y, L_z] = \mathrm{i}\hbar L_x\,, \qquad [L_z, L_x] = \mathrm{i}\hbar L_y\,.$$

Estas tres ecuaciones suelen escribirse $[L_i, L_j] = \mathrm{i}\hbar\,\epsilon_{ijk}L_k$. Compruébese que

$$[\mathbf{L}^2, L_x] = [\mathbf{L}^2, L_y] = [\mathbf{L}^2, L_z] = 0\,.$$

Al pasar a coordenadas esféricas (r, θ, ϕ), una función $f(x, y, z)$ se convierte en una función $f(r, \theta, \phi)$. Como ϕ y $\phi + 2\pi$ describen el mismo punto, la función f debe ser periódica en ϕ con período 2π, es decir,

$$f(r, \theta, \phi) = f(r, \theta, \phi + 2\pi)\,.$$

Demuéstrese que en estas coordenadas, la componente z del momento angular toma la forma

$$L_z = -\mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial}{\partial\phi}\,,$$

que también se denota como L_ϕ. Encuéntrense los autoestados del L_z en el espacio de funciones $\{g\colon [0, 2\pi] \to \mathbf{C},\ g(0) = g(2\pi)\}$.

42. Una partícula se mueve en tres dimensiones sometida un potencial central. Se sabe que se encuentra en un estado estacionario de energía E dado en coordenadas esféricas por la función de ondas normalizada

$$\psi(r, \theta, \phi, t) = \frac{3}{2}\Big(\frac{r_0^3}{\pi}\Big)^{1/2}\,\frac{1}{r^3 + r_0^3}\,\sin\theta\,\sin\phi\,e^{\mathrm{i}Et/\hbar}\,, \qquad \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}, \qquad \begin{cases} 0 < r < \infty \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \phi < 2\pi \end{cases},$$

donde r_0 es una constante característica del potencial con dimensiones de longitud. Calcúlense las incertidumbres en la coordenda ϕ de la posición y en la componente L_z del momento angular. Razónese si es posible medir con certidumbre total ambas magnitudes.

43. El operador paridad, llamémosle $\mathcal{P}$, actúa sobre una función de ondas cambiando $\mathbf{x}$ por $-\mathbf{x}$, es decir,

$$\mathcal{P}\psi(\mathbf{x}, t) = \psi(-\mathbf{x}, t)\,. \tag{4}$$

Demuéstrese que los autovalores de $\mathcal{P}$ son $+1$ y -1, que sus autofunciones son las funciones par e impar y que éstas son ortogonales. Escríbase la ec. (4) en coordenadas esféricas. ¿Conmuta $\mathcal{P}$ con L_z? Si una partícula está sometida a un potencial central ¿conmuta el hamiltoniano con $\mathcal{P}$?

44. [Relación de incertidumbre generalizada. Cuestión teórica. Puede encontrarse en cualquier libro. Ver, por ejemplo, Griffiths, apartado 3.4.1]. Sean A y B dos observables cualesquiera de un sistema cuántico que se encuentra en un estado $|\psi\rangle$. Los operadores pueden conmutar o no. Si $a = \langle\psi|A|\psi\rangle$ y $b = \langle\psi|B|\psi\rangle$ denotan los valores esperados de A y B en $|\psi\rangle$, usando que A y B son atudoadjuntos, las incertidumbres en A y B pueden escribirse

$$(\Delta A)^2 = \langle\psi|\,(A - a)^2\,|\psi\rangle = \langle\varphi_A|\varphi_A\rangle\,, \qquad (\Delta B)^2 = \langle\psi|\,(B - b)^2\,|\psi\rangle = \langle\varphi_B|\varphi_B\rangle\,,$$

donde $|\varphi_A\rangle$ y $|\varphi_B\rangle$ son los vectores

$$|\varphi_A\rangle = (A - a)\,|\psi\rangle\,, \qquad |\varphi_B\rangle = (B - b)\,|\psi\rangle\,.$$

De aquí se sigue que

$$(\Delta A)^2\,(\Delta B)^2 = \langle\varphi_A|\varphi_A\rangle\;\langle\varphi_B|\varphi_B\rangle\,.$$

Según la desigualdad de Schwarz,

$$(\Delta A)^2\,(\Delta B)^2 \geq \big|\langle\varphi_A|\varphi_B\rangle\big|^2 = \langle\varphi_A|\varphi_B\rangle\,\langle\varphi_B|\varphi_A\rangle\,.$$

Demuéstrese que

$$\langle\varphi_A|\varphi_B\rangle = \langle\psi|AB|\psi\rangle - ab\,, \qquad \langle\varphi_B|\varphi_A\rangle = \langle\psi|BA|\psi\rangle - ab\,,$$

y, a partir de aquí, que

$$\Delta A\,\Delta B \geq \frac{1}{2}\left|\langle\psi|\,[A,B]\,|\psi\rangle\right|. \tag{5}$$

45. Demuéstrese utilizando la relación de incertidumbre generalizada (5) que no pueden existir estados en los que la incertidumbre en L_x y L_y sea cero simultáneamente.

46. Dado un oscilador armónico tridimensional con potencial

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\,(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2)$$

Si $\omega_1 = \omega_2 = 2\omega_3$ Calcúlese la degeneración para la energía $E = 11/2\ \hbar\omega_3$.

47. Se definen los operadores escalón $L_\pm$ para el momento angular como

$$L_\pm = L_x \pm \mathrm{i}L_y\,.$$

Por ser $\mathbf{L} = (L_x, L_y, L_z)$ autoadjunto, $L_\pm$ no lo son, sino que satisfacen

$$L_+^\dagger = L_-\,.$$

Demuéstrese que

$$[L_z, L_\pm] = \pm\hbar L_\pm\,, \qquad [\mathbf{L}^2, L_\pm] = 0\,, \qquad [L_+, L_-] = 2\hbar L_z\,. \tag{6}$$

Demuéstrese que

$$L_-L_+ = \mathbf{L}^2 - L_z^2 - \hbar\,L_z\,, \qquad L_+L_- = \mathbf{L}^2 - L_z^2 + \hbar\,L_z\,. \tag{7}$$

Considérese un autoestado simultáneo $|\ell, m\rangle := \mathcal{Y}_\ell^m(\theta,\varphi)$ de $\mathbf{L}^2$ y L_z, es decir, que satisface

$$\mathbf{L}^2|\ell, m\rangle = \hbar^2\,\ell(\ell+1)\,|\ell, m\rangle\,, \qquad L_z|\ell, m\rangle = \hbar\,m\,|\ell, m\rangle\,.$$

Demuéstrese usando las reglas de conmutación (6) que

$$\mathbf{L}^2\big(L_\pm|\ell, m\rangle\big) = \hbar^2\,\ell(\ell+1)\,\big(L_\pm|\ell, m\rangle\big)\,, \qquad L_z\big(L_\pm|\ell, m\rangle\big) = \hbar\,(m\pm 1)\,\big(L_\pm|\ell, m\rangle\big)\,.$$

Es decir, $L_\pm|\ell\,,m\rangle$ es autoestado de $\mathbf{L}^2$ con el mimso autovalor que $|\ell,m\rangle$, y también lo es de L_z, pero con autovalor $\hbar\,(m\pm 1)$. Puede escribirse por tanto que

$$L_\pm|\ell\,,m\rangle = \hbar\, C_{(\pm)\ell m}\,|\ell\,,m\pm 1\rangle\,,$$

con $C_{(\pm)\ell m}$ constantes a determinar. Para encontrarlas se procede de la siguiente forma. Es claro que

$$\big\langle L_\pm\,\mathcal{Y}_\ell^m\big|L_\pm\mathcal{Y}_\ell^m\big\rangle = \hbar^2\,C^2_{(\pm)\ell m}\,.$$

De $L_+^\dagger = L_-$ y las ecs. (7) y se sigue que

$$\big\langle L_\pm\,\mathcal{Y}_\ell^m\big|L_\pm\mathcal{Y}_\ell^m\big\rangle = \big\langle \mathcal{Y}_\ell^m\big|L_\mp L_\pm\mathcal{Y}_\ell^m\big\rangle = \hbar^2\,\big[\ell(\ell+1)-m(m\pm 1)\big]\,.$$

Por tanto,

$$L_\pm\big|\ell,m\big\rangle = \hbar\,\sqrt{\ell(\ell+1)-m(m\pm 1)}\;\big|\ell,m\pm 1\big\rangle\,.$$

Nótese que

$$L_+|\ell\,,\ell\rangle = 0\,,\qquad L_-|\ell\,,-\ell\rangle = 0\,.$$

Así pues, el conjunto $\{|\ell,m\rangle : m=-\ell,\ldots,\ell\}$ de autoestados simultáneos de $\boldsymbol{L}^2$ y L_z que tienen el mismo ℓ puede obtenerse haciendo actuar L_- sobre $|\ell,\ell\rangle$, o, si se prefiere, L_+ sobre $|\ell,-\ell\rangle$.

48. Calcúlese ΔL_x en un autoestado $|\ell,m\rangle$ de $\mathbf{L}^2$ y L_z.

49. En el estado de átomo de hidrógeno normalizado ψ_{32-1} calcúlese Δz.

50. En el estado de átomo de hidrógeno normalizado ψ_{322} hállese el valor esperado de la energía potencial.

51. Un átomo de hidrógeno se encuentra en $t=0$ en el estado

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\,\psi_{200}(\mathbf{x}) + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\psi_{210}(\mathbf{x}) + \frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{2}}\,\big[\,\psi_{211}(\mathbf{x})+\psi_{21-1}(\mathbf{x})\,\big]\,.$$

Calcúlense los valores esperados de $\mathbf{L}^2$ y L_z. Si se mide L_z ¿qué resultados son posibles y con qué probabilidades?

52. Un átomo de hidrógeno se encuentra en el estado

$$\psi(\mathbf{x},t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\psi_{310}(\mathbf{x},t) + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\,\psi_{211}(\mathbf{x},t)\,.$$

Hállese el valor esperado de L_x^2.

53. Un átomo de hidrógeno se encuentra en $t=0$ en el estado

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{210}(\mathbf{x}) + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\psi_{100}(\mathbf{x}) - \frac{1}{\sqrt{6}}\psi_{211}(\mathbf{x})\,.$$

Calcúlese la indeterminación de la energía.

54. Al medir la energía en un conjunto de átomos de hidrógeno todos en el mismo estado se obtiene siempre el valor $-13.6/16$ eV. Al medir la tercera componente del momento angular orbital se obtiene siempre el valor 0. Y, por último, al medir $\mathbf{L}^2$ se encuentran todos los valores posible con idéntica probabilidad. Hállese el valor esperado de $\mathbf{L}^2$. Escríbase el estado más general en el que se econtraban los átomos antes de realizar las medidas.

55. Un átomo de hidrógeno se encuentra en $t = 0$ en el estado

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\psi_{322}(\mathbf{x}) + \mathrm{i}\, \psi_{32-1}(\mathbf{x}) \right].$$

¿Para qué valor de r la densidad de probabilidad radial es máxima? Calcúlese el valor esperado de la coordenada radial.

56. Calcúlese el valor esperado para la energía potencial de un átomo de hidrógeno que se encuentra en el estado ψ_{322}.