Tema 3: Resumen

La posición en Mecánica cuántica. Supongamos una partícula de masa m con energía potencial $V(\mathbf{x})$ y llamemos $\Psi(\mathbf{x},t)$ a su función de ondas. El valor esperado $\langle x_i \rangle$ de la componente i de la posición puede entenderse como el resultado de:

• Primero, actuar sobre $\Psi(\mathbf{x},t)$ con un operador que denotamos por la letra mayúscula X_i, cuya acción consiste en multiplicar $\Psi(\mathbf{x},t)$ por la coordenada x_i, es decir,

$$X_i \Psi(\mathbf{x},t) = x_i \Psi(\mathbf{x},t)\,, \qquad i = 1,2,3\,.$$

• Y segundo, multiplicar por $\Psi^*(\mathbf{x},t)$ e integrar sobre d^3x, es decir

$$\langle\, x_i(t)\,\rangle = \int d^3x\ \Psi^*(\mathbf{x},t)\, X_i \Psi(\mathbf{x},t)\,, \qquad i = 1,2,3\,.$$

Abusando del lenguaje, es como promediar la acción del operador X_i sobre $\Psi(\mathbf{x},t)$.

El momento lineal en Mecánica cuántica. Al no poderse hablar de la trayectoria que sigue la partícula, tampoco puede hacerse de su momento, si por éste se entiende lo que en Mecánica clásica, es decir el producto de la masa con la derivada temporal de la posición. Sin embargo, sí es posible asociar al momento un operador que actua sobre $\Psi(\mathbf{x},t)$, de forma pareciada a como se ha hecho con la posición. Recordemos cómo.

Hipótesis: suponemos que el valor esperado del momento es igual al producto de la masa por la derivada temporal del valor esperado de la posición, es decir,

$$\langle p_i \rangle = m\ \frac{d}{dt}\ \langle\, x_i(t)\,\rangle\,. \tag{1}$$

Comentarios:

(i) Nótese que el lado derecho no es lo mimso que el promedio de dx_i/dt. Es más, al no existir trayectorias, no tiene sentido hablar de dx_i/dt. Por lo que (1) es casi lo único razonable que cabe escribir para $\langle p_i \rangle$.

(ii) Aunque muy razonable, (1) no deja de ser una hipótesis.

Calculando la derivada que aparece en el lado derecho de la ec. (1) se obtiene

$$\langle p_i \rangle = \int d^3x\ \Psi^*(\mathbf{x},t) \left[-\,\mathrm{i}\hbar\, \frac{\partial \Psi(\mathbf{x},t)}{\partial x_i} \right].$$

La interpretación probabilística entonces lleva a asociar a la componente i del momento un operador que denotamos como P_i y que actua sobre Ψ como

$$P_i \Psi(\mathbf{x},t) = -\mathrm{i}\hbar\, \frac{\partial \Psi(\mathbf{x},t)}{\partial x_i}\,.$$

Hay una diferencia sustancial con el operador posición y es que ahora la acción sobre $\Psi(\mathbf{x},t)$ no es multiplicativa, sino que consiste en tomar la derivada con respecto a x_i y multiplicarla por $-\mathrm{i}\hbar$. Notese que las dimensiones del operador P_i son las correctas, pues $\hbar$ tiene dimensiones de energía por tiempo, es decir ML^2T^{-1} y $\partial/\partial x_i$ tiene dimensiones de L^{-1}.

La energía en Mecánica cuántica. En Mecánica clásica la energía es la suma de la cinética y la potencial,

$$\text{Mecánica clásica :} \qquad \text{Energía} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x})\,.$$

En Mecánica cuántica, la posición está representada por un operador que actua multiplicativamente sobre la función de ondas, por lo que la energía potencial $V(\mathbf{x})$ está representada por un operador que también actua multiplicativamente. A su vez, el momento viene descrito por el operador diferencial $\mathbf{P} = -\mathrm{i}\hbar\boldsymbol{\nabla} = -\mathrm{i}\hbar\,\big(\partial_1,\, \partial_2,\, \partial_3\big)$, por lo que la energía tiene asociado el operador

$$H = -\,\frac{\hbar^2}{2m}\,\boldsymbol{\nabla}^2 + V(\mathbf{x})\,,$$

que recibe el nombre de hamiltoniano y se denota por la letra H. La ecuación de Scrödinger puede escribirse entonces como

$$\mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial\Psi(\mathbf{x},t)}{\partial t} \;= H\Psi(\mathbf{x},t)\,.$$

Incertidumbres. Para cualquier operador A que representa una magnitud física observable, se define su incertidumbre como

$$\Delta A = \sqrt{\langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2}\,,$$

donde

$$\langle A^2\rangle = \int d^3x\;\Psi^*(\mathbf{x},t)\,A^2\Psi(\mathbf{x},t)\,, \qquad \langle A\rangle = \int d^3x\;\Psi^*(\mathbf{x},t)\,A\Psi(\mathbf{x},t)$$

y se ha tomado la función de ondas normalizada, $\|\Psi\|^2 = 1$.