UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA I
GRADO EN FÍSICA

Física cuántica I – Grupo E – 2014/15
Examen final – primera parte – 25 de junio de 2015

Nombre:______________________________ Firma:________________

Las personas que, teniendo liberada la primera parte, realicen sólo la segunda disponen de **2 horas**. Las que hagan todo el examen disponen de **3 horas**.

Cuestión 1 (1 punto). Demuéstrese que para una partícula que se mueve en una dimensión con hamiltoniano $H = \frac{P^2}{2m} + V(X)$ el valor esperado del momento en un estado estacionario $\psi(x,t) = e^{iEt/\hbar}\,\phi(x)$ es cero. Una forma de hacerlo es usando el commutador $[P^2, X]$.

$$[P^2, X] = P[P,X] + [P,X]P = P(i\hbar) + i\hbar P = 2i\hbar P \Rightarrow$$

Hecho en clase

$$\Rightarrow [H, X] = \frac{1}{2m}[P^2, X] = \frac{i\hbar}{m} P \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle P \rangle_\psi = \int dx\, \psi^* \frac{m}{i\hbar}[H, X]\, \psi = \frac{m}{i\hbar}\int dx\, \psi^*(HX - XH)\psi$$

$$= \frac{m}{i\hbar}\int dx\, \phi\,(HX - XH)\,\phi =$$ usando $H\phi = E\phi$, H autoadjunto

$$= \frac{m}{i\hbar}\int dx\,[\underbrace{(H\phi)\,x\,\phi}_{E\phi x \phi} - \underbrace{\phi\, x\, H\phi}_{\phi x E\phi}] = 0$$

Cuestión 2 (1 punto). Una partícula en un pozo infinito unidimensional de anchura a se encuentra en $t = 0$ en un cierto estado. De él se sabe que al medir la energía sólo se obtienen los valores E_1, E_2 y E_3. Si E_1 y E_2 se obtienen con probabilidad 1/2 y 1/3 repectivamente, ¿con qué probabilidad se obtiene E_3? Calcúlese en términos de a el valor esperado de la energía. ¿Cuál es el estado en que se encuentra el sistema en $t > 0$?

$$\text{Prob}(E_2) = \frac{1}{6}$$

$$\langle E \rangle = \frac{10}{3} E_1 = \frac{10}{3} \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$$

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{iE_1 t/\hbar} \phi_1(x) + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{iE_2 t/\hbar} \phi_2(x) + \frac{1}{\sqrt{6}} e^{iE_3 t/\hbar} \phi_3(x)$$

Cuestión 3 (1 punto). Una partícula se mueve en **dos dimensiones** en un potencial $V(r)$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la distacia a un origen. Su función de ondas es $\psi(x, y, t) = e^{iEt/\hbar} \frac{r}{r_0} e^{-r^2/2r_0^2}$. ¿A qué distancia del origen es máxima la probabilidad de encontrar la partícula?

$$r_{\max} = \sqrt{\frac{3}{2}}\, r_0$$

Problema 4 (2 puntos). *En este problema es necesario entregar también los cálculos. Las respuestas deben estar debidamente razonadas y redactadas con claridad. Utilícese exclusivamente la hoja adicional que se adjunta.*

Considérese un partícula que se mueve en la semirecta real positiva, $x > 0$, sometida a un potencial $V(x)$ con función de ondas

$$\psi(x,t) = e^{iEt/\hbar} \phi(x)\,, \qquad \phi(x) = A \left(\frac{x}{x_0}\right)^n e^{-x/x_0}\,,$$

donde A y x_0 son constantes y n es un entero positivo. Supóngase que $V(x) \to 0$ para $x \to \infty$. Calcúlese $V(x)$ y la autoenergía E.

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{n(n-1)}{x^2} - \frac{2n}{x x_0} \right]$$

$$E = -\frac{\hbar^2}{2m x_0^2}$$

Cuestión 2. Junio 2015

$$\text{Prob}(E_3) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2}E_1 + \frac{1}{3}E_2 + \frac{1}{6}E_3 = \frac{1}{2}E_1 + \frac{4}{3}E_1 + \frac{9}{6}E_1 = \frac{10}{3}E_1 = \frac{10}{3}\,\frac{\hbar^2\pi^2}{2m^2a^2}$$

$$\uparrow$$

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m^2}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m^2a^2}\,n^2 = n^2 E_1$$

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{iE_1t/\hbar}\phi_1(x) + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{iE_2t/\hbar}\phi_2(x) + \frac{1}{\sqrt{6}}e^{iE_3t/\hbar}\phi_3(x)$$

Cuestión 3. Junio 2015

$$P(r) = 2\pi r\,|\psi r|^2 = 2\pi\frac{r^3}{r_0^2}e^{-r^2/r_0^2}$$

$$P'(r) = 0 \iff \frac{e^{-r^2/r_0^2}}{r_0^2}\left(3r^2 - \frac{2r^4}{r_0^2}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{3}{2}r_0^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{3}{2}}\,r_0$$

Problema 4. Examen junio 2015

$$H\psi = e^{iEt/\hbar} H\phi$$

$$H\phi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V\right)\phi(x) = ?$$

$$\frac{d\phi}{dx} = A\left[n\left(\frac{x}{x_0}\right)^{n-1}\frac{1}{x_0} - \left(\frac{x}{x_0}\right)^n \frac{1}{x_0}\right] e^{-x/x_0}$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = A\left[n(n-1)\left(\frac{x}{x_0}\right)^{n-2}\frac{1}{x_0^2} - 2n\left(\frac{x}{x_0}\right)^{n-1}\frac{1}{x_0^2} + \left(\frac{x}{x_0}\right)^n \frac{1}{x_0^2}\right]$$

$$\cdot e^{-x/x_0}$$

$$= \left[n(n-1)\left(\frac{x}{x_0}\right)^{-2}\frac{1}{x_0^2} - 2n\left(\frac{x}{x_0}\right)^{-1}\frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{x_0^2}\right]\phi(x)$$

$$= \left[\frac{n(n-1)}{x^2} - \frac{2n}{x x_0} + \frac{1}{x_0^2}\right]\phi(x)$$

$$\left.\begin{array}{l} H\phi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{n(n-1)}{x^2} - \frac{2n}{x x_0} + \frac{1}{x_0^2}\right] + V\right)\phi \\ H\phi = E\phi \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V - E = \frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{n(n-1)}{x^2} - \frac{2n}{x x_0} + \frac{1}{x_0^2}\right]$$

En $x \to \infty$ se tiene $-E = \frac{\hbar^2}{2m x_0^2}$, pues $V \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$

luego

$$\boxed{V = \frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{n(n-1)}{x^2} - \frac{2n}{x x_0}\right]} \quad \boxed{E = -\frac{\hbar^2}{2m x_0^2}}$$