UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

Apellidos	
Nombre	DNI ....
Asignatura **Relatividad general y gravitación**	Grupo **A y A2**
Curso **4º**	Fecha ....

Relatividad general y gravitación
Examen final - 18 de enero de 2022

(Tiempo disponible: **2 horas 45 minutos**)

Instrucciones:

1. En este examen se usa signatura $(-+++)$, la misma que en las clases.

2. El examen consta de 6 preguntas de elección múltiple y dos problemas cortos. En las preguntas de elección múltiple marcar con una **X** la respuesta escogida. Cada respuesta incorrecta penaliza 0.3 puntos. En los problemas es necesario entregar los cálculos.

1. [**1 punto**] El principio de quivalencia débil establece que:

- ☐ Los efectos de la gravedad son eliminables globalmente.
- ☐ En todo punto del espacio es siempre posible escoger un sistema de referencia global en el que las leyes de la física son las mismas que en ausencia de gravedad.
- ■ En todo punto del espacio es siempre posible escoger un sistema de referencia tal que en un entorno suficientemente pequeño del mismo y para tiempos suficientemente cortos las leyes de la física son las mismas que en ausencia de gravedad.
- ☐ Los efectos de la gravedad son indistinguibles de una aceleración constante.

En las dos primeras falla la palabra global. La cuarta sólo es cierta para campos gravitatorios uniformes.

2. [**1 punto**] Para que la ecuación $A_{\mu\nu} = 0$ sea una ley física:

- ■ $A_{\mu\nu}$ tiene que ser un tensor y la ecuación ser cierta en ausencia de gravedad.
- ☐ Basta que $A_{\mu\nu} = 0$ sea covariante.
- ☐ Basta que $A_{\mu\nu}$ sea cierta en ausencia de gravedad.
- ☐ Basta que $A_{\mu\nu}$ se tranforme como $A_{\mu\nu} \to \bar{A}_{\mu\nu}(\bar{x}) = \left(\partial x^\alpha / \partial \bar{x}^\mu\right) \left(\partial x^\beta / \partial \bar{x}^\nu\right) A_{\alpha\beta}(x)$ bajo cambios de cordenadas $x^\mu \to \bar{x}^\mu(x)$.

Covariancia (opciones 2 $\Leftrightarrow$ 4) es necesaria. Pero por sí sola no basta. Es necesario, además, que la ecuación tenga contenido físico (opción 3), que por sí sola tampoco basta. Se necesitan ambas.

3. [1 punto]. Un observador orbita circularmente con radio $r = 4m$ en torno a una estrella cuyo campo gravitatorio está descrito por la métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = -f(r)\,dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2)\,, \qquad f = 1 - \frac{2m}{r}\,.$$

Calcular (a partir de la ecuación geodésica para r y de la condición $\dot{x}^2 = -1$, o como se quiera) su momento angular por unidad de masa L.

- ☐ $L = m^2$
- ■ $L = 4m$.
- ☐ $L = 0$.
- ☐ $L = 3m$.

La ecuación geodésica para r puede obtenerse como ecuación de Euler-Lagrange a partir de la lagrangiana efectiva $L_{\rm ef} = \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu$. Las derivadas parciales pertinentes son

$$\frac{\partial L_{\rm ef}}{\partial \dot{r}} = \frac{\dot{r}}{f(r)}\,, \qquad \frac{\partial L_{\rm ef}}{\partial r} = -\frac{f'\dot{t}^2}{2} - \frac{\dot{r}^2 f'}{2f^2} + r\,(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\phi}^2)\,,$$

donde el punto denota derivada con especto al tiempo propio del observador y la prima derivada con respecto a r. Eligiendo las coordenadas angulares de forma que el plano que contiene a la geodésica es $\theta = \pi/2$ y usando que para órbitas circulares $r = R = \text{const}$, se tiene

$$\frac{\partial L_{\rm ef}}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L_{\rm ef}}{\partial r} = 0 \underset{\theta=\pi/2,\,r=R}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2}\,f'(R)\,\dot{t}^2 - R\dot{\phi}^2 = 0\,. \tag{1}$$

Sobre geodésicas arbitrarias la energía (por unidad de masa) $E = f(r)\dot{t}$ y el momento angular (por unidad de masa) $L = r^2\dot{\phi}$ son cantidades conservadas. En nuestro caso $R = 4m$, $f(R) = 1/2$ y $f'(R) = 1/8m$, por lo que

$$E = \frac{\dot{t}}{2}\,, \qquad L = 16m^2\dot{\phi}, \qquad (1) \;\Leftrightarrow\; E^2 = \frac{L^2}{16m^2}\,. \tag{2}$$

La condición $\dot{x}^2 = -1$ para $\theta = \pi/2$ y $r = R$ toma la forma

$$-f(R)\dot{t}^2 + R^2\dot{\phi}^2 = -1 \;\Rightarrow\; -2E^2 + \frac{L^2}{16m^2} = -1\,. \tag{3}$$

De (2) y (3) se sigue que $L^2 = 4m^2$, y por tanto la opción elegida.

4. [1 punto]. Si el observador del problema anterior emite en cada vuelta al pasar por el mismo sitio una señal y ésta es recogida por otro observador estático distante (idealmente situado en $r = \infty$) ¿qué tiempo mide este segundo observador entre dos señales consecutivas?

- ☐ $2\pi\sqrt{2}/m$.
- ☐ $4\pi\sqrt{2}/\sqrt{3}m$
- ☐ $6\pi\, m$.
- ■ $16\pi m$.

El intervalo $d\tau_\infty$ de tiempo propio del observador estático ($dr/dt = d\theta/dt = d\phi/dt = 0$) en el infinto coincide con el intervalo dt de tiempo cordenado pues

$$-d\tau_\infty^2 = -f(r = \infty)\, dt^2 = -dt^2 \quad \Rightarrow \quad d\tau_\infty = dt.$$

Pare el observador en órbita se tiene $E^2 = L^2/16m^2$ y $L = 4m$, por lo que $E = 1$ y

$$\frac{dt}{d\tau} = 2E = 2 \quad \Rightarrow \quad dt = 2d\tau.$$

Así pues, $d\tau_\infty = 2d\tau$. El período que mide el obserbador que orbita es

$$\tau_{\text{vuelta}} = \oint d\tau = \int_0^{2\pi} \frac{d\tau}{d\phi}\, d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\dot\phi} = \frac{R^2}{L}\int_0^{2\pi} d\phi = 8\pi m.$$

El observador distante medirá un período $t_{\text{vuelta}} = 2\tau_{\text{vuelta}} = 16\pi m$.

5. [1 punto] Un espacio-tiempo tiene tensor de Ricci $R_{\mu\nu} = \nabla_\mu\nabla_\nu\varphi$, donde φ es un campo escalar. Calcular $R_{\mu\alpha}\nabla^\alpha\varphi$.

- ☐ $R^\alpha{}_{\mu\beta\gamma}\nabla_\alpha\nabla^\beta\nabla^\gamma\varphi$.
- ☐ $R\,\nabla_\mu\varphi$.
- ■ $-\frac{1}{2}\,\nabla_\mu\nabla^\alpha\nabla_\alpha\varphi$.
- ☐ $-\frac{1}{2}\,\nabla^\alpha\nabla_\mu\nabla_\alpha\varphi$

$$R_{\mu\alpha}\nabla^\alpha\varphi = R_{\alpha\mu}\nabla^\alpha\varphi = R^\beta{}_{\alpha\beta\mu}\underbrace{\nabla^\alpha\varphi}_{\text{vector}} = [\nabla_\beta, \nabla_\mu]\,\nabla^\beta\varphi = \nabla_\beta\underbrace{\nabla_\mu\nabla^\beta\varphi}_{R_\mu{}^\beta} - \nabla_\mu\underbrace{\nabla_\beta\nabla^\beta\varphi}_{R}$$
$$= \left(\text{id. Bianchi: } \nabla_\beta R_\mu^{\ \beta} = \frac{1}{2}\nabla_\mu R\right) = -\frac{1}{2}\,\nabla_\mu R = -\frac{1}{2}\,\nabla_\mu\nabla_\alpha\nabla^\alpha\varphi$$

6. [1 punto] ¿Cuál de las siguientes cantidades es un elemento invariante de volumen en 4 dimensiones?

☐ $d^4x\,\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\,A_{\alpha\beta\mu\nu}$, donde $\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$ es el tensor de Levi-Civita y $A_{\alpha\beta\mu\nu}$ es cualquier tensor de tipo (0,4).

☐ $d^4x\,\sqrt{|\det(g^{\mu\nu})|}$.

■ $d^4x\,\sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|}$.

☐ d^4x.

Para que la primera sea cierta $\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$ debería ser la densidad tensorial y no el tensor.

7. [2 puntos]. Sea la métrica

$$ds^2 = g_{tt}\,dt^2 + 2r g_{t\phi}\,dt\,d\phi + r^2 g_{\phi\phi}\,d\phi^2 + dr^2 + r^2\,d\theta^2\,,$$

donde g_{tt}, $g_{t\phi}$ y $g_{\phi\phi}$ dependen de las coordenadas r, θ. Si se hace el cambio $\phi \to \bar{\phi} = \phi - \omega t$, con ω constante, encontrar las condiciones que tienen que cumplir las funciones g_{tt}, $g_{t\phi}$ y $g_{\phi\phi}$ para que la métrica tome la forma

$$ds^2 = -A\,dt^2 + B\,d\bar{\phi}^2 + dr^2 + r^2\,d\theta^2 \tag{4}$$

y para que t siga siendo una coordenada temporal. Determinar ω, A y B. Un tensor $T_{\mu\nu}$ tiene

$$T_{tt} = \rho\,, \quad T_{\phi\phi} = T_{rr} = T_{\theta\theta} = p$$

como únicas componentes no nulas en el sistema $\{t, \phi, r, \theta\}$. Calcular sus componentes en el sistema $\{t, \bar{\phi}, r, \theta\}$.

Substituyendo $d\phi = d\bar{\phi} + \omega dt$ en ds^2 se tiene

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{tt}\,dt^2 + 2r g_{t\phi}\,dt\,(d\bar{\phi} + \omega dt) + r^2 g_{\phi\phi}\,(d\bar{\phi} + \omega dt)^2 + dr^2 + r^2\,d\theta^2 \\ &= dt^2\big(g_{tt} + 2\,r\omega\,g_{t\phi} + r^2\omega^2 g_{\phi\phi}\big) + 2r\,dt\,d\bar{\phi}\,\big(g_{t\phi} + r\omega\,g_{\phi\phi}\big) + r^2 g_{\phi\phi}\,d\bar{\phi}^2 + dr^2 + r^2\,d\theta^2\,. \end{aligned}$$

Para que sea de la forma (4) se necesita

$$\begin{aligned} & g_{tt} + 2\,r\omega\,g_{t\phi} + r^2\omega^2 g_{\phi\phi} = -A \\ & g_{t\phi} + r\omega\,g_{\phi\phi} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \omega = -\frac{g_{t\phi}}{r\,g_{\phi\phi}} \qquad (0.25) \\ & B = r^2 g_{\phi\phi}\,. \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (0.25) \end{aligned} \tag{5}$$

Como ω es constante, $\boxed{g_{t\phi} \text{ y } r\,g_{\phi\phi} \text{ deben ser proporcionales}}$. Para que la métrica conserve la signatura y t sea coordenada de género tiempo se encesita que $B > 0$ y que $-A < 0$. La primera de estas dos condiciones requiere $\boxed{g_{\phi\phi} > 0}$. A su vez la segunda se escribe

$$-A = g_{tt} + 2\,r\omega\,g_{t\phi} + r^2\omega^2 g_{\phi\phi} \underset{(5)}{=} g_{tt} - \frac{g_{t\phi}^2}{g_{\phi\phi}} < 0. \qquad (0.25 \text{ resultado } A)$$

$\boxed{\text{Esta condición se satisface siempre}}$ (0.25) pues ya se ha visto que $g_{\phi\phi} > 0$ y además $g_{tt} < 0$ en la métrica de partida, ya que t era de género tiempo. Fuera de nota. Más precisamente, que el campo $\xi = \partial_t$ que genera traslaciones sobre la coordenada t sea de género tiempo es equivalente a $\xi^2 < 0$, equivalentemente $g_{tt} < 0$.

Por ser $T_{\mu\nu}$ tensor, bajo un cambio $x^\mu \to \bar{x}^\mu(x)$ se transforma como

$$\bar{T}_{\mu\nu}(\bar{x}) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu}\,\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu}\,T_{\alpha\beta}(x)\,.$$

En nuestro caso

$$\left.\begin{aligned} \bar{t} &= t \\ \bar{\phi} &= \phi - \omega t \\ \bar{r} &= r \\ \bar{\theta} &= \theta \end{aligned}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left.\begin{aligned} t &= \bar{t} \\ \phi &= \bar{\phi} + \omega t \\ r &= \bar{r} \\ \theta &= \bar{\theta} \end{aligned}\right\}\,,$$

por lo que las únicas derivadas parciales distintas de cero son

$$\frac{\partial t}{\partial \bar{t}} = 1\,, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \bar{t}} = \omega\,, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \bar{\phi}} = 1\,, \quad \frac{\partial r}{\partial \bar{r}} = 1\,, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \bar{\theta}} = 1\,.$$

Como r y θ no cambian, las únicas componentes r, θ distinas de cero son

$$\bar{T}_{\bar{r}\bar{r}} = T_{rr} = p, \qquad \bar{T}_{\bar{\theta}\bar{\theta}} = T_{\theta\theta} = p. \tag{0.25}$$

Para las componentes t, ϕ se tiene

$$\bar{T}_{\bar{t}\bar{t}} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{t}} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{t}} T_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial t}{\partial \bar{t}}\right)^2 T_{tt} + 2\, \frac{\partial t}{\partial \bar{t}} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{t}} \cancelto{0}{T_{t\phi}} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial \bar{t}}\right)^2 T_{\phi\phi} = \rho + \omega^2 p\,, \tag{0.25}$$

$$\bar{T}_{\bar{\phi}\bar{t}} = \bar{T}_{\bar{t}\bar{\phi}} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{t}} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{\phi}} T_{\alpha\beta} = \frac{\partial t}{\partial \bar{t}} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{\phi}} \cancelto{0}{T_{t\phi}} + \frac{\partial \phi}{\partial \bar{t}} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{\phi}} T_{\phi\phi} = \omega\, p\,, \tag{0.25}$$

$$\bar{T}_{\bar{\phi}\bar{\phi}} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{\phi}} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{\phi}} T_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \bar{\phi}}\right)^2 T_{\phi\phi} = p\,, \tag{0.25}$$

donde hemos usado que $\bar{T}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ es simétrico por serlo $T_{\mu\nu}$

Comentario. Este método también podría haberse seguido para calcular $\bar{g}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ y, una vez obtenidas, imponer $\bar{g}_{\bar{t}\bar{\phi}} = 0$ y encontrar A y B. A su vez, $\bar{T}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ podría haberse calculado procediendo como se ha hecho con la métrica, es decir usando $\bar{T}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}\, d\bar{x}^{\bar{\mu}}\, d\bar{x}^{\bar{\nu}} = T_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$.

8. [2 puntos]. Un campo gravitatorio está descrito por la métrica

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + (r^2 + a^2)\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\,,$$

donde $t, r \in \mathbf{R}$, θ y ϕ son los ángulos usuales sobre la 2-esfera de radio 1 y a es una constante con dimensiones de longitud. Desde $r = r_0$ incide una señal luminosa con $\dot{r} = \cos\alpha$, $\dot{\phi} = \sin\alpha/\sqrt{a^2 + r_0^2}$ caracterizada por un ángulo α. El punto en estas expresiones denota derivada con respecto al parámetro que parametriza los rayos de luz. Escogiendo las coordenadas angulares de forma que su movimiento tiene lugar en el plano $\theta = \pi/2$, calcular el valor de α para que su trayectoria pase por $r = 0$ con pendiente $dr/d\phi$ nula. Si α_{crit} denota el valor obtenido, discutir brevemente qué ocurre para valores de α menores y mayores que α_{crit}. Este apartado es más complicado y para resolverlo ayuda usar la imagen de una partícula que se mueve en un potencial unidimensional.

Elegimos las coordenadas angulares de forma que las geodésicas estén contenidas en el plano $\theta = \pi/2$. Sobre ellas las cantidades

$$E = \dot{t}, \qquad L = (r^2 + a^2)\,\dot{\phi},$$

donde el punto denota derivada con respecto al parámetro de la curva, son conservadas. La condición $\dot{x}^2 = 0$ se escribe

$$-\dot{t}^2 + \dot{r}^2 + (r^2 + a^2)\,\dot{\phi}^2) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad E = \dot{r}^2 + \frac{L^2}{r^2 + a^2}\,. \tag{6}$$

En el instante inicial, $r|_0 = r_0$, $\dot{r}|_0 = \cos\alpha$, $\dot{\phi}|_0 = \sin\alpha/\sqrt{r_0^2 + a^2}$, de forma que

$$L = \sqrt{r_0^2 + a^2}\ \sin\alpha\,, \qquad E = 1.$$

Usando

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\phi}\,\dot{\phi} = \frac{dr}{d\phi}\,\frac{L}{r^2 + a^2}\,,$$

la ec. (6) se escribe

$$E = \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 \frac{L^2}{(r^2 + a^2)^2} + \frac{L^2}{r^2 + a^2}\,.$$

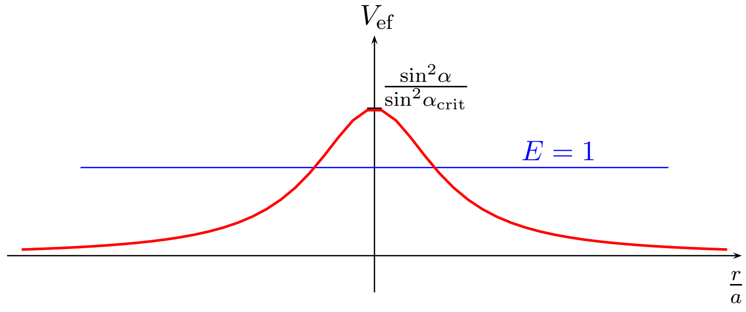
Para $dr/d\phi = 0$ en $r = 0$ se tiene

$$\left.\frac{dr}{dr}\right|_{r=0} = 0 \;\Rightarrow\; E = \frac{L^2}{a^2} \;\Leftrightarrow\; 1 = \frac{r_0^2 + a^2}{a^2}\sin^2\alpha_{\text{crit}} \;\Rightarrow\; \alpha_{\text{crit}} = \arcsin\left(\frac{a}{\sqrt{r_0^2 + a^2}}\right). \qquad (1.5)$$

Para entender qué ocurre cuando $\alpha \neq \alpha_{\text{crit}}$ interpretamos (6) como la energía de una partícula en un potencial efectivo

$$E = \dot{r}^2 + V_{\text{ef}}\,, \qquad V_{\text{ef}} = \frac{r_0^2 + a^2}{r^2 + a^2}\sin^2\alpha = \frac{a^2}{r^2 + a^2}\,\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_{\text{crit}}}\,.$$

Para $\alpha > \alpha_{\text{crit}}$ la altura de la barrera de potencial que tiene que superar la partícula efectiva es mayor que la del caso crítico y la enería cinética con la que parte es menor, por lo que no logrará alcanzar $r = 0$. Para $\alpha > \alpha_{\text{crit}}$ se da la situación contraria y la partícula supera la barrera (0.5). Gráficamente se tiene:


V_{ef}
$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_{\text{crit}}}$
$E = 1$
$\frac{r}{a}$