UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
GRADO EN FÍSICA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA I

Relatividad general y gravitación
Examen final - 9 de septiembre de 2016

Nombre: Soluciones **Firma:**

Tiempo disponible: **3 horas**.

En los **problemas 1 a 4 no entregue sus cálculos**. En los **problemas 5 y 6 entregue sus operaciones**.

Fórmulas de utilidad

Para signatura $(-,+,+,+)$ se tiene:

$$\text{Christoffel}: \quad \Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}\, g^{\mu\rho}\left(\frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial y^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial y^{\lambda}} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial y^{\rho}}\right)$$

$$\text{Riemann}: \quad R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \partial_{\mu}\,\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu} - \partial_{\nu}\,\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\sigma}\,\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\beta} - \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\sigma}\,\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\beta}$$

$$\text{Ricci}: \quad R_{\beta\nu} = R^{\alpha}{}_{\beta\alpha\nu}$$

$$\text{Geodésicas}: \quad \ddot{x}^{\mu} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}\,\dot{x}^{\alpha}\,\dot{x}^{\beta} = 0 \qquad \dot{x}^{\mu} := \frac{dx^{\mu}}{d\tau}\,, \qquad \tau = \text{parámetro afín}$$

Sean $g_{\mu\nu}(x)$ y $\bar{g}_{\mu\nu}(x)$ dos métricas en dimensión cuatro tales que $g_{\mu\nu} = \Omega^2(x)\,\bar{g}_{\mu\nu}$, con $\Omega(x)$ función de las coordendas. Sus tensores de Ricci están relacionados mediante la expresión

$$R_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} - 2\,\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{\nu}(\ln\Omega) + 2\,\bar{\nabla}_{\mu}(\ln\Omega)\;\bar{\nabla}_{\nu}(\ln\Omega)$$
$$\qquad - \bar{g}_{\mu\nu}\,\bar{\nabla}^2(\ln\Omega) - 2\,\bar{g}_{\mu\nu}\,\bar{g}^{\alpha\beta}\,\bar{\nabla}_{\alpha}(\ln\Omega)\;\bar{\nabla}_{\beta}(\ln\Omega)\,,$$

donde $\bar{\nabla}_{\mu}$ es la derivada covariante de $\bar{g}_{\mu\nu}$.

1 [**1 punto**] ¿Cuántas componentes independientes tienen los tensores de Riemann, Ricci y métrico en **tres** dimensiones?

Riemann: **6**	Ricci: **6**	Métrico: **6**

¿Cuánto vale el tesor de Weyl en **tres** dimensiones?

$$\mathrm{Weyl}_{\mu\nu\lambda\rho} = \mathbf{0}$$

2 [**1 punto**] Escríbanse cuatro vectores de Killing para la métrica

$$ds^2 = e^{2A^2(\rho)}\left(-dt^2 + dz^2\right) + d\rho^2 + \rho^2 e^{2B^2(\rho)}\, d\theta^2, \quad 0 < \rho, \quad 0 \le \theta \le 2\pi\,,$$

con $A(\rho)$ y $B(\rho)$ funciones de ρ.

$\xi_1 = \boldsymbol{\partial_t}$	$\xi_2 = \boldsymbol{\partial_z}$
$\xi_3 = \boldsymbol{\partial_\theta}$	$\xi_4 = \boldsymbol{z\partial_t + t\partial_z}$

3 [**1 punto**] Señálense cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas.

- ■ En cualquier punto de un espacio-tiempo es posible escoger un sistema de referencia en el que los efectos de la gravedad son inobservables en ese punto.
- ☐ Si los símbolos de Christoffel se anulan en un sistema de referencia entonces se anulan en todos los sistemas de referencia.
- ☐ La condicón necesaria y suficiente para que un espacio-tiempo sea plano es que el tensor de Ricci se anule.
- ■ Un espacio-tiempo bidimensional es plano si y sólo si su escalar de Ricci es cero.

4 [1 punto]. Considérense dos observadores en reposo en un campo gravitatorio dado por

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{r^2}{\ell^2}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 + \frac{r^2}{\ell^2}} + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2\right),$$

donde ℓ es una constante con dimensiones de longitud. El primero se encuentra en $r_1 = a$, $\theta_1 = \pi/2$, $\phi_1 = 0$; y el segundo en $r_2 = b$, $\theta_2 = \pi/2$, $\phi_2 = 0$, con $b < a << \ell$. El primero emite luz que viaja con $\theta = \pi/2$ y $\phi = 0$ y ésta es observada por el segundo. Calcúlese el desplazamiento que observa este último e indíquese si es hacia el infrarrojo o hacia el ultravioleta.

$$\frac{\nu_2 - \nu_1}{\nu_1} = \boldsymbol{\frac{a^2 - b^2}{2\ell^2}}$$

Desplazamiento hacia el **ultravioleta**

Si ν_1 y ν_2 denotan las frecuencias observadas, el cociente entre las mismas es

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{\frac{g_{tt}(\mathbf{x}_1)}{g_{tt}(\mathbf{x}_2)}} = \left(1 + \frac{r_1^2}{\ell^2}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{r_2^2}{\ell^2}\right)^{-1/2}$$

Desarrollando en serie de potencias de r_2^2/ℓ^2 y r_1^2/ℓ^2 ,

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = 1 + \frac{r_1^2 - r_2^2}{2\ell^2} + \cdots$$

Como $r_1 > r_2$ se tiene que $\nu_2 > \nu_1$, por lo que la frecuencia observada por 2 es mayor que la observada por 1. Es decir, hay desplazamiento hacia el ultravioleta y

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} - 1 = \frac{a^2 - b^2}{2\ell^2} .$$

5 [3 puntos]. Determínese la función $f(z)$ para que

$$ds^2 = f^2(z)\left(-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2\right)$$

sea solución de las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 . \tag{1}$$

Determínese el signo de Λ.

$$\boxed{f(z) = \left(\boldsymbol{c_0 \pm z\sqrt{-\frac{\Lambda}{3}}}\right)^{\mathbf{-1}}, \quad \boldsymbol{c_0} = \textbf{const integración,} \qquad \Lambda \ \underline{\boldsymbol{< 0}}}$$

Escriba sus operaciones y razonamientos en el espacio que sigue.

La métrica dada, llamémosla $g_{\mu\nu}$, es de la forma

$$g_{\mu\nu} = \Omega^2 \eta_{\mu\nu} .$$

con $\eta_{\mu\nu}$ la métrica de Minkowski. Este es un caso particular de transformación conforme, con $\bar{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ y $\Omega = f$. Usando el formulario de la primera página y teniendo en cuenta que para $\bar{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ se tiene $\bar{\nabla}_\mu = \partial_\mu$ y $\bar{R}_{\mu\nu} = 0$, resulta

$$R_{\mu\nu} = -2\,\partial_\mu\partial_\nu(\ln f) + 2\,\partial_\mu(\ln f)\,\partial_\nu(\ln f) - \eta_{\mu\nu}\,\partial^2(\ln f) - 2\,\eta_{\mu\nu}\,\eta^{\alpha\beta}\,\partial_\alpha(\ln f)\,\partial_\beta(\ln f) .$$

Como f sólo depende de z,

$$\begin{aligned}
\partial_\nu(\ln f) &= \delta^z{}_\nu \frac{f'}{f} \\
\partial_\mu\partial_\nu(\ln f) &= \delta^z{}_\mu\,\delta^z{}_\nu \left(\frac{f''}{f} - \frac{f'^2}{f^2}\right) , \\
\partial^2(\ln f) &= \frac{f''}{f} - \frac{f'^2}{f^2} , \\
\partial_\mu(\ln f)\,\partial_\nu(\ln f) &= \delta^z{}_\mu\,\delta^z{}_\nu \frac{f'^2}{f^2} , \\
\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha(\ln f)\,\partial_\beta(\ln f) &= \frac{f'^2}{f^2} ,
\end{aligned}$$

donde la prima denota derivada con respecto a z. Esto implica que

$$R_{\mu\nu} = 2\,\delta^z{}_\mu\,\delta^z{}_\nu \left(-\frac{f''}{f} + 2\frac{f'^2}{f^2}\right) - \eta_{\mu\nu}\left(\frac{f''}{f} + \frac{f'^2}{f^2}\right) .$$

En componentes

$$R_{tt} = -R_{xx} = -R_{yy} = \frac{f''}{f} + \frac{f'^2}{f^2} , \qquad R_{zz} = 3\left(-\frac{f''}{f} + \frac{f'^2}{f^2}\right) .$$

Las ecuaciones de Einstein (1) pueden escribirse en cuatro dimensiones como

$$R_{\mu\nu} = \Lambda\, g_{\mu\nu}\,.$$

Sus componentes son

$$(tt),\ (xx),\ (yy): \qquad \frac{f''}{f} + \frac{f'^2}{f^2} = -\Lambda f^2\,, \tag{2}$$

$$(zz): \qquad -\frac{f''}{f} + \frac{f'^2}{f^2} = \frac{1}{3}\Lambda f^2\,. \tag{3}$$

Sumando (2) y (3),

$$\left(\frac{f'}{f^2}\right)^2 = -\frac{\Lambda}{3}\,. \tag{4}$$

Para que f y f' sean reales, la constante cosmológica debe ser negativa. En este caso, la integral de (4) es

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = \pm\sqrt{-\frac{\Lambda}{3}} \quad \Rightarrow \quad f(z) = \left(c_0 \pm z\sqrt{-\frac{\Lambda}{3}}\right)^{-1}, \quad c_0 = \text{const. de integración} \tag{5}$$

Nótese que (2) y (3) son dos ecuaciones diferenciales distintas para la misma f, por lo que hay que comprobar que son compatibles. Substituyendo (4) en cualquiera de ellas se llega a

$$\frac{f''}{f^3} = -\frac{2\Lambda}{3}\,.$$

Es trivial comprobar que la f obtenida satisface esta ecuación para toda c_0. Así pues (2) y (3) son compatibles y la métrica dada resuelve las ecuaciones de Einstein para f en (5).

El problema también puede resolverse calculando los Christoffel y partir de estos el tensor de Ricci. De esta forma es algo más largo, pero no mucho más, pues la forma diagonal de la métrica y el hecho de que las únicas derivadas distintas de cero son conrespecto a z simplifica considerablemente los cálculos.

6 [**3 puntos**] Considérese el espacio-tiempo bidimensional

$$ds^2 = \frac{a^2}{x^2}\left(-\,dt^2 + dx^2\right), \quad t \in \mathbf{R}, \quad x \in \mathbf{R}_+, \quad a = \text{const.}$$

(a) Demuéstrese que las ecuaciones de las geodésicas son

$$\dot t = k x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot t - \frac{2}{x}\,\dot t \dot x = 0\,, \tag{6}$$

$$\ddot x - \frac{1}{x}\left(\dot t^2 + \dot x^2\right) = 0\,, \tag{7}$$

donde el punto indica derivada con respecto a un parámetro afín y k es una constante (cantidad conservada). Ecuéntrense a partir de ellas los símbolos de Christoffel.

(b) Demuestrése que las geodésicas están dadas por

$$x^2 - (t - t_0)^2 = R^2\,,$$

donde t_0 y R son constantes reales. Ayuda: escribir la ec. (II) como

$$\frac{d^2 x^2}{dt^2} = 2 \tag{8}$$

e integrar esta última.

(c) Tómese $t_0 = 0$, calcúlese $g_{\mu\nu}\dot x^\mu \dot x^\nu$ y discútase el género de las geodésicas atendiendo al valor de R.

Nota. El problema está enunciado de forma que la solución a ninguno de sus apartados depende de que se hayan resuelto los otros.

Escriba sus respuestas en el espacio que sigue.

(a) The geodesic equations can be obtained from the Euler-Lagrange equations

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L_{\rm ef}}{\partial \dot x^\mu}\right) - \frac{\partial L_{\rm ef}}{\partial x^\mu} = 0\,, \qquad L_{\rm ef} = g_{\mu\nu}\,\dot x^\mu\,\dot x^\nu = \frac{a^2}{x^2}\left(-\,\dot t^2 + \dot x^2\right).$$

Noting that

$$\frac{\partial L_{\rm ef}}{\partial \dot t} = -\,\frac{2a^2\dot t}{x^2} \qquad \frac{\partial L_{\rm ef}}{\partial t} = 0\,,$$

$$\frac{\partial L_{\rm ef}}{\partial \dot x} = \frac{2a^2\dot x}{x^2} \qquad \frac{\partial L_{\rm ef}}{\partial x} = -\,\frac{2a^2}{x^3}\left(-\,\dot t^2 + \dot x^2\right),$$

we produce eqs. (6)-(7) above. The Christoffel symbols are read from the geodesic equations as

$$\boldsymbol{\Gamma^t{}_{tx} = \Gamma^x{}_{tt} = \Gamma^x{}_{xx} = -\frac{1}{x}}\,.$$

(b) Using the chain rule we write

$$\dot x = \frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt}\,\frac{dt}{d\tau} = \frac{dx}{dt}\,\dot t\,, \tag{9}$$

$$\ddot x = \frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{dx}{dt}\,\dot t\right) = \frac{d^2x}{dt^2}\,\dot t^2 + \frac{dx}{dt}\,\ddot t\,. \tag{10}$$

Substitution of eq. (9) in eq. (6) gives

$$\ddot{t} - \frac{2\dot{t}^2}{x}\,\frac{dx}{dt} = 0\,, \tag{11}$$

With this, eq. (10) can be recast as

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}\,\dot{t}^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \frac{2\dot{t}^2}{x}\,. \tag{12}$$

Using now eqs. (12) and (9) in eq. (7), we obtain

$$\dot{t}^2 \left[\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{x}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \frac{1}{x} \right] = 0\,.$$

Hence

$$x\,\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(x\,\frac{dx}{dt}\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{eq. (8)}\,.$$

Integrating eq. (8) twice over t, we have

$$\frac{dx^2}{dt} = 2(t - t_0)\,,$$

$$x^2 = (t - t_0)^2 + R^2\,, \tag{13}$$

with t_0 and R^2 integration constants.

(c) Setting $t_0 = 0$ and differentiating eq. (13) with respect to t we have $dx/dt = t/x$. The square of the tangent vector $\dot{x}^\mu$ to a geodesic is

$$g_{\mu\nu}\,\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \frac{a^2}{x^2}\left[-\dot{t}^2 + \dot{x}^2\right] = \frac{a^2\dot{t}^2}{x^2}\left[-1 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right] = \frac{a^2\dot{t}^2}{x^2}\left[-1 + \frac{t^2}{x^2}\right] = -\frac{a^2\dot{t}^2}{x^4}\,R^2 = -a^2k^2R^4\,,$$

where k is the contant in (6). **Timelike godesics have $\boldsymbol{R \neq 0}$, whereas null geodesics have $\boldsymbol{R = 0}$.**