Problema 3 [4.5 puntos]. Considérese una distribución de materia que produce un campo gravitatorio estático con simetría esférica, de forma que en unas ciertas coordenadas (t, r, θ, ϕ) la métrica se escribe

$$ds^2 = -f(r)\, dt^2 + h(r)\, dr^2 + r^2\, (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\,, \tag{1}$$

donde los rangos de las coordenadas son los de la ec. (1). En estas coordenadas el tensor energía-momento de la distribución está dado por

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)\, u_\mu u_\nu + p\, g_{\mu\nu}\,.$$

Aquí u^μ es la cuadrivelocidad con la que se mueve el elemento de volumen de materia en x^μ, el cual elemento tiene densidad $\rho(x^\mu)$ y ejerce presión $p(x^\mu)$ en cualquier dirección. El vector u^μ está dado por

$$u_\mu = (-\sqrt{f}\,, 0, 0, 0)\,.$$

Nótese que ρ y p son escalares y que las funciones f y h NO son las las de la métrica de Schwarzschild, pues el lado derecho de las ecuaciones de Einstein no es cero ya que $T_{\mu\nu} \neq 0$.

(1) Encuéntrense las condiciones que deben satisfacer ρ y p para que $T^{\mu\nu}$ sea conservado.

(2) En lo que sigue supondremos que

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 & \text{si} \;\; r \leq R \\ 0 & \text{si} \;\; r > R \end{cases}\,, \qquad\qquad p = \begin{cases} p(r) & \text{si} \;\; r \leq R \\ 0 & \text{si} \;\; r > R \end{cases}\,,$$

con ρ_0 una constante. A partir de las componentes tt y rr de las ecuaciones de Einstein determínese $h(r)$ para $r < R$.

(3) Determínese la ecuación diferencial que satisface $p(r)$.

(4) Supóngase adicionalmente que $GR^2\rho_0/c^2 \ll 1$ y que $p(r) \ll \rho_0$. Determínese $p(r)$.

Como condición de contorno en todo lo anterior supóngase que la métrica es regular en el origen.

Datos

Los únicos símbolos de Christoffel distintos de cero de la métrica (1) son

$$\Gamma^t{}_{tr} = \frac{f'}{2f}$$

$$\Gamma^r{}_{tt} = \frac{f'}{2h}\,, \qquad \Gamma^r{}_{rr} = \frac{h'}{2h}\,, \qquad \Gamma^r{}_{\theta\theta} = -\,\frac{r}{h}\,, \qquad \Gamma^r{}_{\phi\phi} = -\,\frac{r\sin^2\theta}{h}\,,$$

$$\Gamma^\theta{}_{r\theta} = \frac{1}{r}\,, \qquad \Gamma^\theta{}_{\phi\phi} = -\sin\theta\,\cos\theta\,,$$

$$\Gamma^\phi{}_{r\phi} = \frac{1}{r}\,, \qquad \Gamma^\phi{}_{\theta\phi} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,.$$

A partir de éstos se obtienen las siguientes componentes no nulas del tensor de Ricci:

$$\begin{aligned} R_{tt} &= \frac{f''}{2h} + \frac{f'}{rh} - \frac{f'^2}{4fh} - \frac{f'h'}{4h^2}\,, \\ R_{rr} &= -\frac{f''}{2f} + \frac{f'^2}{4f^2} + \frac{f'h'}{4fh} + \frac{h'}{rh}\,. \\ R_{\theta\theta} &= 1 - \frac{1}{h} - \frac{rf'}{2fh} + \frac{rh'}{2h^2}\,. \\ R_{\phi\phi} &= \sin^2\!\theta\, R_{\theta\theta}\,. \end{aligned}$$

Finalmente, el escalar de Ricci resulta ser

$$R = R^{\mu}{}_{\mu} = -\frac{f''}{fh} - \frac{2f'}{rfh} + \frac{2h'}{rh^2} + \frac{2}{r^2}\Big(1 - \frac{1}{h}\Big) + \frac{f'}{2fh}\Big(\frac{f'}{f} + \frac{h'}{h}\Big)\,.$$

Solución

Antes de resolver el problema, un comentario. Para que exista una solución estática el elemento de volumen de materia en torno a x^μ debe permanecer en reposo, por lo que las componentes espaciales de la velocidad u^μ deben ser cero. La condición $u^2 = -1$ se reduce entonces a $f(u^0)^2 = 1$, de donde se sigue $u^\mu = \big(1/\sqrt{f}\,, 0, 0, 0\big)$. Y de aquí $u_\mu = g_{\mu\nu}u^\nu = \big(-\sqrt{f}\,, 0, 0, 0\big)$, tal y como se dice en el enunciado. Pasemos al problema

(1) Para que $T_{\mu\nu}$ se conserve tiene que verificarse $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Ahora bien, usando la regla de Leibniz para ∇_μ y que ρ y p son escalares, resulta

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \big[\partial_\mu(\rho+p)\big]\, u^\mu u^\nu + (\rho+p)\,(\nabla_\mu u^\mu)\, u^\nu + (\rho+p)\, u^\mu(\nabla_\mu u^\nu) + g^{\mu\nu}\partial_\mu p\,.$$

Con la ayuda de las expresiones de $\Gamma^{\mu}{}_{\mu\lambda}$ es inmediato que

$$\nabla_\mu u^\mu = \partial_\mu u^\mu + \Gamma^{\mu}{}_{\mu\alpha}\, u^\alpha = \partial_t u^t + \partial_t(\ln\sqrt{-g}\ )\, u^t = 0 \quad \text{(pues nada depende de } t)\,,$$

$$u^\mu(\nabla_\mu u^\nu) = u^\mu\left(\partial_\mu u^\nu + \Gamma^{\nu}{}_{\mu\alpha}u^\alpha\right) = u^t\big(\partial_t u^\nu + \Gamma^{\nu}{}_{tt}u^t\big) = (u^t)^2\,\Gamma^{r}{}_{tt}\,\delta^{\nu}{}_{r} = \frac{f'}{2fh}\,\delta^{\nu}{}_{r}\,.$$

La ecuación de conservación toma entonces la forma

$$\frac{1}{f}\,\delta^{\nu}{}_{t}\,\partial_t(\rho+p) + \delta^{\nu}{}_{r}\,(\rho+p)\,\frac{f'}{2fh} + g^{\nu\mu}\,\partial_\mu p = 0\,.$$

Las componentes de ésta son

$$\begin{aligned} \nu = t:&\quad \partial_t\rho = 0\,, \\ r:&\quad (\rho+p)\,\frac{f'}{2f} + \partial_r p = 0\,, \qquad (2) \\ \theta:&\quad \partial_\theta p = 0\,, \\ \phi:&\quad \partial_\phi p = 0\,. \end{aligned}$$

(2) En la zona $0 \leq r \leq R$ las ecuaciones de Einstein se escriben

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, R = 8\pi G \left[\, (\rho_0 + p)\, u_\mu\, u_\nu + p\, g_{\mu\nu} \,\right].$$

Usando el dato del problema, las componentes del lado izquierdo $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu} R$ se reducen a

$$\begin{aligned}
G_{tt} &= \frac{f h'}{r h^2} + \frac{f}{r^2}\left(1 - \frac{1}{h}\right) = \frac{f}{r^2}\left[r\left(1 - \frac{1}{h}\right)\right]', \\
G_{rr} &= \frac{f'}{r f} - \frac{h}{r^2}\left(1 - \frac{1}{h}\right), \\
G_{\theta\theta} &= \frac{r^2 f''}{2 f h} + \frac{r f'}{2 f h} - \frac{r h'}{2 h^2} - \frac{r^2 f'^2}{4 f^2 h} - \frac{r^2 f' h'}{4 f h^2}, \\
G_{\phi\phi} &= \sin^2\!\theta\; G_{\theta\theta}.
\end{aligned}$$

Las componentes tt y rr de las ecuaciones de Esintein son, por tanto,

$$\frac{1}{r^2}\left[r\left(1 - \frac{1}{h}\right)\right]' = 8\pi G \rho_0 \tag{3}$$

$$\frac{f'}{r f} - \frac{h}{r^2}\left(1 - \frac{1}{h}\right) = 8\pi\, G p(r)\, h. \tag{4}$$

Integrando la ecuación (3) se obtiene

$$1 - \frac{1}{h} = \frac{8\pi}{3}\, G \rho_0 r^2 + \frac{k_0}{r} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{1}{1 - \dfrac{8\pi}{3}\, G\rho_0 r^2 + \dfrac{k_0}{r}},$$

donde k_0 es una constante de integración. Para que la métrica sea regular en el origen se necesita que h permanezca acotada cuando $r \to 0$, lo que a su vez requiere $k_0 = 0$. Así pues,

$$h = \frac{1}{1 - \dfrac{8\pi}{3}\, G\rho_0 r^2}.$$

(3) Substituyendo en la ec. (4) y usando (2) se llega a que

$$\frac{dp}{dr} = -\,\frac{4\pi G\, (\rho_0 + 3p)\, (\rho_0 + p)\, r}{3 - 8\pi G\, \rho_0\, r^2}.$$

(4) Teniendo en cuenta que estamos en la zona $r \leq R$, en la aproximación $G R^2 \rho_0 \ll 1$ y $p(r) \ll \rho_0$, la ecuacón anterior puede escribirse $(c = 1)$

$$\frac{dp}{dr} = -\,\frac{4\pi G\, \rho_0^2}{3}\, r.$$

Para resolver ésta se necesita una condición de contorno. De acuerdo con el enunciado, en la frontera $r = R$ la función p se anula. Así pues, $p(R) = 0$ y

$$p(r) = \frac{2\pi}{3}\, G \rho_0^2\, (R^2 - r^2).$$