UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA I
GRADO EN FÍSICA

Relatividad general y gravitación

Problemas

Los comentarios y apartados en rojo son de dificultad superior. Se recomienda intentarlos si se han resuelto y entendido los demás.

1. Argumentar que en la intersección de los dominios relativista $R \to R_{\text{Sch}}$ y cuántico $R \to R_{\text{Com}}$ la escala de masas (llamada masa de Planck) es aproximadamente 1.22 GeV$/c^2$. A partir de ella, obtener unidades para la longitud (longitud de Planck) y el tiempo (tiempo de Planck) y estimarlas numéricamente.

2. Considérese un observador en espacio de Minkowski,

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \,,$$

que se encuentra en el plano $x^2 = x^3 = 0$ y que se mueve con aceleración constante a en la dirección de x^1, de forma que en el sistema de referencia en reposo en cada instante el observador tiene velocidad $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ y aceleración $a^\mu = (0, \mathsf{a}, 0, 0)$.

(a) Resuélvanse las ecuaciones de las geodésicas de género tiempo para x^0 y x^1 como función del tiempo propio τ. ¿De qué curvas se trata?

(b) Hállese un cambio de coordendas $(x^0, x^1) \to (\eta, \rho)$ en las que

$$-(dx^0)^2 + (dx^1)^2 = -g_{\eta\eta}\, d\eta^2 + g_{\rho\rho}\, d\rho^2$$

y tal que $\rho =$*const* para el observador en las nuevas coordenadas. ¿Cuál es el tiempo propio para este observador?

(c) ¿Cuáles son las curvas de género luz en las coordenadas (η, ρ)?

3. Demostrar a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange para las geodésicas que:

(a) Toda coordenada de la que la lagrangiana no depende explícitamente da lugar a una cantidad conservada, cantidad asociada a invariancia bajo traslaciones en la dirección de la coordenada

(b) Para una métrica de la forma

$$ds^2 = dz^2 + g_{\mu\nu}(x, z)\, dx^\mu dx^\nu \,,$$

las líneas coordenadas de z (es decir, aquellas para las que $\ddot{z} = 0$ y $\dot{x}^\mu = 0$) son geodésicas.

4. Los símbolos de Christoffel pueden introducirse de la siguiente forma. Se parte de un sistema de coordenadas inerciales globales $\{x^\mu\}$ en el espacio de Minkowski, en las que la ecuación de una geodésica de género tiempo se escribe $\ddot{x}^\mu = 0$, donde el punto indica derivada con respecto al tiempo propio. Se pasa a un sistema de coordenadas arbitrario no inercial $\{y^\mu\}$ en el que la ecuación de la geodésica toma la forma

$$\ddot{y}^\mu + \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}\, \dot{y}^\nu\, \dot{y}^\lambda = 0\,,$$

con

$$\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha}\, \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^\nu \partial y^\lambda}$$

los símbolos de Christoffel. Demostrar a partir de

$$g_{\mu\nu}(y) = \eta_{\lambda\rho}\, \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\mu}\, \frac{\partial x^\rho}{\partial y^\nu}$$

que

$$\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}\, g^{\mu\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial y^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial y^\lambda} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial y^\rho} \right).$$

5. Considérese una partícula de masa m que se mueve según una geodésica en un espacio-tiempo con métrica estática

$$ds^2 = -e^{2U_{\rm N}(\mathbf{x})/c^2}\, c^2 dt^2 + h_{ij}(\mathbf{x})\, dx^i dx^j\,,$$

siendo $U_{\rm N}(\mathbf{x})$ el potencial gravitatorio de Newton. Demostrar que la ecuación correspondiente de capa de masas reproduce en el límite de campo débil no relativista la expresión

$$E = mc^2 \Big(1 + \frac{U_{\rm N}}{c^2} + \frac{1}{2}\, \frac{v^2}{c^2} + \dots \Big)$$

para la energía de la partícula.

6. Considérese en dimensión dos métricas de la forma

$$ds_2^2 = g_{\rho\rho}(\rho)\, d\rho^2 + g_{\phi\phi}(\rho)\, d\phi^2\,. \qquad 0 \le \phi < 2\pi\,.$$

Para ellas es usual definir la **distancia radial** $r(\rho)$ del punto (ρ, ϕ) al origen de coordenadas y la **longitud** $\ell(\rho)$ **de la curva cerrada** $\rho = const$ que pasa por dicho punto como

$$r(\rho) = \int_0^\rho d\rho' \sqrt{g_{\rho\rho}(\rho')} \qquad \text{y} \qquad \ell(\rho) = \int_0^{2\pi} d\phi\, \sqrt{g_{\phi\phi}(\rho)} = 2\pi \sqrt{g_{\phi\phi}(\rho)},$$

respectivamente. Para la métrica euclídea se tiene $g_{\rho\rho} = 1$ y $g_{\phi\phi} = \rho^2$. En este caso, $r(\rho) = \rho$, $\ell(\rho) = 2\pi\rho$ y el cociente entre ambas es $\ell(\rho)/r(\rho) = 2\pi$. Calcúlense $r(\rho)$, $\ell(\rho)$ y sus cocientes para las siguientes métricas

$(a)\;\; ds^2 = d\rho^2 + \sin^2\rho\, d\phi^2$	$0 \le \rho < \pi$	2-esfera
$(b)\;\; ds^2 = \dfrac{d\rho^2 + \rho^2\, d\phi^2}{(a^2 - \rho^2)^2}$	$0 \le \rho < a$	disco de Poincaré
$(c)\;\; ds^2 = d\rho^2 + a^2\, \tanh^2(\rho/a)\, d\phi^2$	$0 \le \rho < \infty$	puro semi-infinito

donde a es una constante con dimensiones de longitud.

Para entender por qué se llama a la métrica (c) del puro semi-infinito, basta notar que para ρ constante, la métrica es la de una circunferencia de radio $R = a\,\tanh(\rho/a)$ y que el radio de esta circunferencia se hace constante a grandes distanicas pues $R \to a$ para $\rho \to \infty$. Así pues, a grandes distancias, se trata de un cilindro de radio a. Por otro lado, según nos aproximamos al origen ($\rho \to 0$) el radio del cilindro disminuye hasta que se hace cero. Nótese finalmente que la métrica es regular en el origen pues $ds^2 \sim d\rho^2 + \rho^2\, d\phi^2$ para $\rho \to 0$.

7. Considérese la métrica

$$ds^2 = \frac{d\rho^2 + \rho^2\, d\phi^2}{(a^2+\rho^2)^{2\alpha}}\,, \quad 0 \le \rho < \infty, \quad 0 \le \phi < 2\pi,$$

con $0 \le \alpha < 1$. Calcúlese su escalar de Ricci. ¿Qué geometría describe para $a/\rho \ll 1$?

8. [Carroll 3.5] Considérese una 2-esfera con coordenadas (θ, ϕ) y métrica

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2.$$

(a) Demuéstrese que las líneas de longitud constante (ϕ = constante) son geodésicas, y que la única línea de latitud constante (θ = constante) que es geodésica es el ecuador $\theta = \pi/2$.

(b) Tómese un vector $v^\mu = (1, 0)$ y transpórtese paralelamente dando una vuelta completa a lo largo de una circunferencia de latitud constante. Determínense las componentes del vector resultante como funciones de θ.

9. Pruébese que para una geodésica $x^\mu(\lambda)$ con parámetro afín λ se tiene que

$$\frac{d}{d\lambda}\Big(-\, g_{\mu\nu}\,\frac{dx^\mu}{d\lambda}\,\frac{dx^\nu}{d\lambda}\Big) = 0\,.$$

Esto implica en particular que el género de la geodésica (tiempo, luz o espacio) se conserva.

10. Demuéstrese que la aceleración covariante $a^\mu = Du^\mu/D\tau$ para una partícula masiva satisface $u_\mu a^\mu = 0$.

11. La ecuación de transporte para un vector v^μ a lo largo de una curva $x^\mu(\lambda)$ es

$$\frac{Dv^\mu}{D\lambda} = \kappa(\lambda)\, v^\mu\,.$$

donde $\kappa(\lambda)$ es una función conocida. Encuéntrese un vector w^μ para el que el transporte sea paralelo, es decir, para el que $Dw^\mu/D\lambda = 0$.

12. Considérese el cambio de coordenadas $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \epsilon\,\xi^\mu(x)$, con ϵ pequeño. Para un tensor T se define la variación δT como $\delta T(x) = T'(x) - T(x)$. ¡Ojo a las primas!

a) Demuéstrese que para un vector V^μ se tiene que

$$\delta V^\mu(x) = -\,\epsilon\,\big[\,\xi^\alpha(\partial_a V^\mu) - (\,\partial_\alpha \xi^\mu)\, V^\alpha\,\big] + O(\epsilon^2)\,.$$

b) Demuéstrese que para la métrica $g_{\mu\nu}$ se tiene

$$\delta g_{\mu\nu}(x) = -\,\epsilon\left[\,\xi^\alpha(\partial_\alpha g_{\mu\nu}) + (\partial_\mu \xi^\alpha)\, g_{\alpha\nu} + (\partial_\nu \xi^\alpha)\, g_{\mu\alpha}\,\right] + O(\epsilon^2)\,.$$

Pruébese que esta ecuación puede escribirse como

$$\delta g_{\mu\nu}(x) = -\epsilon\left(\,\nabla_\mu\,\xi_\nu + \nabla_\nu\,\xi_\mu\,\right).$$

De aquí se sigue que si

$$\nabla_\mu\,\xi_\nu + \nabla_\nu\,\xi_\mu = 0 \tag{1}$$

el cambio $x^\mu \to x'^{\,\mu} = x^\mu + \epsilon\,\xi^\mu(x)$ es una simetría continua de la métrica, llamada **isometría**. Los vectores ξ^μ que satsifacen la condición (1) reciben el nombre de **vectores de Killing**. Los operadores diferenciales $\xi = \xi^\mu\partial_\mu$ que definen son los generadores infinitesimales de las isometrías.

Nota. Se define la derivada de Lie de un tensor T a lo largo de un vector ξ^μ como

$$\mathcal{L}_\xi T^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{T^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}(x) - T'^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}(x)}{\epsilon}\,.$$

En particular, la derivada de Lie de un vector V^μ es

$$\mathcal{L}_\xi V^\mu = \xi^\alpha\partial_a V^\mu - V^\alpha\partial_\alpha\xi^\mu = \xi^\alpha\nabla_\alpha V^\mu - V^\alpha\nabla_\alpha\xi^\mu = \nabla_\xi V^\mu - \nabla_V\xi^\mu\,.$$

13. Demuéstrese que si los coeficientes $g_{\mu\nu}$ de la métrica $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu\,dx^\nu$ no dependen de una coordenada, digamos z, entonces $\xi = \partial_z$ es un vector de Killing.

14. Demuéstrese que si ξ^μ es un vector de Killing y γ es una geodésica con vector tangente u^μ entonces $\xi_\mu u^\mu$ es constante a lo largo de γ.

15. Compruébese que los vectores

$$\begin{aligned}
\xi_{(1)} &= \partial_t,\\
\xi_{(2)} &= \sin\phi\,\partial_\theta + \cot\theta\,\cos\phi\,\partial_\phi,\\
\xi_{(3)} &= -\cos\phi\,\partial_\theta + \cot\theta\,\sin\phi\,\partial_\phi,\\
\xi_{(4)} &= -\partial_\phi,
\end{aligned}$$

son Killing para una métrica estática con simetría esférica. El primero de ellos genera traslaciones en el tiempo. Los tres últimos son las componentes del momento angular y generan rotaciones. Así pues, bajo traslaciones temporales y rotaciones la métrica (5) no cambia.

16. [Febrero 2016] Escríbanse cuatro vectores de Killing de la métrica ($c = 1$)

$$ds^2 = \frac{1}{z}\,(-dt^2 + dx^2 + dy^2) + z\,dz^2\,, \qquad x, y, x \in \mathbf{R}, \quad z \in \mathbf{R}_+\,.$$

17. Si $V = V^\mu \partial_\mu$ y $W = W^\mu \partial_\mu$ son campos vectoriales, demuéstrese que su conmutador tiene componentes

$$\begin{aligned}[V, W]^\mu &= V^\nu \partial_\nu W^\mu - W^\nu \partial_\nu V^\mu \\ &= V^\nu \nabla_\nu W^\mu - W^\nu \nabla_\nu V^\mu \,.\end{aligned}$$

Nota. Obsérvese que $[V, W]^\mu = \mathcal{L}_V W^\mu$.

18. Demuéstrese que si A^μ y B^μ son vectores de Killing, su conmutador $[A, B]^\mu$ también lo es.

19. [Junio 2013] Demuéstrese que todo vector de Killing satisface $\nabla^\alpha \nabla_\alpha \xi^\mu = -R^\mu{}_\alpha \xi^\alpha$.

20. [Junio 2014] Demuéstrese que si el vector χ^ν satisface

$$\nabla_\mu \chi_\nu + \nabla_\nu \chi_\mu = c\, g_{\mu\nu} \,, \qquad c = \text{constante} > 0$$

y γ es una geodésica de género luz con vector tangente u^μ, entonces $u^\mu \chi_\mu$ permance constante a lo largo de la geodésica.

21. Pruébese que $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta}$ a partir de $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\, g_{\lambda\rho} = 0$.

22. Demuéstrese la propiedad cíclica del tensor de Riemann a partir de $\nabla_{[\mu} \nabla_\nu \nabla_{\lambda]} \phi = 0$, con ϕ un campo escalar arbitrario.

23. [Junio 2013] Demuéstrese para dimensión mayor o igual que tres que si $R_{\mu\nu} = f\, g_{\mu\nu}$ entonces f es constante.

24. Un espacio-tiempo de dimensión dos tiene métrica

$$ds^2 = g_{00} dt^2 + 2\, g_{01} dt\, dx + g_{11} dx^2 \,,$$

donde $g_{\mu\nu}$ son funciones de t y x. Calcúlense las componentes del tensor de Riemann y del tensor de Ricci en términos del escalar de Ricci y de los coeficientes de la métrica.

Ayuda. De acuerdo con las simetrías del tensor de Riemann, éste sólo tiene una componente independiente, la R_{0101}, en términos de la cual se escriben todas las cantidades pedidas.

25. Sea un espacio-tiempo de dimensión D con métrica

$$ds^2 = \Omega^2\, h_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu, \quad \mu, \nu = 0, 1, \ldots, D-1 \,, \tag{2}$$

donde Ω es un función de las coordenadas x^μ y $h_{\mu\nu}$ es una métrica no plana. Calcúlense sus símbolos de Christoffel, el tensor de Ricci y el escalar de Ricci en términos de Ω y de la mismas cantidades para $h_{\mu\nu}$.

Nota. Las expresiones finales para las distintas cantidades pueden consultarse en cualquier libro. Ver por ejemplo el texto de Wald. A las métricas de este tipo se les llama conformemente equivalentes.

Si $h_{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski, la métrica (2) se dice conformemente plana. Toda métrica $ds_2^2 = g_{\mu\nu}(x)\, dx^\mu\, dx^\nu$ en dimensión dos es conformemente plana pues existe un cambio de coordenadas $x^\mu \to \tilde{x}^\mu(x)$ tal que $ds_2^2 = \Omega^2(\tilde{x})\, \eta_{\mu\nu}\, d\tilde{x}^\mu\, d\tilde{x}^\nu$. El único requisito es que $g_{\mu\nu}$ sean funciones reales analíticas de x^μ.

26. Considérese una métrica diagonal

$$g_{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \mu \neq \nu \\ \neq 0 & \text{si} \quad \mu = \nu \end{cases},$$

cuyos coeficientes no nulos $g_{\mu\mu}(x)$ son funciones de todas las coordenadas x^ρ. Calcúlense sus símbolos de Christoffel.

27. Una obtención alternativa a la presentada en clase de la ecuación para la desviación geodésica

$$\frac{D^2\xi^\mu}{D\tau^2} = R^\mu{}_{\nu\lambda\rho}\, \frac{dx^\nu}{d\tau}\, \frac{dx^\lambda}{d\tau}\, \xi^\rho \tag{3}$$

es la siguiente. Sea $x^\mu(\tau, s)$ una familia de geodésicas, con τ un paramétro afín a lo largo de las distinas geodésicas que forman la familia y s el parámetro que distingue entre ellas. Es decir,

$$u^\mu = \frac{\partial}{\partial\tau}\, x^\mu(\tau, s)\,, \qquad \xi^\mu = \frac{\partial}{\partial s}\, x^\mu(\tau, s)\,.$$

La condición

$$\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial s}\, x^\mu(\tau, s) = \frac{\partial^2}{\partial s\partial\tau}\, x^\mu(\tau, s) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial\tau}\, \xi^\mu(\tau, s) = \frac{\partial}{\partial s}\, u^\mu(\tau, s)$$

se escribe en forma covariante

$$u^\alpha\nabla_\alpha\xi^\mu - \xi^\alpha\nabla_\alpha u^\mu = [u\,,\,\xi]^\mu = 0\,. \tag{4}$$

a) Usando (4) y que las geodésicas satisfacen $u^\alpha\nabla_\alpha u^\mu = 0$, demostrar que

$$\frac{D^2\xi^\mu}{D\tau^2} = (u^a\nabla_\alpha)^2\xi^\mu$$

está dada por el lado derecho de la ec. (3).

b) Demostrar que si, en lugar de la conexión de Levi-Civita, se utiliza una conexión afín no simétrica, la ecuación (4) no es cierta.

28. Demuéstrese que, al variar la métrica $g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$, los símbolo de Christoffel cambian de acuerdo con

$$\delta\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}\, g^{\mu\sigma}\, \big(\, \nabla_\nu\, \delta g_{\sigma\lambda} + \nabla_\lambda\, \delta g_{\nu\sigma} - \nabla_\sigma\, \delta g_{\nu\lambda} \big)\,.$$

29. [Febrero 2016] Una partícula con masa se mueve en un campo gravitatorio descrito en coordenadas locales (t, x, y, z) por la métrica

$$ds^2 = -e^{-2ax/c^2}\, c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2\,.$$

Escríbanse las ecuaciones de las geodésicas usando como parámetro afín su tiempo propio τ. Si su velocidad inicial es cero, es decir, $dx/dt = dy/dt = dz/dt = 0$ en $t = 0$, calcúlese $dx^2/d\tau^2$ en $t = 0$.

30. Una partícula con masa que se mueve en una geometría

$$ds^2 = -f(r)\,dt^2 + h(r)\,dr^2 + r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2)\,, \tag{5}$$

con $fh = 1$. La partícula sigue una órbita $r = R = const$, $\theta = \pi/2$. Demuéstrese que su momento angular por unidad de masa L está dado por

$$L^2 = \frac{R^3 f'(R)}{2f(R) - R\,f'(R)}\,,$$

Particularícese para el caso de Schwarzschild

$$f = h^{-1} = 1 - \frac{2m}{r}\,.$$

31. Considérese una **partícula en reposo** en una métrica estática arbitraria

$$ds^2 = -g_{00}(\mathbf{x})\,dt^2 + h_{ij}(\mathbf{x})\,dx^i\,dx^j\,.$$

Demuétrese que su aceleración covariante es

$$a^\mu = \frac{Du^\mu}{D\tau} = u^\alpha \nabla_\alpha u^\mu = \frac{c^2}{g_{00}}\,\Gamma^\mu{}_{00}\,.$$

El resultado obviamente depende del sistema de coordenadas elegido. Calcúlese su norma $a^2 = g_{\mu\nu} a^\mu a^\nu$, invariante bajo transformaciones de coordenadas. Particularícese para la métrica de Schwarzschild y razónese que la fuerza necesaria para que la partícula se mantenga en su órbita se hace infinita en $r = 2m$.

32. [Septiembre 2016] Considérese el espacio-tiempo bidimensional

$$ds^2 = \frac{a^2}{x^2}\left(-\,dt^2 + dx^2\right), \quad t \in \mathbf{R}, \quad x \in \mathbf{R}_+\,, \quad a = \text{const.}$$

(a) Demuéstrese que las ecuaciones de las geodésicas son

$$\dot t = kx^2 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot t - \frac{2}{x}\,\dot t \dot x = 0\,, \tag{6}$$

$$\ddot x - \frac{1}{x}\left(\dot t^2 + \dot x^2\right) = 0\,, \tag{7}$$

donde el punto indica derivada con respecto a un parámetro afín y k es una constante (cantidad conservada). Ecuéntrense a partir de ellas los símbolos de Christoffel.

(b) Demuestrése que las geodésicas están dadas por

$$x^2 - (t - t_0)^2 = R^2\,,$$

donde t_0 y R son constantes reales. Ayuda: escribir la ec. (II) como

$$\frac{d^2x^2}{dt^2} = 2 \tag{8}$$

e integrar esta última.

(c) Tómese $t_0 = 0$, calcúlese $g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu$ y discútase el género de las geodésicas atendiendo al valor de R.

33. Considérese la métrica de Schwarzschild y un observador con coordenadas espaciales $r = r_0, \theta = \pi/2$, $\phi = \phi_0$ ¿Es un observador en caída libre?

34. Considérese una sección $(t = t_0, \theta = \pi/2)$ de la geometría de Schwarzschild, de forma que la métrica en dicha sección toma la forma

$$ds_2^2 = \frac{dr^2}{1-\frac{2m}{r}} + r^2\, d\phi^2\,.$$

Encuéntrese una superficie en $\mathbf{R}^3$ que tenga el mimso elemento de línea. Para ello tómese como punto de partida la métrica euclídea en coordenadas cilíndricas,

$$ds_3^2 = dz^2 + dr^2 + r^2\, d\phi^2,$$

y búsquese una superficie parametrizada por r y ϕ con ecuaciones $z = z(r)$, $r = r$, $\phi = \phi$ sobre la que la métrica ds_3^2 se reduzca al elemento de línea ds_2^2. En caso de necesitar una condición de contorno, úsese $z = 0$ para $r = 2m$. Con la ayuda de algún programa de manipulación simbólica (Maple, Mathematica, Reduce, etc.) hágase una gráfica de dicha superficie.

35. [Septiembre 2013] Considérese la geometría de Schwarzschild. Demuéstrese que en la proximidades del radio de Schwarzschild, $r \sim R_{\rm Sch} = 2m$ la métrica en las secciones (t, r) se reduce a la métrica de Rindler en coordenadas adecuadas.

36. Encuéntrese el cambio $r = r(\rho)$ para el que la métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = -\Big(1-\frac{2m}{r}\Big)\, dt^2 + \frac{1}{1-\dfrac{2m}{r}}\, dr^2 + r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\!\theta\, d\phi^2)$$

se escribe

$$ds^2 = -A(\rho)\, dt^2 + B(\rho)\,\big[\, d\rho^2 + \rho^2\,(d\theta^2 + \sin^2\!\theta\, d\phi^2)\,\big]\,.$$

Calcúlense $A(\rho)$ y $B(\rho)$.

37. [Junio 2015] Un cuerpo con simetría esférica y masa M produce en su exterior un campo gravitatorio dado por $(c = 1)$

$$ds^2 = -\Big(1-\frac{2GM}{r}\Big)\, dt^2 + \Big(1+\frac{2GM}{r}\Big)\, dr^2 + r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\!\theta\, d\phi^2)\,,$$
$$-\infty < t < \infty,\quad 0 \le r,\quad 0 \le \theta \le \pi,\quad 0 \le \phi < 2\pi\,.$$

(1) Discútase si es posible que un fotón quede atrapado en una órbita circular de radio $r = r_0 > 2GM$.

(2) De ser el caso, determínese r_0 y calcúlese el tiempo coordenado que tarda el fotón en completar una vuelta.

(3) Y una partícula masiva, ¿es posible que se quede atrapada en una órbita circular?

(4) La métrica dada puede interpretarse como como una aproximación más refinada del campo gravitatorio newtoniano producido por un cuerpo de masa M; por ejemplo, la Tierra. De acuerdo con los resultados de los apartados (1) y (2), ¿un fotón puede dar vueltas alrededor de la Tierra por la atracción gravitatoria que ésta ejerce sobre él?

38. [Junio 2013] Un fotón se mueve en el campo gravitatorio estático producido por un cuerpo esférico (métrica de Schwarzschild). El fotón puede quedarse atrapado en una órbita circular, coordenada radial constante.

(a) Calcúlese el radio de dicha órbita en términos del radio gravitatorio del cuerpo que produce el campo.

(b) Hállese el período de la órbita en el tiempo coordenado.

(c) Determínese el período de la órbita en el tiempo propio de un observador que se encuentra en un punto de dicha órbita.

39. [Septiembre de 2016] Considérense dos observadores en reposo en un campo gravitatorio dado por

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{r^2}{\ell^2}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 + \frac{r^2}{\ell^2}} + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2\right),$$

donde ℓ es una constante con dimensiones de longitud. El primero se encuentra en $r_1 = a$, $\theta_1 = \pi/2$, $\phi_1 = 0$; y el segundo en $r_2 = b$, $\theta_2 = \pi/2$, $\phi_2 = 0$, con $b < a << \ell$. El primero emite luz que viaja con $\theta = \pi/2$ y $\phi = 0$ y ésta es observada por el segundo. Calcúlese el desplazamiento que observa este último e indíquese si es hacia el infrarrojo o hacia el ultravioleta.

Nota. Ésta es la métrica de anti-de Sitter.

40. ...Algunos de vosotros me habéis preguntado (enero 2015) en tutorías sobre las afirmaciones que se hacen en la película Interstellar, y en algunos libros de ciencia-ficción, sobre cómo transcurren los tiempos cuando se aproxima uno a agujeros negros. Este problema y el que sigue pueden ayudaros a discernir lo científico de lo demás. Insisto en lo dicho en clase: centraos en estudiar la asignatura (entender lo que es caída libre, lo que es una conexión, cómo se describe la curvatura, manejar índices, la importancia de los Killing, de las cantidades conservadas, etc. etc.) y luego ...

(a) Demuéstrese que el tiempo propio que un observador en caída libre en la dirección radial en la geometría de Schwarzschild tarda en alcanzar $r = r_1$, si inicialmente se encuentra en reposo en $r = r_0 > 2m$, es

$$\tau_{r_0 \to r_1} = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{r_0^3}{8m}}\,\big(\alpha_1 + \sin\alpha_1\big)\,,$$

donde el ángulo α_1 es la solución entre 0 y π a la ecuación

$$r_1 = \frac{r_0}{2}\big(1 + \cos\alpha_1\big)\,.$$

Este resultado prueba que el observador en caída libre tarda un tiempo finito en alcanzar el radio de Schwarzschild pues, en este caso $r_1 = 2m$. Nótese que este tiempo finito del que hablamos es el tiempo propio del observador, es decir el que mide él mismo.

(b) Como caso particular tómese $r_1 = 0$. Entonces se tiene $\alpha_1 = \pi$ y

$$\tau_{r_0 \to 0} = \frac{\pi}{c} \sqrt{\frac{r_0^3}{8m}} \,.$$

Considérese el caso del Sol y supóngase que el observador parte de la superficie del mismo ($r_0 = R_{\text{Sol}} \approx 7 \times 10^{10}$cm). Pruébese que $\tau_{R \to 0} \approx 30$ minutos.

Nota. El tiempo $\tau_{r_0 \to 0}$ puede interpretarse como una estimación del tiempo de colapso gravitacional. En un cuerpo estable, a la fuerza gravitaroria se opone la presión interna del cuerpo, de sentido contario. Si la fuerza gravitatoria es mayor, el equilibrio se rompe y se produce colapso hasta que la presión interna vuelve a igualar a la fuerza gravitatoria. Esta interpretación como tiempo de colapso gravitacional es un tanto formal pues no tiene en cuenta la forma de la métrica en el interior del cuerpo.

41. Considérese, en un campo gravitatorio de Schwarzschild, **un observador estático infinitamente alejado**, de forma que su coordenada r es constante pero muy grande. Como

$$-d\tau_\infty^2 \approx -dt^2 \left[1 + \left(\frac{d\mathbf{x}_\infty}{dt}\right)^2\right] = -dt^2 \quad \text{para} \quad r \to \infty \quad \text{y} \quad \frac{d\mathbf{x}_\infty}{dt} = 0 \,,$$

su tiempo propio τ_∞ es proporcional al tiempo coordenado t. Este observador percibe la trayectoria de **un segundo observador en caída libre** como una función de τ_∞, que, de acuerdo con lo anterior, puede tomarse como el tiempo coordenado t. Para el segundo observador se tiene

$$E = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} \,, \tag{9}$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = 0 \ \text{(caída libre)} \,, \tag{10}$$

$$E^2 = \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + 1 - \frac{2m}{r} \,, \tag{11}$$

con τ su tiempo propio. Demuéstrese a partir de las ecs. (9) y (11) que

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{r - 2m}{2m} \quad \text{para} \quad r \to 2m^+$$

Téngase en cuenta al hacerlo que r decrece según aumenta t. Pruébese que el tiempo que según el observador estático tarda el observador en caía libre en alcanzar $r = 2m$ es infinito. Es decir, el observador estático nunca verá al observador en caída libre alcanzar el radio de Schwarzschild.

42. Sea la métrica

$$ds^2 = -dt^2 + \Big(1 + a \sin\big[\omega(t - z)\big]\Big) dx^2 + \Big(1 - a \sin\big[\omega(t - z)\big]\Big) dy^2 + dz^2 \,, \tag{12}$$

con $a \ll 1$. Esta métrica es un ejemplo típico de onda gravitacional. Demuéstrese que un observador con x, y, z fijos en el campo gravitatorio producido por dicha métrica se encuentra en caída libre. Nótese que el tiempo propio para dicho observador y el tiempo coordenado tienen el mismo lapso, $d\tau_{\rm obs} = dt$.

Considérese un observador en $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ y un espejo en $(x, y, z) = (L, 0, 0)$. De acuerdo con lo dicho en el párrafo anterior, ambos satisfacen las ecuaciones de las geodésicas de género tiempo. En un instante coordenado t_0 el observador envía una señal luminosa al espejo, la cual lo alcanza en t_1 y es reflejada. Para cuando retorna al observador el tiempo transcurrido desde que éste envió la señal es Δt. Calcúlese Δt.

Para ello deben resolverse las ecuaciones de la geodésicas de género luz, pues la señal luminosa viaja según ellas. Búsquese una solución con $\dot{y}(\lambda) = 0$ a lo largo de la geodésica, donde λ es un parámetro afín.

Solución. A primer orden en a se tiene

$$\Delta t \approx 2L\left(1 + \frac{a}{2}\sin\omega t_0\right).$$

Este resultado establece que el tiempo medido (pues el observador está en reposo y su lapso de tiempo propio es igual al coordenado) depende de forma oscilatoria del instante de tiempo en que se produce la emisión. La cantidad $c\Delta t/2$ puede interpretarse como distancia entre el observador y el espejo, de forma que la onda gravitacional descrita por la métrica se manifiesta mediante una distancia fluctuante. El 11 de febrero de 2016 se anunció la detección experimental de ondas gravitacionales por la colaboración LIGO (Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory). El experimento consiste en medir las fluctuaciones en la distancia debidas a una métrica de tipo onda gravitacional analizando los patrones de interferencia para la luz en un interferómetro. La onda gravitacional se produjo cuando dos agujeros negros colisionaron para formar uno en una galaxia alejada de la Tierra algo más de 10^3 millones de años luz.

43. Considérese la métrica

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{dr^2}{1 - m^2 r^2} + r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2), \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \theta < \pi, \quad 0 \leq \phi < 2\pi\,,$$

con m un parámetro con dimensiones de masa.

(a) Demuéstrese que la trayectoria de un fotón satisface

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = r^2\,(1 - m^2 r^2)\,(\mu^2 r^2 - 1)\,,$$

con μ una constante positiva. Identifíquese μ en términos de la energía y del momento angular del fotón.

(b) A partir de esta ecuación, pruébese que en esta geometría los rayos de luz se mueven según elipses. Calcúlense sus semiejes mayor y menor.

44. La métrica de Reissner-Nordstrøm

$$ds^2 = -\Big(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2}\Big)\,dt^2 + \Big(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2}\Big)^{-1} dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right)$$

es una solución a las ecuaciones de Einstein con $\Lambda = 0$ y $T_{\mu\nu}$ el producido por un campo electromagnético. Describe el campo gravitatorio de una estrella cargada con simetría esférica.

En unidades adecuadas, los parámetros m y q son proporcionales a la masa y la carga de la estrella. Supóngase que $m^2 > q^2$.

(a) Demuéstrese que para $q \neq 0$ una partícula sin carga que cae radialmente no puede alcanzar $r = 0$. Compárese esta situación con el caso de la métrica de Schwarzschild del ejercicio anterior.

(b) Determínese la coordenada $r_{\text{mín}}$ del punto de máximo acercamiento para una partícula masiva que inicialmente se encuentra en reposo en el infinito. Pruébese que $r_{\text{mín}} < r_-$, donde r_- es la menor de las dos raíces de la ecuación $1 - 2m/r + q^2/r^2 = 0$.

45. Considérese el espacio-tiempo de Vaidya de tipo entrante o "ingoing", (también llamado avanzado o "advanced")

$$ds^2 = -\left[1 - \frac{2\,M(v)}{r}\right] dv^2 + 2dv\,dr + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2)\,. \tag{13}$$

En esta expresión $M(v)$ es una función que depende sólo de la coordenada v.

(1) Obténgase las ecuaciones de las geodésicas usando $L = g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu$ como lagrangiana efectiva.

(2) A partir de dichas ecuaciones encuéntrense los símbolos de Christoffel no nulos.

(3) Demuéstrese que la única componente no nula del tensor de Ricci es

$$R_{vv} = \frac{2\,M'(v)}{r^2}\,,$$

donde la prima denota derivada con respecto a v.

(4) Considérense geodésicas radiales, es decir con θ y ϕ constantes. Demuéstrese que

(4a) si además $v =$const las geodésicas son de tipo luz y no puede haber geodésicas de tipo tiempo,

(4b) si v no es constante pero satisface

$$\frac{dr}{dv} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{2M(v)}{r}\right] \tag{14}$$

son también geodésicas de tipo luz.

(5) Supóngase que para una $M(v)$ la solución de la ecuación (14) es la función $r = r_0(v)$. Pruébese que entonces $M(v)$ está dada por

$$M(v) = \frac{1}{2}\,r_0(v)\left[1 - 2\,r_0'(v)\,\right].$$

(6) Obviamente la forma de $r_0(v)$ no puede ser determinada si no se sabe la de $M(v)$ y al contrario. Sin embargo, sí que puede estudiarse cómo se comportan las familias (o congruencias) de geodésicas radiales nulas en un entorno de la singularidad $r = 0$, $v = 0$. Para ello se supone una solución $r_0(z)$ y se hace el cambio de $z = r + r_0(v)$. La cantidad z puede entenderse como lo que se desvía la geodésica $r(v)$ de la dada $r_0(v)$. Pruébese que la ecuación (14) toma la forma

$$\left[\,r_0(v) + z\,\right]\frac{dz}{dv} + z\left[r_0'(v) - \frac{1}{2}\right] = 0\,. \tag{15}$$

(7) Supóngase que $r_0 \sim 2\mu v^n$, con $\mu > 0$ constante y $n > 1$ real , que corresponde a una geodésica bien definida según se aproxima ésta a la singularidad. Supóngase que la desviación z es pequeña, es decir, $r_0 >> |z|$. Entonces el término zz' en la ecuación (15) puede despreciarse. Pruébese que la solución a la ecuación diferenical que queda es

$$z \sim \frac{C}{v^n} \exp\left[-\frac{1}{4\mu\,(n-1)\,v^{n-1}} \right],$$

con C una constante arbitraria. Nótese que $z \to 0$ para $v \to 0$, por lo que $r \to 0$ si $v \to 0$

Nota. La métrica (13) puede entenderse la siguiente manera. Si en la métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \dfrac{2M}{r}} + r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$$

se hace el cambio

$$t = v - r - 2m\,\ln\left(\frac{r}{2M}\right) \quad \Rightarrow \quad dr = dv - \frac{dr}{1 - \dfrac{2M}{r}}$$

se obtiene la de Vadya con radio de Schwarzschild M constante. La métrica de Vadya generaliza la de Schwarschild al caso de un M que depende de la coordenada nula avanzada v. También puede hacerse el cambio

$$t = u + r + 2m\,\ln\left(\frac{r}{2M}\right) \quad \Rightarrow \quad dr = du + \frac{dr}{1 - \dfrac{2M}{r}}$$

y suponer que M depende de la coordenada nula retardada u. a la métrica que resulta se le llama métrica de Vaidya retardada.

Lecturas complementarias. Más propiedades sobre las geodésica de tipo luz pueden encontrarse en

– Y. Kuroda, "Naked singularities in te Vaidya spacetime", Prog. Theor. Phys. **72** (1984) 63.

46. Considérese la métrica

$$ds^2 = -\,du\,dv + dx^2 + dy^2 + F(u,x,y)\,du^2 \tag{16}$$

donde se han introducido coordenadas $u = t - z$ y $v = t + z$.

(a) Calcúlense los símbolos de Christoffel para una función arbitraria F de sus argumentos. Calcúlense el tensor de Ricci y la curvatura escalar.

(b) Como los coeficientes de la métrica no dependen de la coordenda v, el vector $\xi = \partial_v$ es Killing. Calcúlese su género. Demuéstrese que $\nabla_\mu \xi_\nu = 0$.

(c) Resuelvánse las ecuaciones de la geodésica para $F = m^2(x^2 - y^2)$, con m un parámetro con dimensiones de masa.

(d) Escríbanse las ecuaciones de Einstein en vacío (sin constante cosmológica) y discútase si la función F del apartado anterior es solución de las mismas.

(e) Discutir el género del vector de Killing $\xi = \partial_u$ para la función F del apartado (c).

(f) Búsquese una solución a las ecuaciones de Einstein con F una función de $x^2 + y^2$. Encuéntrese en este caso un tercer vector de Killing.

Nota. Las métricas del tipo (16) reciben el nombre de métricas pp.

47. [Septiembre 2013] Encuéntrense las funciones $f(v)$ para las que la métrica

$$ds^2 = 2\,du\,dv + f(v)\,dw^2 + 2\,dw\,dz$$

es una solución a las ecuaciones de Einstein en vacío. Discútase si la métrica resultante es no plana o se reduce a la euclídea mediante un cambio de coordenadas adecuado.

48. [Febrero 2016] Un espacio-tiempo está descrito en coordenadas locales (t, x, y, z) por la métrica $(c = 1)$

$$ds^2 = -\big[dt + f(x)\,dx\big]^2 + dx^2 + dy^2 + \,dz^2\,,$$

con $f(x)$ función de x. Discútase si se trata de un espacio-tiempo plano. ¿Existen coordenadas en las que la métrica toma la forma de Minkowski.

49. [Septiembre 2016] Determínese la función $f(z)$ para que

$$ds^2 = f^2(z)\,\big(-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2\big)$$

sea solución de las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}\,R + \Lambda\,g_{\mu\nu} = 0\,. \tag{17}$$

Determínese el signo de Λ.

50. [Febrero 2016] Considérese una métrica dada por

$$ds^2 = -dt^2 + t^{2a}\,dx^2 + t^{2b}dy^2 + t^{2c}dz^2\,,$$

con a, b, c reales. Calcúlense las condiciones que deben satisfacer a, b y c para que sea solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío. ¿Existen soluciones para a, b y c enteros?

51. Calcúlense los símbolos de Christoffel y el tensor de Ricci y resuélvanse las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica ($\Lambda \neq 0$ y $T_{\mu\nu} = 0$) para una métrica

$$ds^2 = r^2\,(dx^2 + dy^2) - 2du\,dr + H(r)\,du^2\,, \qquad -\infty < x, y, u < \infty\,, \qquad r > 0.$$

52. [Junio 2014] Una distribución de materia tiene tensor energía-momento dado por

$$T^t{}_t = \rho, \quad T^r{}_r = T^\theta{}_\theta = T^\phi{}_\phi = p\,,$$

con ρ y p constantes. Dicha distribución produce un campo gravitatorio con métrica

$$ds^2 = -dt^2 + h(r)\,dr^2 + r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2)\,, \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \theta < \pi, \quad 0 \leq \phi < 2\pi\,.$$

Resuélvanse las ecuaciones de Einstein $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi \mathrm{G} T_{\mu\nu}$. Compruébese explícitamente que $T_{\mu\nu}$ es conservado.

53. [Junio 2015] Considérese una distribución de materia que produce un campo gravitatorio estático con simetría esférica, de forma que en unas ciertas coordenadas (t, r, θ, ϕ) la métrica se escribe

$$ds^2 = -f(r)\,dt^2 + h(r)\,dr^2 + r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2)\,, \tag{18}$$

donde

$$-\infty < t < \infty, \quad 0 \leq r, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi < 2\pi\,.$$

En estas coordenadas el tensor energía-momento de la distribución está dado por

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)\,u_\mu u_\nu + p\,g_{\mu\nu}\,.$$

con u^μ el vector

$$u_\mu = (-\sqrt{f}\,, 0, 0, 0)$$

y ρ y p escalares que pueden depender de las cuatro coordenadas t, r, θ y ϕ. Las funciones f y h **NO** son las las de la métrica de Schwarzschild, pues el lado derecho de las ecuaciones de Einstein no es cero ya que $T_{\mu\nu} \neq 0$. Supóngase que la métrica es regular en $r = 0$.

(1) Encuéntrense las condiciones que deben satisfacer ρ y p para que $T^{\mu\nu}$ sea conservado.

(2) En lo que sigue tómese

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 & \text{si } \; r \leq R \\ 0 & \text{si } \; r > R \end{cases}\,, \qquad\qquad p = \begin{cases} p(r) & \text{si } \; r \leq R \\ 0 & \text{si } \; r > R \end{cases}\,,$$

con ρ_0 una constante. A partir de las componentes tt y rr de las ecuaciones de Einstein determínese $h(r)$ para $r < R$.

(3) Determínese la ecuación diferencial que satisface $p(r)$.

(4) Supóngase adicionalmente que $GR^2 \ll 1$ y que $p(r) \ll \rho_0$. Determínese $p(r)$.

Aunque no es necesario para resolver el problema, la distribución de materia dada por este $T_{\mu\nu}$ es la de un fluido en el que un elemento de volumen en x^μ tiene densidad $\rho(x^\mu)$ y ejerce presión $p(x^\mu)$ en cualquier dirección.

54. Un campo gravitatorio está dado por la métrica $(c = 1)$

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2Ht}\,\delta_{ij}\,dx^i dx^j\,, \qquad i, j = 1, 2, 3\,, \tag{19}$$

donde H es constante. Encuéntrense la forma general de todos sus vectores de género tiempo. El tenso energía-momento de un campo escalar ϕ en un campo gravitatorio descrito por una métrica $g_{\mu\nu}$ es

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\,\partial_n\phi - g_{\mu\nu}\left[\frac{1}{2}\,g^{\alpha\beta}\,(\partial_\alpha\phi)\,(\partial_\beta\phi) + V(\phi)\right],$$

donde $V(\phi) \geq 0$ es el potencial del campo escalar. Discútase si para la métrica dada en la ec. (19) se satisface la condición $T_{\mu\nu}v^\mu\,v^\nu\rangle 0$, con v^μ un vector arbitrario de género tiempo.

55. Considérese un espacio-tiempo de dimensión 5 (una dimensión temporal y cuatro espaciales) con métrica

$$ds_5^2 = e^{2A(w)}\eta_{\mu\nu}\,dx^\mu\,dx^\nu + dw^2\,, \tag{20}$$

donde $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski en 4 dimensiones y w es la cuarta dimensión espacial. Demuéstrese que las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica $\Lambda \neq 0$ y $T_{\mu\nu} = 0$ se reducen a $A'' = 0$, donde la prima indica derivada con respecto a w. Determínese el signo de la constante cosmológica. ¿Qué ocurre sin $\Lambda = 0$?

Sugerencia. Se puede resolver el problema en D dimensiones (una temporal y $D-1$ espaciales).

Lecturas complementarias. Esta solución fue propuesta en

– L. Randall, R. Sundrum: "A large mass hierarchy from a small extra dimension", Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 3370-3373 [arXiv:hep-ph/9905221]. El artículo empieza presentando la solución y se centra en estudiar sus implicaciones y aplicaciones al problema de la jerarquía de escalas. El tema tratado en él queda fuera del alcance del curso.

56. Considérese la métrica en cinco dimensiones

$$ds_5^2 = -f(r)\,dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2\,d\Omega_3^2\,,$$

donde $d\Omega_3^2$ es la métrica de la 3-esfera de radio unidad,

$$d\Omega_3^2 = d\psi^2 + \sin^2\!\psi\,(d\theta^2 + \sin^2\!\theta\,d\phi^2)\,, \quad 0 \le \psi, \theta < \pi, \quad 0 \le \phi < 2\pi.$$

Encuéntrese una solución a las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica negativa.

57. [Junio 2014] Considérense las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0$ en tres dimensiones. Demuéstrese que cualquier solución tiene tensor de Riemman dado por

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \Lambda\,(\,g_{\mu\rho}\,g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}\,g_{\nu\rho})\,.$$

58. Encuéntrese una solución a las ecuaciones de Einstein en tres dimensiones con constante cosmológica negativa $\Lambda = -1/\ell^2$ y $T_{\mu\nu} = 0$ de la forma

$$ds^2 = -f^2(r)\,dt^2 + \frac{dr^2}{h^2(r)} + r^2\left[d\phi + N(r)\,dt\right]^2.$$

Solución. Basta proceder como en los casos vistos en clase. Es decir, se calculan los símbolos de Christoffel, el tensor de Ricci y se resuelven las ecuaciones diferenciales que resultan de las de Einstein. Las expresiones para los coeficientes de la métrica son

$$f = h = \sqrt{-M + \frac{r^2}{\ell^2} + \frac{J^2}{4r^2}} \qquad N = -\frac{J}{2r^2}\,, \qquad |J| \le M\ell\,,$$

donde M y J son constantes de integración. Hay que tener cuidado con las operaciones, pues en este caso, al tener la métrica tres funciones, son más engorrosas.

Lecturas complementarias. Esta solución es conocida como el agujero negro en tres dimensiones. Fue propuesta en

– M. Bañados, C. Teitelboim, J. Zanelli: "The black hole in three dimensional space time", Phys. Rev. Lett. **69** (1992) 1849-1851 [arXiv:hep-th/9204099].

59. La métrica más general estática con simetría cilíndrica en torno al eje z e invariancia boost en la dirección de z puede escribirse en la forma

$$ds^2 = e^{2A(\rho)}\left(-\,dt^2 + dz^2\right) + d\rho^2 + \rho^2 e^{2B(\rho)}\,d\theta^2\,, \quad 0 \le \rho\,, \quad 0 \le \theta \le 2\pi. \tag{21}$$

El objetivo de este problema es encontrar soluciones a las ecuaciones de Einstein de este tipo.

i) Pruébese mediante cálculo directo que los símbolos de Christoffel distintos de cero son

$$\begin{aligned}
&\Gamma^t{}_{t\rho} = \Gamma^z{}_{z\rho} = A'\,,\\
&\Gamma^\rho{}_{tt} = -\Gamma^\rho{}_{zz} = e^{2A}\,A'\,, \quad \Gamma^\rho{}_{\theta\theta} = -e^{2B}\,(\rho + \rho^2 B')\,,\\
&\Gamma^\theta{}_{\rho\theta} = \frac{1}{\rho} + B'\,,
\end{aligned}$$

donde la prima indica derivada con respecto a ρ.

2i) Demuéstrese que las ecuaciones de Einstein toman la forma

$$A'' + B'' + A'^2 + B'^2 + A'B' + \frac{A'}{\rho} + \frac{2B'}{\rho} + \Lambda = 8\pi G\,T^t{}_t = 8\pi G\,T^z{}_z\,, \qquad (22)$$

$$A'^2 + 2\,A'B' + \frac{2A'}{\rho} + \Lambda = 8\pi G\,T^\rho{}_\rho\,, \qquad (23)$$

$$2\,A'' + 3\,A'^2 + \Lambda = 8\pi G\,T^\theta{}_\theta\,. \qquad (24)$$

Calcúlese para ello el tensor y el escalar de Ricci y substitúyanse en las ecuaciones de Einstein. Nótese que en (22)-(24) hay un índice arriba y otro abajo.

En los siguientes apartados **vamos a buscar soluciones con $\boldsymbol{T_{\mu\nu} = 0}$ y $\boldsymbol{\Lambda \neq 0}$** que en la proximidad del eje z sean localmente planas, por lo que exigiremos la condición de contorno

$$A(0) = 0\,. \qquad (25)$$

3i) Utilizando las ecuaciones (23) y (24), obténgase A'', B' y B'' en términos de A' y compruébese que la ecuación (22) se satisface para toda A'. De $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + g_{\mu\nu}\Lambda = 0$ se sigue que $R = 4\Lambda$. A partir de la expresión para el escalar de Ricci en términos de A, B y sus derivadas y de la ecuaciones (23) y (24) compruébese que efectivamente es así para toda A'.

4i) El anterior apartado implica que basta con resolver las ecuaciones (23) y (24). Encuéntrese su solución para $\Lambda > 0$ y estudiése su límite $\Lambda \to 0$.

Solución. De (24) se sigue que

$$A(\rho) = \frac{1}{3}\,\ln\Big[\,\cos^2\Big(\frac{\sqrt{3\Lambda}}{2}\,\rho + c_0\Big)\Big] + c_1\,,$$

con c_0 y c_1 constantes de integración. Haciendo el cambio de coordenadas $t \to te^{-c_1}$ y $z \to ze^{-c_1}$, la constante c_1 desaparece de la métrica. Dicho cambio equivale a modificar las escalas de t y z, que en el caso que nos ocupa es irrelevante. Así pues, podemos tomar $c_1 = 0$. Tras imponer las condición de contorno (25) se obtiene $c_0 = 0$. En resumen,

$$e^{2A(\rho)} = \cos^{4/3}\Big(\frac{\sqrt{3\Lambda}}{2}\,\rho\Big)\,.$$

Utilizando esta expresión para $A(\rho)$ en (23) e integrando se obtiene

$$e^{2B(\rho)} = \frac{4c_2}{3\Lambda\rho^2}\,\cos^{-2/3}\Big(\frac{\sqrt{3\Lambda}}{2}\,\rho\Big)\,\sin^2\Big(\frac{\sqrt{3\Lambda}}{2}\,\rho\Big)\,,$$

donde $c_2 > 0$ una constante de integración. Es claro que

$$ds^2 = -\,dt^2 + dz^2 + d\rho^2 + c_2\,\rho^2 d\theta^2 \quad \text{para} \quad \Lambda \to 0\,. \tag{26}$$

Si $\Lambda = 0$, y puesto que $T_{\mu\nu} = 0$, no hay fuente alguna en todo el espacio-tiempo que genere un campo gravitatorio. Cabe esperar que la métrica sea la de Minkowski y tomar $c_2 = 1$.

5i) Resuélvase las ecuaciones (23) y (24) para $\Lambda < 0$.

Solución. Las mismas expresiones que en (4i) cambiando Λ por $|\Lambda|$ y sin y cos por sinh y cosh.

Lecturas complementarias. La soluciones axisimétricas estáticas en vacío fueron encontradas por T. Levi-Civita en un artículo publicado en Rend. Acc. Lincei **18** (1919) 101. Su generalización a constante cosmológica no nula fue obtenida en

– B. Linet, "The static, cylindrically symmetric strings in general relativity with cosmological constant", J. Math, Phys, **27** (1986) 1817-1818.

60. Considérese una distribución de materia estática uniforme cilíndrica de radio ρ_0 y longitud infinita a lo largo de un eje que tomaremos como eje coordenado z. Su tensor energía-momento $T_{\mu\nu}$ tiene como únicas componentes distintas de cero

$$T^t{}_t = T^z{}_z = \begin{cases} -\epsilon & \text{si} \quad \rho < \rho_0 \\ 0 & \text{si} \quad \rho > \rho_0\,, \end{cases} \tag{27}$$

con ϵ una constante positiva. Se quiere econtrar el gravitatorio producido por esta distribución dentro y fuera de la misma. Para ello se buscan métricas del tipo (21), que por coveniencia repetimos aquí:

$$ds^2 = e^{2A(\rho)}\left(-\,dt^2 + dz^2\right) + d\rho^2 + \rho^2 e^{2B(\rho)}\,d\theta^2\,, \quad 0 \le \rho\,, \quad 0 \le \theta \le 2\pi\,.$$

Sus símbolos de Christoffel son los del apartado (i) del problema anterior y sus ecuaciones de Einstein toman la forma (22)-(23). En el caso que nos ocupa ahora se tiene $\Lambda = 0$ y $T_{\mu\nu}$ dado por (27).

Primero encontraremos las soluciones en el interior ($\rho < \rho_0$) y en el exterior ($\rho > \rho_0$) y seguidamente las uniremos mediante condiciones de frontera ($\rho = \rho_0$) adecuadas. Usaremos la notación r para $\rho < \rho_0$ y reservaremos ρ para $\rho > \rho_0$.

i) Considérese $r := \rho < \rho_0$. Como condición de contorno en $r = 0$ tómese $B(0) = 0$. Demuéstrese que la única solución es

$$ds^2 = -dt^2 + dz^2 + dr^2 + 8\pi \mathrm{G}\epsilon\, \sin^2\left(\frac{r}{\sqrt{8\pi\mathrm{G}\epsilon}}\right) d\theta^2\,, \quad r < \rho_0 \tag{28}$$

donde G es la constante de gravitación universal de Newton.

En el exterior se tiene $\Lambda = T_{\mu\nu} = 0$, por lo que tomaremos como métrica

$$ds^2 = -\,dt^2 + dz^2 + d\rho^2 + c_0^2\,\rho^2\,d\theta^2\,, \quad \rho > \rho_0, \tag{29}$$

con c_0 una constante por determinar. Hacemos aquí dos comentarios. Primero, además de (29) existe otra solución, para la que puede procederse de la misma forma y que conduce al mismo resultado final pero no nos ocuparemos de ella aquí. Segundo, a diferencia del caso del problema anterior, ahora hay una distribución de materia que crea un campo gravitatorio en su entorno y no puede concluirse (como se hizo entonces) que c_0 sea igual a 1.

2i) Para unir las soluciones (28) y (29) en la frontera $r = \rho = \rho_0$ se imponen las dos siguientes condiciones:

(I) La métricas inducidas en la frontera por las métricas interior y exterior coinciden, modo una transformación de coordenadas.

(II) La curvatura extrínseca de la superficie frontera o es continua o presenta una discontinuidad relacionada con el valor del tensor energía-impulso sobre ella.

En nuestro caso, como coordenadas en la frontera pueden tomarse t, z y θ. Las métricas inducidas en ella por las métricas interior y exterior son respectivamente (28) con $r = \rho_0$ y (29) con $\rho = \rho_0$. La condición (I) exige que ambas sean iguales, salvo quizás un cambio de coordenadas.

Para entender la condición (II) observamos que la superficie frontera admite:

- Un vector unitario $n^{\alpha}_{(\text{in})} = \delta^{\alpha}{}_{r}$ de género espacio, $n^2_{(\text{in})} = 1$, normal a la misma con respecto a la métrica interior (o *in*).
- Un vector unitario $n^{\alpha}_{(\text{out})} = \delta^{\alpha}{}_{\rho}$ de género espacio, $n^2_{(\text{out})} = 1$, normal a la misma con respecto a la métrica exterior (o *out*).

En teŕminos de estos vectores unitarios, la curvaturas extrínsecas $K^{(\text{in})}_{ab}$ y $K^{(\text{out})}_{ab}$ de la frontera con respecto a las métricas interior y exterior están dadas por

$$K^{(\text{in,out})}_{ab} = \nabla^{(\text{in,out})}_{a}\, n^{(\text{in,out})}_{b}\,, \quad a, b = t, z, \theta\,.$$

La condición (2) establece en el caso de continuidad que

$$\nabla^{(\text{in})}_{a}\, n^{(\text{in})}_{b} = \nabla^{(\text{out})}_{a}\, n^{(\text{out})}_{b} \quad \text{sobre } \ r = \rho = \rho_0\,. \tag{30}$$

Demostrar que las condiciones (1) y (2), ésta última en su forma (30), implican que

$$c_1 = \cos\left(\frac{\rho_0}{\sqrt{8\pi \mathrm{G}\epsilon}}\right).$$

La masa por unidad de longitud κ (o densidad lineal de energía) puede definirse como la integral de la densidad de energía sobre el volumen propio de la fuente. Es decir

$$\kappa = \int_0^{\rho_0} r\, e^{B(r)}\, dr \int_0^{2\pi} d\theta\; \epsilon = \frac{1}{4\mathrm{G}}\left[1 - \cos\left(\frac{\rho_0}{\sqrt{8\pi \mathrm{G}\epsilon}}\right)\right].$$

La métrica exterior es, por tanto,

$$ds^2 = -\,dt^2 + dz^2 + d\rho^2 + (1 - 4\mathrm{G}\kappa)^2\, \rho^2\, d\theta^2\,, \quad \rho > \rho_0, \tag{31}$$

Las secciones transversales (ρ, θ) son conos, pues puede introducirse una coordenada angular $\phi = (1 - 4\mathrm{G}\kappa)\,\theta$ que toma valores en el intervalo $0 \leq \phi < 2\pi(1 - 4\mathrm{G}\kappa)$. Al ángulo $\delta = 8\pi \mathrm{G}\kappa$ que le falta al cono para transformarse en un plano se le llama ángulo de déficit.

Nota 1. El límite $\rho \to 0$ tiene sentido si se mantiene el cociente $\rho_0/\sqrt{8\pi \mathrm{G}\epsilon}$, y por tanto κ, constante. De no ser así, no tiene sentido tomar dicho límite. Una distribución de materia lineal de radio despreciable ($\rho_0 \to 0$) con densidad lineal de energía κ es conocida en la literatura con el nombre de cuerda cósmica. El resultado (31) establece que la métrica en las secciones transversales a la cuerda es cónica.

Nota 2. La curvatura extrínseca que aparece en la condición (II) se define de la siguiente forma. Una superficie Σ se dice de género espacio, respectivamente tiempo, si admite un vector perpendicular n^μ en todo punto de la misma de género tiempo, respectivamente espacio. Supóngase que y^a son coordenadas sobre la superficie en cuestión. La métrica $g_{\alpha\beta}$ induce sobre Σ una métrica h_{ab} dada por

$$h_{ab} = g_{\alpha\beta}\,\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a}\,\frac{\partial x^\beta}{\partial y^b}\,.$$

Cualquier tensor siempre puede proyectarse sobre la superficie Σ, siendo la cantidad que realiza dicha proyección

$$h^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} \pm n^\alpha n^\beta\,,$$

donde el signo $+$ es para superficies de género espacio y el $-$ para superficies de género tiempo. La curvatura extrínseca de la superficie Σ se define entonces como

$$K_{ab} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a}\,\frac{\partial x^\beta}{\partial y^b}\,\nabla^{(g)}_\alpha n_\beta\,.$$

Lecturas complementarias.

– W. A Hiscock, "Exact gravitational field of a string", Phys. Rev. **D31** (1985) 3288-3290. La confección de este ejercicio sigue la línea de argumentación de esta referencia.

– A. Vilenkin, "Gravitational field of vacuum domain walls and strings", Phys. Rev. **D23** (1981) 852-857. Usando una aproximación débil, su autor obtuvo en este artículo por primera vez el campo gravitatorio cónico producido por una cuerda cósmica.