Problema. Una partícula de masa μ incide con parámetro de impacto b y velocidad $\mathbf{v}_0$ sobre un campo de fuerzas central, que ejerce sobre ella una fuerza $\mathbf{F} = -\mu k^2 \mathbf{x}/r^4$, donde $\mathbf{x}$ el vector de posición con respecto al origen de fuerzas. ¿Se trata de un campo atractivo o repulsivo? Calcúlese la energía potencial de la partícula. Demuéstrese que la ecuación de movimiento para $u = 1/r$ es

$$\frac{du^2}{d\theta^2} + \Big(1 - \frac{k^2}{b^2 v_0^2}\Big) u = 0\,,$$

donde $v_0 = |\mathbf{v}_0|$. Resuélvase la ecuación y estudiése la trayectoria de la partícula para los siguientes valores de b y v_0:

$$\frac{k^2}{b^2 v_0^2} = \frac{1}{2},\ \frac{144}{169},\ \frac{35}{36}\,.$$

Calcúlese en cada caso la dirección con que sale la partícula. Dibújese con la ayuda de algún programa de manipulación algebraica (Maple, Mathematica, Mathlab, etc.) la trayectoria en cada caso.

Lo escrito en negro constituye propiamente la solución al problema. Lo escrito en azul es la materia explicada en teoría que se necesita usar. Finalmente los comentarios en rojo (muy sencillos, a veces triviales) se han introducido para aclarar y enfatizar algunas ideas.

(i) La fuerza es **atractiva**, pues tiene sentido contrario al vector de posición $\mathbf{x}$ de la partícula con respecto al origen de fuerzas.

(2i) Recuérdese que todo campo de fuerzas central $\mathbf{F} = f(r)\,\hat{\mathbf{x}}$ es conservativo y que la energía total de una partícula de masa μ en dicho campo es

$$E = T + V = \frac{1}{2}\,\mu\,\dot{\mathbf{x}}^2 + V(r)\,,$$

donde la energía potencial $V(r)$ está dada por

$$V = -\int f(r)\,dr\,.$$

En el caso que nos ocupa,

$$f(r) = -\frac{\mu k^2}{r^3}\,.$$

¡Ojo! La potencia de r en el denominador es 3 (y no 4) pues $\mathbf{F} = -\mu k^2 \mathbf{x}/r^4$ y $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/r$. Se tiene entonces que

$$V = -\int dr \left(-\frac{\mu k^2}{r^3}\right) = -\frac{\mu k^2}{2\,r^2}\,.$$

(3i) Se sabe que para un campo central $\mathbf{F} = f(r)\,\hat{\mathbf{x}}$, la ecuación para la distancia radial r al origen como función del ángulo polar θ es (ecuación de Binet)

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{\mu}{L^2\,u^2}\,f\Big(\frac{1}{u}\Big)\,, \qquad u = \frac{1}{r}\,, \tag{1}$$

donde $L = \mu r^2 \dot{\theta}$ es el moneto angular, que recuérdese es conservado. En nuestro caso, como $f(1/u) = -\mu k^2 u^3$, se tiene

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu^2 k^2}{L^2}\, u\,. \tag{2}$$

Aunque trivial, es importante notar que el lado derecho de la ecuación diferencial (1) es distinto para cada $f(r)$. Por ejemplo, para un campo de fuerzas gravitatorio (problema de Kepler), la función f está dada por $f(r) = -k/r$, con $k > 0$, y la ec. (1) toma la forma

$$\frac{du^2}{d\theta^2} + u = \frac{k\mu}{L^2}\,. \tag{3}$$

Las ecs.(2) y (3) tienes lados derechos distintos y, por tanto, dan a lugar a trayectorias distintas. Las soluciones al problema de Kepler sabemos que son cónicas. Podr'ia ocurrir que, para funciones $f(r)$ distintas de la de Kepler, la ecuación de Binet también admitiese órbitas cónicas para ciertos valores de los paramétros que intervengan en el problema, pero eso hay que estudiarlo caso por caso. Volviendo a nuestro problema, nos ocupamos de resolver la ecuación diferencial (2).

La ec. (2) puede escribirse como

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + \Omega^2 u = 0\,, \quad \text{con} \quad \Omega^2 \equiv 1 - \frac{\mu^2 k^2}{L^2}\,. \tag{4}$$

Su solución más general es

$$u = C_1 \sin(\Omega\theta) + C_2 \cos(\Omega\theta)\,, \tag{5}$$

donde C_1 y C_2 son constantes de integración. Para determinarlas usamos las condiciones inciales.

Que la partícula incida con parámetro de impacto b y velocidad v_0 significa que en el instante inicial se encuentra muy alejada, $r_0 = |\mathbf{x}_0| \to \infty$, con velocidad v_0 paralela a la dirección que la une al origen, y que la distancia entre las rectas determinadas por la velovidad y su paralela que

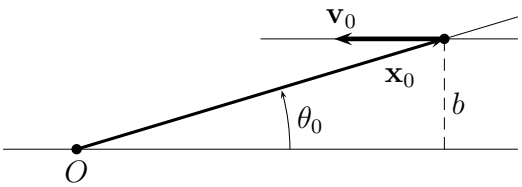


Figura 1: Condiciones iniciales.

pasa por el origen es b, tal y como aparece en la figura 1. En ecuaciones esto significa que

$$\text{posición:}\quad r_0 \to \infty\,, \qquad \theta_0 = 0 \tag{6}$$

$$\text{velocidad:}\quad \dot{r}(0) = -v_0\,, \qquad \dot{\theta}(0) = 0\,. \tag{7}$$

Ahora bien, de

$$\dot{r} = \frac{dr}{du}\,\frac{du}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt} = -\,r^2\,\frac{du}{d\theta}\,\frac{L}{\mu r^2} = -\,\frac{L}{\mu}\,\frac{du}{d\theta} \tag{8}$$

y de

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{\text{inicial}} = \mu\, b\, v_0\, \hat{\mathbf{e}}_z \quad \Rightarrow \quad L = \mu\, b\, v_0$$

se sigue que

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{\dot{r}}{b\, v_0} \quad \text{y} \quad \Omega^2 = 1 - \frac{k^2}{b^2 v_0^2}\,.$$

En particular, en el instante inicial se tiene

$$\left.\frac{du}{d\theta}\right|_{\theta=0} = \frac{1}{b}\,. \tag{9}$$

De la ec. (5) y de las condiciones iniciales (6) y (9) obtenemos, respectivamente,

$$C_2 = 0, \qquad C_1 = \frac{1}{\Omega b}\,.$$

Esto da para la trayectoria

$$r(\theta) = \frac{\Omega b}{\sin(\Omega\theta)}\,. \tag{10}$$

(4i) La partícula se escapa del campo de fuerzas cuando $r \to \infty$, es decir, cuando

$$\sin(\Omega\theta_{\text{out}}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_{\text{out}} = \pi/\Omega\,,$$

La solución $\theta = 0$ corresponde a la dirección de incidencia y la descartamos. El ángulo de deflexión, llamémosle ψ, está dado por $\psi = \theta_{\text{out}}$ módulo 2π.

Para el primer valor de los dados en el enunciado se tiene

$$\frac{k^2}{b^2 v_0^2} = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \Omega = \frac{1}{\sqrt{2}} \;\Rightarrow\; \theta_{\text{out}} = \sqrt{2}\pi \;\Rightarrow\; \psi = \sqrt{2}\pi\,.$$

Puede hacerse una gráfica de la trayectoria pasando a coordendas cartesianas:

$$x = r\cos\theta = \frac{b\,\cos\theta}{\sqrt{2}\,\sin\left(\theta/\sqrt{2}\right)}\,, \qquad y = r\sin\theta = \frac{b\,\sin\theta}{\sqrt{2}\,\sin\left(\theta/\sqrt{2}\right)} \qquad 0 \le \theta < \theta_{\text{out}}\,.$$

Sólo falta representar gráficamente la solución. Para ello puede utilizarse Maple. El resultado es el de la figura en la primera línea, columna derecha de la Tabla 1.

Para $k^2/b^2v_0^2 = 144/169$ se tienen los resultados en la segunda línea de la Tabla 1. Ahora $\Omega = 5/13$ y $\theta_{\text{out}} = 13\pi/5$, que puede escribirse como $\theta_{\text{out}} = 2\pi + \frac{3\pi}{5}$, por lo que $\psi = 3\pi/5$. Nótese que, antes de ser dispersada, la partícula da una vuelta en torno al origen. Ello es debido a que el potencial la atrae lo suficiente como para que orbite alrededor de su centro de fuerzas, pero no lo suficiente como para atraparla, por lo que acaba emergiendo.

Para el tercero de los valores de $k^2/b^2v_0^2$ se obtienen los resultados de la tercera línea de la Tabla 1. Con respecto al segundo caso, la energía cinética $\mu v_0^2/2$ de la partícula es menor, por lo que "se opone menos" a la atracción del potencial y da más vueltas alrededor del origen.

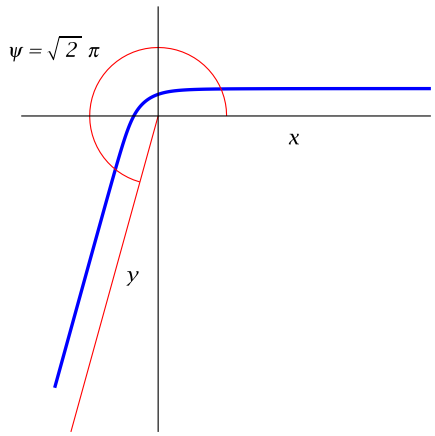
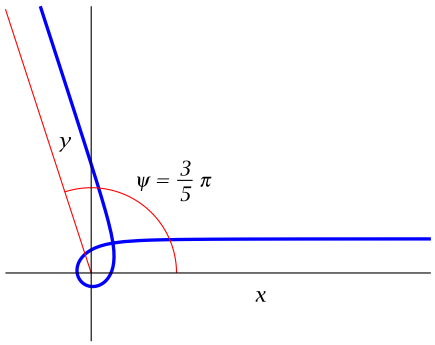
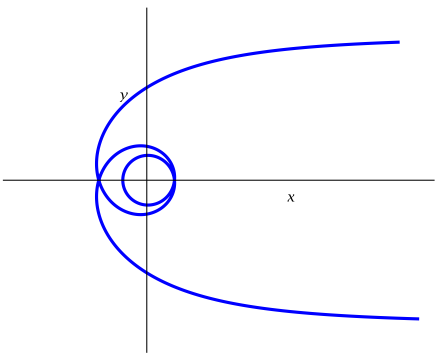
$k^2/b^2v_0^2$	Ω	Trayectoria	ψ	Gráfica
$1/2$	$1/\sqrt{2}$	$r = \dfrac{b}{\sqrt{2}\,\sin(\theta/\sqrt{2})}$	$\sqrt{2}\pi$	
$144/169$	$5/13$	$r = \dfrac{5b}{13\,\sin(5\theta/13)}$	$\dfrac{3\pi}{5}$	
$35/36$	$1/6$	$r = \dfrac{b}{6\,\sin\left(\theta/6\right)}$	0	

Tabla 1: Trayectorias para distintos valores de $k^2/b^2v_0^2$.

Problema. Considérese el campo de fuerzas del problema anterior y supóngase que la partícula se encuentra inicialmente a distacia r_0 finita del centro de fuerzas con velocidad $\mathbf{v}_0$ dirigida según una dirección que forma un ángulo α con el segmento que la une al origen. Encuéntrese su trayectoria. Particularícese para $\alpha = \pi/2$ y dibújense las órbitas de la partícula para los siguientes valores

$$\frac{k^2}{r_0^2\, v_0^2} = \frac{1}{2}\,, \frac{144}{169}\,, \frac{35}{36}\,.$$

La ecuación diferencial para la trayectoria y su solución más general son las mismas que en el problema anterior, ecs. (4) y (5), respectivamente. Por comodidad, reescribimos la solución general

$$u = C_1 \sin(\Omega\theta) + C_2 \cos(\Omega\theta)\,, \qquad \Omega^2 = 1 - \frac{\mu^2\, k^2}{L^2}\,, \tag{1}$$

Las condiciones iniciales son ahora distintas y, por tanto, la trayectoria cambia. Sin pérdida de generalidad, puede tomarse como origen de ángulos porlares la recta que une la posición inicial

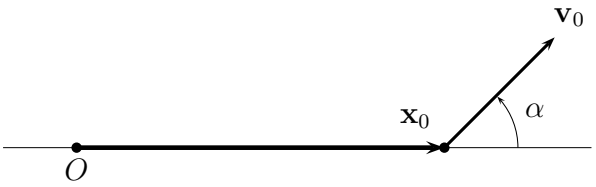


Figura 2: Condiciones iniciales.

de la partícula con el centro. Las condiciones iniciales toman entonces la forma (ver Figura 2)

$$\text{posición:}\quad r(t=0) = r_0 \qquad \theta(t=0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad u(\theta=0) = \frac{1}{r_0}\,, \tag{2}$$

$$\text{velocidad:}\quad \dot r(t=0) = v_0 \cos\alpha\,, \qquad \dot\theta(t=0) = \frac{v_0}{r_0}\sin\alpha\,. \tag{3}$$

De la ec. (8) (válida siempre) y de

$$L = \mu\, r_0^2\, \dot\theta_0 = \mu\, r_0\, v_0 \sin\alpha$$

se sigue que

$$\left.\frac{du}{d\theta}\right|_{\theta=0} = -\,\frac{\cot\alpha}{r_0}\,. \tag{4}$$

Imponiedo las condiciones (2) y (4) sobre la solución (5), se tiene

$$C_2 = \frac{1}{r_0} \qquad C_1 = -\,\frac{\cot\alpha}{\Omega\, r_0}\,, \qquad \Omega^2 = 1 - \frac{k^2}{r_0^2\, v_0^2\, \sin^2\alpha}\,.$$

La trayectoria para la partícula es entonces

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0}\left[\cos\left(\Omega\theta\right) - \frac{\cot\alpha}{\Omega}\,\sin\left(\Omega\theta\right)\right]. \tag{5}$$

Pueden introducirse constantes de integración C y β, definidas como

$$C_1 = C\,\sin(\Omega\beta)\,, \qquad C_2 = C\,\cos(\Omega\beta)\,,$$

en términos de las cuales la solución (5) se escribe $u = \frac{1}{r} = C\cos\left[\Omega(\theta-\beta)\right]$. Los valores de C y β pueden determinarse, bien resolviendo para ellas en términos de C_1 y C_2, bien imponiendo las condiciones iniciales, con resultado

$$C = \frac{1}{r_0}\sqrt{1+\frac{\cot^2\alpha}{\Omega^2}}\,, \qquad \tan\left(\Omega\beta\right) = -\,\Omega\,\tan\alpha\,.$$

Volvamos a la solución escrita en la forma (5) y tomemos $\alpha = \pi/2$. Primero notamos que si $\alpha = \pi/2$, la componente radial de la velocidad inicial $\dot{r}_0$ es cero, por lo que el punto inicial es o bien un perihelio o un afelio. Segundo, para $\alpha = \pi/2$, la trayectoria se reduce a

$$r = \frac{r_0}{\cos(\Omega\theta)}\,.$$

La distancia r al origen se hace infinita cuando $\Omega\theta_{\rm out} = \pi/2$, que corresponde a un ángulo de defexión $\psi = \dfrac{\pi}{2\Omega}$ módulo 2π. En cartesianas, la trayectoria es

$$x = \frac{r_0\,\cos\theta}{\cos(\Omega\theta)}\,, \quad y = \frac{r_0\,\sin\theta}{\cos(\Omega\theta)}\,, \qquad 0 \le \theta < \frac{\pi}{2\Omega}\,.$$

Para los valores de $k^2/r_0^2\,v_0^2$ del enunciado se tienen las trayectorias de la Tabla 2.

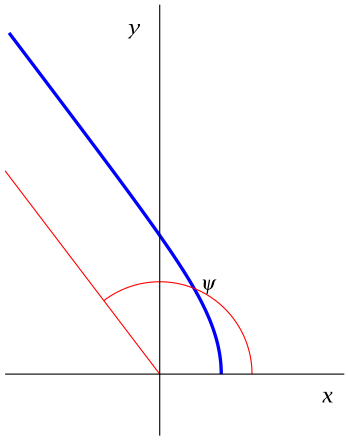
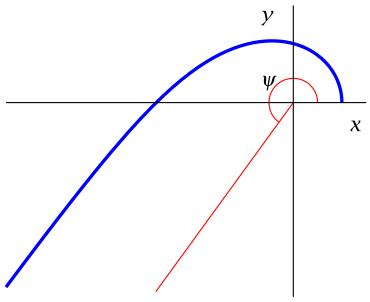
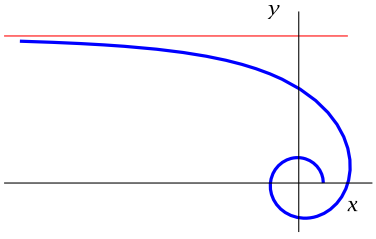
$k^2/r_0^2v_0^2$	Ω	Trayectoria	ψ	Gráfica
$1/2$	$1/\sqrt{2}$	$r = \dfrac{r_0}{\cos\left(\theta/\sqrt{2}\right)}$	$\pi/\sqrt{2}$	
$144/169$	$5/13$	$r = \dfrac{r_0}{\cos(5\theta/13)}$	$\dfrac{13\pi}{10}$	
$35/36$	$1/6$	$r = \dfrac{r_0}{\cos\left(\theta/6\right)}$	π	

Tabla 2: Trayectorias para distintos valores de $k^2/r_0^2v_0^2$.