Movimiento sobre una cicloide

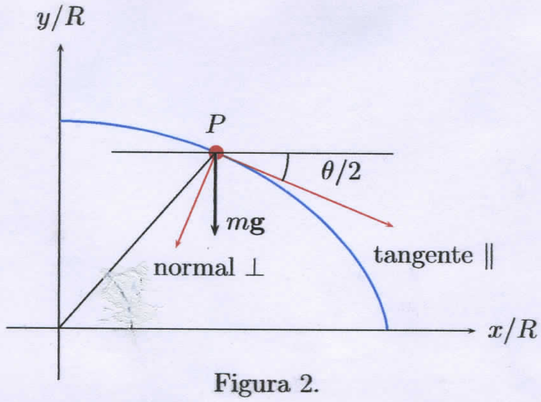

Figura 2.

$$\left.\begin{aligned} x &= R(\theta + \sin\theta) \\ y &= R(1+\cos\theta) \end{aligned}\right\} \qquad 0 \le \theta \le \pi$$

Tangente a la curva:

$$\hat{u}_t = \frac{dx}{d\theta}\hat{e}_x + \frac{dy}{d\theta}\hat{e}_y$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= R(1+\cos\theta) \\ \frac{dy}{d\theta} &= -R\sin\theta \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = -\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = -\frac{2\sin\theta/2\,\cos\theta/2}{2\cos^2\theta/2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\tan\theta/2$$

Elemento de arco:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \left[\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2\right] d\theta^2$$

$$= R^2\left[1+\cos^2\theta + 2\cos\theta + \sin^2\theta\right] d\theta^2 = 2R^2(1+\cos\theta)\, d\theta^2$$

$$= 4R^2\cos^2\theta/2\, d\theta^2$$

$ds = 2R\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$ (tomamos $+\sqrt{\ }$ pues $ds > 0$)

$S = 4R\sin\frac{\theta}{2} + S_0$

Imponemos que en $\theta = 0$, $S = 0$. Esto implica $S_0 = 0$

$S = 4R\sin\frac{\theta}{2}$

Radio de curvatura: $\rho = \frac{ds}{d\theta} = 2R\cos\frac{\theta}{2}$

Ecuaciones de movimiento sobre la curva

Dirección $\parallel$: $mg\sin\frac{\theta}{2} = m\frac{d^2 s}{dt^2}$ (1)

Dirección $\perp$: $\underbrace{F}_{\text{fuerza de la partícula sobre la curva = - reacción}} + \underbrace{mg\cos\frac{\theta}{2}}_{\text{componente normal del peso}} = \underbrace{m\frac{v^2}{\rho}}_{\text{componente normal aceleración}}$

Nótese que

$(1) \Leftrightarrow \frac{g}{4R}s = \ddot{s} \Rightarrow s = c_1 e^{-\sqrt{\frac{g}{4R}}t} + c_2 e^{\sqrt{\frac{g}{4R}}t}$

$$\left.\begin{aligned} s(t=0) = 0 &\Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \\ \frac{ds}{dt}(t=0) = v_0 &\Rightarrow \sqrt{\frac{g}{4R}}(-c_1 + c_2) = v_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow s = v_0\sqrt{\frac{R}{g}}\left(e^{t\sqrt{\frac{g}{4R}}} - e^{-t\sqrt{\frac{g}{4R}}}\right)$

Conservación energía $E = \underbrace{\frac{1}{2}mv_0^2 + mg2R}_{t=0} = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2 + mgy}_{t \text{ arbitrario}}$

$$\frac{1}{2}v_0^2 + 2gR = \frac{1}{2}v^2 + gR(1+\cos\theta)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2gR(1-\cos\theta)$$

$$F = m\frac{v^2}{\rho} - mg\cos\frac{\theta}{2}$$

$$= \frac{m\left[v_0^2 + 2gR(1-\cos\theta)\right]}{2R\cos\theta/2} - mg\cos\frac{\theta}{2}$$

$$= \frac{m}{2R\cos\theta/2}\left[v_0^2 + 2gR(1-\cos\theta) - 2gR\overbrace{\cos^2\theta/2}^{\frac{1}{2}(1+\cos\theta)}\right]$$

$$= \frac{m}{2R\cos\theta/2}\left[v_0^2 + gR(1-3\cos\theta)\right]$$

F apunta hacia el interior. La reacción $R = -F$ hacia el exterior. Si $F = 0$, la partícula abandona la curva. Esto ocurre para

$$v_0^2 = gR(3\cos\theta - 1) \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{v_0^2}{gR}\right)$$

Para

i) $v_0 = 0 \Rightarrow \cos\theta = 1/3 \Rightarrow y = \frac{2}{3}R$, $\theta \simeq 70°$

Si

$$\theta = 0 \Rightarrow F = \frac{m}{2R}(v_0^2 - 2gR) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ máxima v_0 para el que la partícula no abandona inmediatamente la curva es $\sqrt{2gR}$