Problema. Un cometa de masa μ se mueve en el campo gravitatorio del Sol (potencial $V(r) = -k/r$, con $k = \mu M_\odot G$). Incide con parámetro de impacto b y velocidad inicial v_0. Escríbase la ecuación de movimiento para el inverso $u = 1/r$ de la distancia r al origen de fuerzas como función del ángulo polar θ. Determínese la trayectoria del cometa. Hállese el ángulo de dispersión con respecto a la dirección de incidencia. Calcúlese la distancia de máxima aproximación.

La ecuación de movimiento para u (ecuación de Binet) es la misma que para el problema de Kepler, es decir

$$\frac{du^2}{d\theta^2} + u = \frac{k\mu}{L^2}\,, \tag{1}$$

donde $L = \mu r^2 \dot{\theta}$ es el momento angular. Como L se conserva, lo tomaremos igual a su valor en el instante inicial,

$$L = \mu b v_0\,.$$

La energía es también conservada y puede tomarse igual a su valor inicial,

$$E = \frac{1}{2}\,\mu v_0^2\,.$$

La solución de la ecuación (1) es

$$u = \frac{\mu k}{L^2}\,(1 + e\,\cos\theta)\,. \tag{2}$$

donde e está dada por

$$e^2 = 1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2} = (\text{nuestro caso}) = 1 + \left(\frac{\mu b v_0^2}{k}\right)^2. \tag{3}$$

Las ecs. (2) y 3) determinan completamente la trayectoria del cometa.

Si uno no se acuerda de estas expresiones siempre puede proceder de la siguiente forma. La solución de (1) es la suma de la solución más general de la homogénea, $u_{\text{hom}} = u_0\cos(\theta-\theta_0)$, con u_0 y θ_0 constantes de integración, y de una solución particular $u_{\text{part}} = \mu k/L^2$ de la completa,

$$u = \frac{\mu k}{L^2} + u_0\cos(\theta - \theta_0)\,. \tag{4}$$

Escribiendo u_0 como el producto de $\mu k/L^2$ por una nueva constante de integración a la que llamamos e, se obtiene

$$u = \frac{\mu k}{L^2}\left[\,1 + e\,\cos(\theta - \theta_0)\,\right], \tag{5}$$

Se elige el eje x de forma que $\theta_0 = 0$, con lo que se recupera (2). La condición inicial $r \to \infty$ $(u \to 0)$ para la posición implica $\theta = \theta_{\text{in}}$ en $t = 0$, por lo que $1 + e\cos\theta_{\text{in}} = 0$. La condición inicial para la velocidad es a su vez

$$\left.\begin{aligned} &\dot{r}(t=0) = -v_0 \quad \text{(velocidad inicial apunta al origen)} \\ &\dot{r}(t) = \frac{dr}{du}\,\frac{du}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt} = -r^2\,\frac{du}{d\theta}\,\frac{L}{\mu r^2} = -b\,v_0\frac{du}{d\theta} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{1}{b} = u'(\theta_{\text{in}}) = -\,\frac{\mu k}{L^2}\,e\sin(\theta_{\text{in}})\,.$$

De aquí y de $1 = e\cos\theta_{\rm in}$ se sigue

$$e^2 = 1 + \left(\frac{L^2}{\mu k b}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\mu b v_0^2}{k}\right)^2 .$$

La dispersión ($r \to \infty$) ocurre cuando $1 + e\cos\theta$ vuelve a anularse, es decir, para una águlo $\theta_{\rm out}$ dado por

$$\theta_{\rm out} = -\arccos\left(\frac{1}{e}\right) .$$

Con respecto al de incidencia, el ángulo de dispersión es

$$\theta_{\rm disp} = \theta_{\rm out} - \theta_{\rm in} = 2\arccos\left(\frac{1}{e}\right) .$$

En el punto de máximo acercamiento r alcanza su mínimo y $\dot r = 0$. La conservación de energía

$$\frac{1}{2}\mu\,\dot r^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r} = \frac{1}{2}\mu\,v_0^2$$

en ese punto se reduce a

$$\frac{L^2}{2\mu r_{\rm min}^2} - \frac{k}{r_{\rm min}} = \frac{1}{2}\mu\,v_0^2 .$$

Es decir,

$$r_{\rm min}^2 + \frac{2k}{\mu v_0^2}\,r_{\rm min} - b^2 = 0 ,$$

y, por ende,

$$r_{\rm min} = -\frac{k}{\mu v_0^2} + \sqrt{\left(\frac{k}{\mu v_0^2}\right)^2 + b^2} .$$

El signo engativo de la raíz se ha descartado pues da lugar a $r_{\rm min} < 0$, que no tiene sentido.