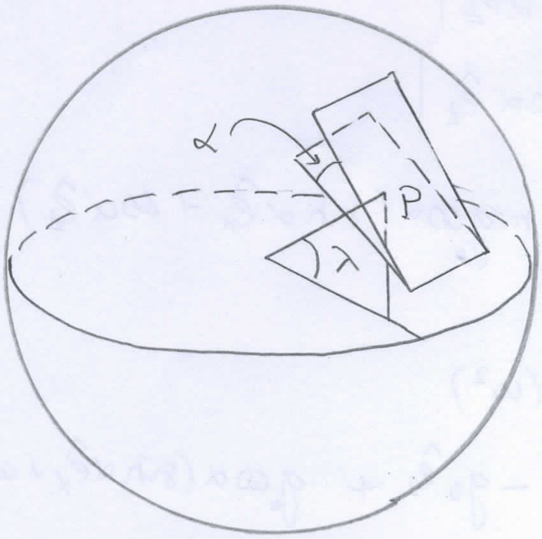
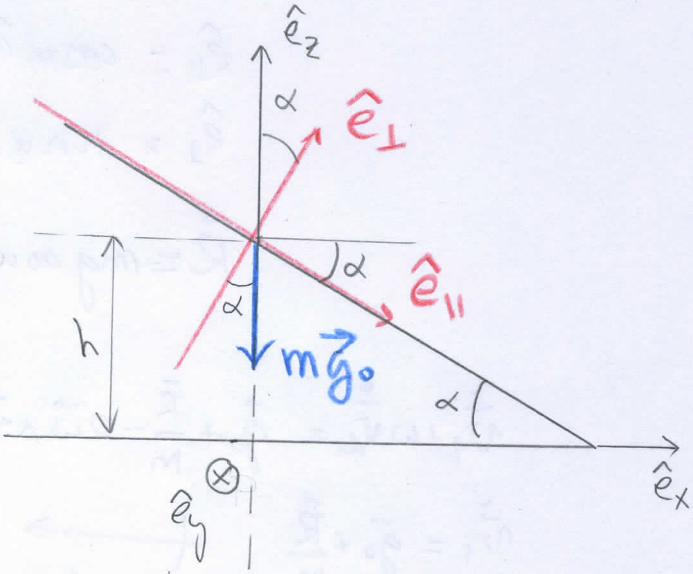
Fuerza de Coriolis sobre plano inclinado





el unitario $\hat e_y$ "entra" en la figura

$$\ddot{\vec x} = \vec g_0 - \underbrace{\vec\omega\wedge(\vec\omega\wedge\vec R)}_{O(\omega^2)} - 2\vec\omega\wedge\dot{\vec x} - \underbrace{\vec\omega\wedge(\vec\omega\wedge\vec x)}_{O(\omega^2)} - \underbrace{\cancel{\dot{\vec\omega}}\wedge\vec x}_{0}$$

Así pues,

$$\ddot{\vec x} = \vec g_0 - 2\vec\omega\wedge\dot{\vec x} + \frac{\vec R}{m}$$

$\vec R$ = reacción del plano $= m g_0 \cos\alpha\, \hat e_\perp$

$\vec g_0 = -g_0 \hat e_z$

$\vec\omega = \omega(-\cos\lambda\, \hat e_x + \sin\lambda\, \hat e_z)$

$\dot{\vec x} = \vec v = \vec v_1(t) + \omega \vec v_2(t) + O(\omega^2)$

Condiciones iniciales $\vec v_1(0) = 0$, $\vec v_2(0) = 0$

$\vec x(0) = h\hat e_z$, h = altura desde donde se suelta la partícula

Nótese que
$$\left.\begin{aligned}\hat{e}_z &= \cos\alpha\,\hat{e}_\perp - \sin\alpha\,\hat{e}_\parallel \\ \hat{e}_x &= \sin\alpha\, e_\perp + \cos\alpha\,\hat{e}_\parallel\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\hat{e}_\parallel &= \cos\alpha\,\hat{e}_x - \sin\alpha\,\hat{e}_z \\ \hat{e}_\perp &= \sin\alpha\,\hat{e}_x + \cos\alpha\,\hat{e}_z\end{aligned}\right\}$$

$$\vec{R} = mg\cos\alpha\,\hat{e}_\perp = mg_0\cos\alpha(\sin\alpha\,\hat{e}_x + \cos\alpha\,\hat{e}_z)$$

$$\dot{\vec{v}}_1 + \omega\dot{\vec{v}}_2 = \vec{g}_0 + \frac{\vec{R}}{m} - 2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_1 + O(\omega^2)$$

$$\left.\begin{aligned}\dot{\vec{v}}_1 &= \vec{g}_0 + \frac{\vec{R}}{m} \\ \omega\dot{\vec{v}}_2 &= -2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_1\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\dot{\vec{v}}_1 = -g_0\hat{e}_z + g_0\cos\alpha(\sin\alpha\,\hat{e}_x + \cos\alpha\,\hat{e}_z)$$

$$\dot{\vec{v}}_1 = -g_0\sin^2\alpha\,\hat{e}_z + g_0\sin\alpha\cos\alpha\,\hat{e}_x$$

$$\vec{v}_1 = g_0\sin\alpha(-\sin\alpha\,\hat{e}_z + \cos\alpha\,\hat{e}_x)\,t$$

$\uparrow$

Hemos usado que $\underline{\vec{v}_1(0) = 0}$

$$\vec{\omega}\wedge\vec{v}_1 = \omega(-\cos\lambda\,\hat{e}_x + \sin\lambda\,\hat{e}_z)\wedge\vec{v}_1$$
$$= \omega g_0\sin\alpha\,(-\cos\lambda\sin\alpha\,\hat{e}_y + \sin\lambda\cos\alpha\,\hat{e}_y)\,t$$
$$= \omega g_0\sin\alpha\sin(\lambda-\alpha)\,\hat{e}_y\,t$$

$$\left.\begin{aligned}\dot{\vec{v}}_2 &= -2g_0\sin\alpha\sin(\lambda-\alpha)\,\hat{e}_y\,t \\ \vec{v}_2 &= -g_0\sin\alpha\sin(\lambda-\alpha)\,\hat{e}_y\,t^2\end{aligned}\right\}$$ Hemos usado $\underline{\vec{v}_2(0) = 0}$

$$\vec{x} = g_0\sin\alpha\left[\frac{1}{2}(-\sin\alpha\,\hat{e}_z + \cos\alpha\,\hat{e}_x)t^2 - \frac{\omega}{3}\sin(\lambda-\alpha)\,\hat{e}_y\,t^3\right] + h\hat{e}_z$$

Condición inicial $\vec{x}(0) = h\hat{e}_z$ altura inicial

La partícula alcanza el suelo cuando $z=0$, es decir

$$-\frac{1}{2} g_0 \sin^2\alpha \, t_h^2 + h = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{2h}{g_0}}$$

igual que para $\omega=0$

Cuando la partícula toca el suelo lo hace en

$$\vec{x}(t_h) = \frac{1}{2} g_0 \sin\alpha \left[\cos\alpha \, t_h^2 \hat{e}_x - \frac{2}{3}\omega \sin(\lambda-\alpha) t_h^3 \hat{e}_y\right]$$

$$= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} h \hat{e}_x - \frac{1}{3}\omega g_0 \sin\alpha \sin(\lambda-\alpha) \frac{1}{\sin^3\alpha}\left(\frac{2h}{g_0}\right)^{3/2} \hat{e}_y$$

igual que para $\omega=0$

Se desvía, por tanto, en la dirección del eje OY una distancia dada por

$$y(t_h) = -\frac{1}{3}\omega\left(\frac{8h^3}{g_0}\right)^{1/2} \frac{\sin(\lambda-\alpha)}{\sin^2\alpha}$$

La desviación se anula para $\lambda=\alpha$.