Examen de Mecánica Clásica **Grupo A** **4 Septiembre 2015**

Parte I **Profesor: Fernando Ruiz**

NOMBRE Y APELLIDOS: Soluciones

DNI:

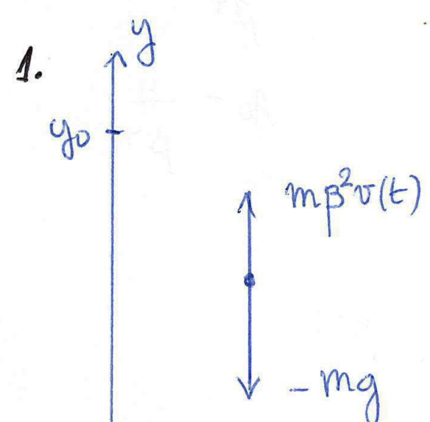
Problema I.1 [1.5 puntos] Una partícula de masa m se deja caer desde una altura y_0 en un medio que opone a su movimiento una fuerza de rozamiento $F_{\mathrm{R}} = m\beta^2 v(t)$ proporcional a su velocidad $v(t)$, siendo m la masa de la partícula y β una constante. Calcúlese la trayectoria $y(t)$ de la partícula.

Problema I.2 [1.5 puntos] Una partícula se mueve sobre una órbita gravitatoria elíptica, dada por

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu k}{L^2}\,(1 + e\,\cos\theta)\,,$$

donde μ es la masa reducida, k es la constante del potencial gravitatorio y e es la excentricidad. Cuando la partícula se encuentra en el perihelio (punto de máximo acercamiento), se le comunica un momento lineal P en la dirección radial. Como consecuencia de ello, la partícula pasa a una órbita elíptica distinta. Calcúlese la energía en la nueva órbita en términos de la energía E_{a} en la órbita antigua y del momento P. Determínese el cambio en el momento angular de la partícula. Calcúlese la excentricidad de la nueva órbita. Si el momento que se tranfiere a la partícula tuviese dirección perpendicular a la radial y sentido el del movimiento, ¿cúales serían la energía y el momento angular en la nueva órbita?

1.



La ecuación del movimiento (segunda ley de Newton) es

$$\left.\begin{aligned} -m\frac{d^2y}{dt^2} &= -mg + m\beta^2\frac{dy}{dt} \\ y(0) &= y_0 \\ \dot{y}(0) &= 0 \quad \text{pues se } \underline{\text{deja}} \text{ caer} \end{aligned}\right\}$$

$$\ddot{y}(t) + \beta^2\dot{y} = g$$

Es una ecuación diferencial de segundo orden lineal no homogénea. Su solución es

$$y(t) = y_{homogénea}(t) + y_{particular}(t)$$

con

a) y_{hom} : $\lambda^2 + \beta^2 \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0, -\beta^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y_{hom}(t) = A + Be^{-\beta^2 t}$$

b) $y_{part}(t) = \frac{g}{\beta^2} t$

Así pues,

$$y(t) = A + Be^{-\beta^2 t} + \frac{g}{\beta^2} t \quad , \quad A, B = \text{constantes de integración}$$

Substituyendo los datos iniciales:

$y(0) = y_0 \iff A + B = y_0$

$\dot{y}(0) = 0 \qquad -\beta^2 B + \frac{g}{\beta^2} = 0 \Rightarrow B = \frac{g}{\beta^4}$

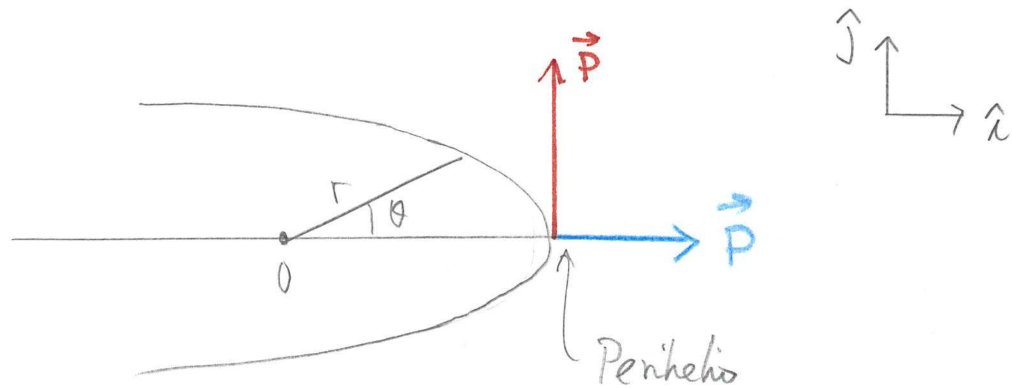
$$\Rightarrow A = y_0 - \frac{g}{\beta^4}$$

Concluimos que

$$y(t) = y_0 - \frac{g}{\beta^4} + \frac{g}{\beta^2} t + \frac{g}{\beta^4} e^{-\beta^2 t}$$

$$= y_0 + \frac{g}{\beta^2} t + \frac{g}{\beta^4} \left(e^{-\beta^2 t} - 1\right)$$

2.



En el perihelio se tiene inicialmente

$$\vec{x}_p = r_p \hat{\imath} \qquad \frac{1}{r_p} = \frac{\mu k}{L^2}(1+e) \qquad \theta_p = 0$$

$$\vec{p} = \mu r_p \dot{\theta}_p \hat{\jmath}$$

En el primer caso se comunica a la partícula un momento $\vec{P} = P\hat{\imath}$, con lo que

- momento final $= \vec{p}_f = (\vec{p} + P\hat{\imath}) \Rightarrow \vec{p}_f^{\,2} = p^2 + P^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow E_{final} = \frac{\vec{p}_f^{\,2}}{2\mu} + V(r) = \frac{p^2}{2\mu} + V(r) + \frac{P^2}{2\mu} = \boxed{E_i + \frac{P^2}{2\mu} = E_f}$$

- momento angular final $= \vec{x}_p \wedge \vec{p}_f = \vec{x}_p \wedge (\vec{p} + P\hat{\imath}) = \vec{x}_p \wedge \vec{p} = \vec{L}_i \Rightarrow$

$$\vec{x}_p \parallel \hat{\jmath} \Rightarrow \vec{x}_p \wedge P\hat{\imath} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{L}_f = \vec{L}_i = \vec{L}}$$

momento angular no cambia

- $e_f = \sqrt{1 + \dfrac{2E_f L_f^2}{\mu k^2}} = \left[1 + \dfrac{2L^2 E_i}{\mu k^2} + \left(\dfrac{LP}{\mu k}\right)^2\right]^{1/2}$

En el segundo caso se transfiere a la partícula un momento $\vec{P} = P\hat{j}$, con lo que

- $\vec{p}_f = \vec{p} + P\hat{j} = (\mu r_p \dot{\theta}_p + P)\hat{j} \rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{p}_f^{\,2} = (\mu r_p \dot{\theta}_p)^2 + 2\mu r_p \dot{\theta}_p P + P^2 = p^2 + 2\mu r_p \frac{L_i P}{\mu r_p} + P^2$$

$$L_i = \mu r_p^2 \dot{\theta}_p \Rightarrow \dot{\theta}_p = \frac{L_i}{\mu r_p^2}$$

$$\vec{p}_f^{\,2} = p^2 + \frac{2L_i P}{r_p} + P^2$$

$$\Rightarrow \boxed{E_f = E_i + \frac{LP}{\mu r_p} + \frac{P^2}{2\mu}} \quad , \quad L := L_i$$

- $\vec{L}_f = \vec{x}_p \wedge \vec{p}_f = \vec{x}_p \wedge (\vec{p} + P\hat{j}) = \vec{L}_i + \underbrace{(r_p\hat{i} \wedge P\hat{j})}_{r_p P \hat{k}}$

$$\Delta\vec{L} = \vec{L}_f - \vec{L}_i = r_p P \hat{k} = \boxed{\frac{L^2 P}{\mu k(1+e)}\,\hat{k} = \Delta\vec{L}}$$