Lago Superior

En el enunciado que se propone en el problema 10.17 del [Thornton&Marion] se dice explícitamente que la latitud $\lambda = 47^{\rm o}$ puede tomarse constante sobre todo el lago. Si se hace así, el resultado es que la ¡¡ orilla Norte está aproximadamente 133.8 m por debajo del centro !! Esto contrasta con una solución a este problema que circula por la red y que da 7 m de desnivel. El planteamiento en esa solución es correcto (insisto, dentro de la aproximación de latitus constante sobre el lago). Sin embargo, el resultado numérico es erróneo. De hecho, operando con cuidado (siempre dentro de la paroximación de latitud constante) salen los ya mencionados 133.8 m.

La aproximación que toma la latitud como constante sobre todo el lago no es muy buena. En efecto, el cociente entre el diámetro $2a$ del lago y el radio R de la Tierra es

$$\frac{2a}{R} =\simeq 0.05\,.$$

Ya no es un número comprendido entre 10^{-4} y 10^{-3}, por lo que hay que andarse con cuidado. El lago abarca de Norte a Sur un intervalo de latitudes

$$\Delta\lambda \simeq 0.05 \text{ rad } \simeq 2^{\rm o}\,55'\,.$$

El ángulo $\delta(\lambda)$ que se desvía la plomada de la vertical (es decir, el ángulo que forma la gravedad efectiva $\mathbf{g} = \mathbf{g}_0 - \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{R})$ con $\mathbf{g}_0 = g_0\mathbf{e}_z$, siendo $\mathbf{e}_z$ el unitario perpendicular a la superficie terrestre) está dado por

$$\tan\delta(\lambda) = \frac{\gamma\,\sin 2\lambda}{2\,(1-\gamma\,\cos^2\lambda)}\ , \qquad \gamma = \frac{\omega^2 R}{g_0} \simeq 3.453\times 10^{-3}$$

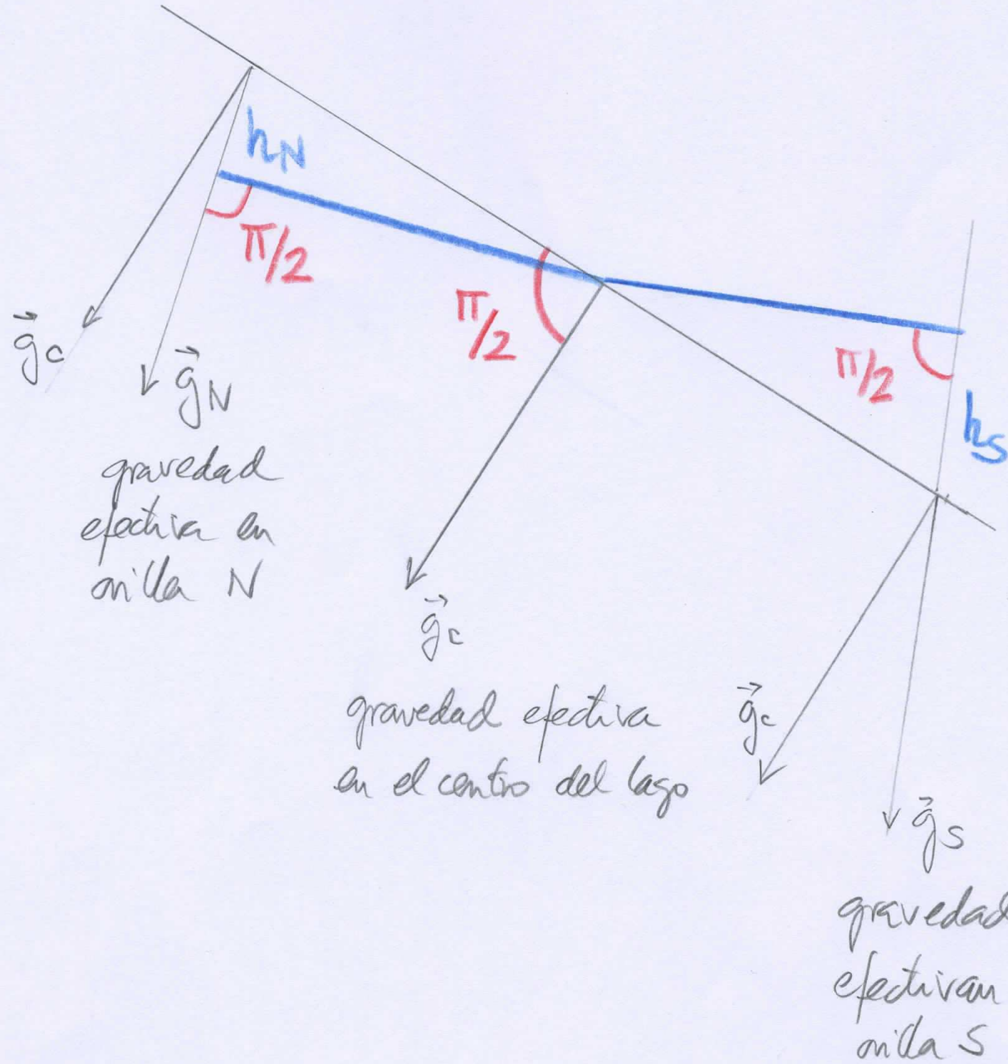
En las orillas Norte y Sur y en el centro del lago se tiene ($\lambda = 47^{\rm o} = 0.8203\,\text{rad}$)

$$\begin{array}{rlclcl}
\text{Norte:} & \lambda_{\rm N} = \lambda + \Delta\lambda/2 & \Rightarrow & \tan\delta(\lambda_{\rm N}) \simeq 1.706\ \times 10^{-3} & \Rightarrow & \delta(\lambda_{\rm N}) \simeq 1.706\ \times 10^{-3} \\
\text{Centro:} & \lambda_{\rm C} = \lambda & \Rightarrow & \tan\delta(\lambda_{\rm C}) \simeq 1.724\ \times 10^{-3} & \Rightarrow & \delta(\lambda_{\rm C}) \simeq 1.724\ \times 10^{-3} \\
\text{Sur:} & \lambda_{\rm S} = \lambda - \Delta\lambda/2 & \Rightarrow & \tan\delta(\lambda_{\rm S}) \simeq 1.653\ \times 10^{-3} & \Rightarrow & \delta(\lambda_{\rm S}) \simeq 1.653\ \times 10^{-3}\,.
\end{array}$$

Recuérdes que $\delta(\lambda_{\rm max}) \simeq 1.729\times 10^{-3}$ rad. De la figura adjunta (ver revereso) se sigue que las diferencias de altura de las orillas Norte y Sur con el centro son

$$\begin{aligned}
h_{\rm N} &= a\sin\big[\delta(\lambda_{\rm N}) - \delta(\lambda_{\rm C})\big] \simeq -\,2.845\,\text{m} \\
h_{\rm S} &= a\sin\big[\delta(\lambda_{\rm C}) - \delta(\lambda_{\rm S})\big] \simeq 11.454\,\text{m}\,.
\end{aligned}$$

Para un lago con un diámetro de 1 km, el cociente $2a/R$ es 1.5×10^{-4} y la gravedad efectiva puede tomarse constante sobre el lago. En esta caso $|h_{\rm N}| = |h_{\rm S}| = a\sin\delta(\lambda)$, con λ la latitud del lago.



(Por definición) la superficie real del lago en un punto es perpendicular a la $\vec{g}$ efectiva en ese punto. De acuerdo con esto, para calcular h_N y h_S basta proceder como se ha hecho.