Sección eficaz para caída de partículas en campo de fuerzas producido por $V(r) = -k/r^2$, $k>0$

De la conservación de la energía

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2} = \text{const.}$$

se sigue que

$$\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 = E - V(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2} \geq 0$$

$$E r^2 \geq r^2 V(r) + \frac{L^2}{2\mu} \qquad (1)$$

Para una partícula que cae al centro de fuerzas, $r \to 0$.
Para que $r\to 0$ sea compatible con la ec. (1) se tiene que verificar la condición

$$0 \geq \lim_{r\to 0} [r^2 V(r)] + \frac{L^2}{2\mu}$$

$$\lim_{r\to 0} [r^2 V(r)] < -\frac{L^2}{2\mu} \qquad (2)$$

En el caso que nos ocupa, $V = -\frac{k}{r^2}$, la ec. (2) se reduce a

$$-k < -\frac{L^2}{2\mu} \iff k > \frac{L^2}{2\mu} \qquad (3)$$

Recordemos que $L = \mu b v$, donde b es el parámetro de impacto y v la velocidad de incidencia ($t\to-\infty$).
Con esto, la ec. (3) toma la forma

$$k > \frac{1}{2}\mu b^2 v^2 \iff b < \frac{1}{v}\sqrt{\frac{2k}{\mu}} =: b_{max} \qquad (4)$$

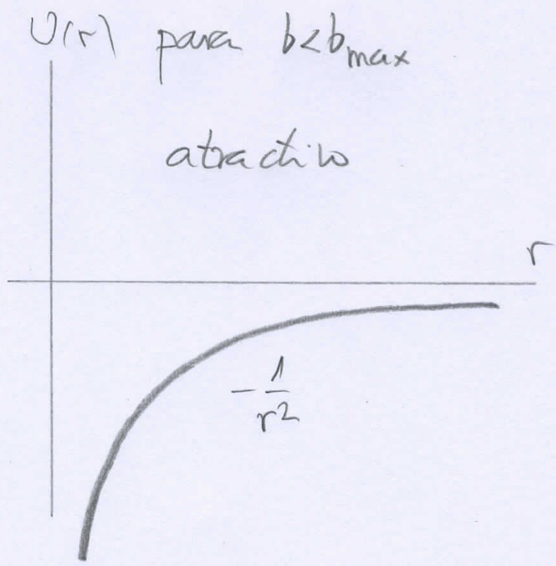
Es decir las partículas que caen al centro satisfacen la condición (4). Esto es lógico pues si el parámetro de impacto es muy pequeño, la partícula se ve atraída por el centro de fuerzas y cae en él. Si el parámetro de impacto aumenta, siente menos la atracción. A partir de b_{max}, la energía cinética de la partícula (determinada por v) es suficiente para escapar. Así pues la superficie efectiva para que la partícula caiga en el centro de fuerzas (o lo que es lo mismo la sección eficaz para la caída de partículas) es

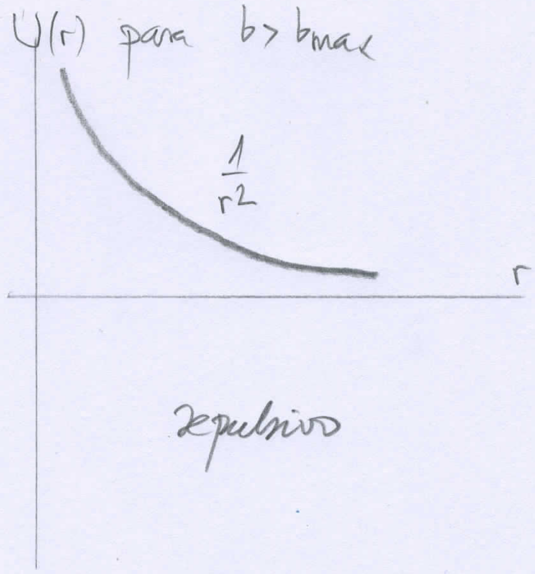
$$\sigma_{caida} = \pi b_{max}^2 = \frac{2\pi k}{\mu v^2} = \frac{\pi k}{E}$$

Discusión (no forma parte del ejercicio). El potencial $U(r)$ para el problema efectivo unidimensional es

$$U(r) = -\frac{k}{r^2} + \frac{L^2}{2\mu r^2} = -\frac{k}{r} + \frac{\mu b^2 v^2}{2r^2} = -\left(1 - \frac{b^2}{b_{max}^2}\right)\frac{k}{r^2}$$

Si $b < b_{max}$, $U(r)$ va como $-\frac{1}{r^2}$ y es atractivo. Si, por el contrario, $b > b_{max}$, $U(r)$ va como $\frac{1}{r^2}$ y es repulsivo. Gráficamente se tiene





Nótese que para partículas que caen al centro la distinción entre sección eficaz diferencial y sección eficaz total no tiene mucho sentido, pues las partículas no emergen.