UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA I
GRADO EN FÍSICA

Mecánica clásica – Curso 2014/15 – Grupo A

Problemas

Mecánica newtoniana

1. Problemas 1.11, 1.20, 1.21, 1.33, 1.34, 1.41 y 1.1 del [Thornton&Marion].

2. El moviemiento de una partícula está descrito en coordenadas cilíndricas ρ, ϕ, z. Calcúlense las componentes cartesianas L_x, L_y, L_z del momento angular en términos de $\dot{\rho}$, $\dot{\phi}$, $\dot{z}$. Calcúlense las componentes cilíndricas L_ϕ, L_ϕ, L_z en términos de $\dot{\rho}$, $\dot{\phi}$, $\dot{z}$.

3. Una partícula de masa m se mueve sobre la curva $x = a\cos(\omega t)$, $y = b\sin(\omega t)$, con ω constante. Cálculese respecto al origen el momento de la fuerza que actua sobre la partícula, su momento angular y su aceleración en la dirección normal.

4. [Grupo B] Una partícula se mueve siguiendo una trayectoria horizontal formada por dos rectas unidas suavemente por un arco de circunferencia de radio R. Su velocidad es $v = kt$, con k constante y t el tiempo transcurrido desde que se inició el movimiento. Hallar la aceleración máxima sabiendo que la partícula entró en la curva en $t = 2$ y que las dos rectas forman un ángulo de 60^o.

5. Una partícula de masa m se mueve sobre la superificie de una esfera de radio R como consecuencia de la acción sobre ella de una fuerza $\mathbf{F}$. Demuéstrese que si la componente de la fuerza en la dirección radial es cero, $T_r = 0$, la partícula no se mueve, $\dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$.

6. [Grupo B] Una partícula de masa m se abadona sin velocidad inicial en un medio que opone a su movimiento unan fuerza mk^2v^2, siendo k una constante y v la velocidad. Tras recorrer una altura h, choca elásticamente (es decir, conservando la anergía y el momento lineal) con un plano horizontal. Cálculese
1) la velociadad de la partícula al llegar al plano, y
2) el tiempo que tardará en alcanzar la máxima altura tras el choque.

7. Una partícula se desliza por la acción de la gravedad sobre una esfera de radio R que se encuentra fija en el suelo, tal y como se indica en la Figura 1. Calcúlese el ángulo θ en el que la partícula se separa de la esfera y la distancia d a la que impacta el suelo.

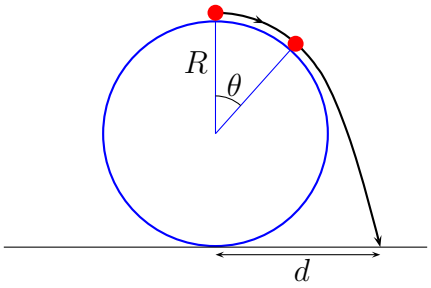

Figura 1.

8. [Grupo B, 8] Una partícula de masa m se lanza con velocidad inicial $v_0\mathbf{e}_x$ desde el punto más alto de la cicloide

$$x = R\,(\theta + \sin\theta)\,, \quad y = R\,(1 + \cos\theta)\,, \quad 0 \leq \theta \leq \pi\,,$$

la cual aparece dibujada en la Figura 2. Antes de estudiar el movimiento de la partícula es conveniente entender algunas propiedades básicas de las cicloides. Demuéstrese que la tangente dy/dx a la curva en un punto P especificado por un ángulo θ tiene pediente $-\tan(\theta/2)$. El elemento de longitud ds, es decir la distancia entre dos puntos (x, y) y $(x + dx, y + dy)$, está dado por $ds^2 = dx^2 + dy^2$. Demuéstrese que sobre la curva se tiene $s = 4R\sin(\theta/2)$. Usando la definición de radio de curvatura $\rho = ds/d\theta$, calcúlese el radio de curvatura de la cicloide en el punto P.

Supondremos que la única fuerza que actua sobre la partícula es la gravitatoria. Al principio, la partícula se desliza sobre la curva. Transcurrido un cierto tiempo, abadona la cicloide y entra en tiro parabólico. Escríbanse y resuélvanse las ecuaciones de movimiento que rigen el movimiento de la partícula mientras que ésta se desliza sobre la curva. Cálculese la fuerza que ejerce la partícula sobre la curva. Determínese el punto en que la partícula abandona la curva y entra en tiro parabólico. Hállese el valor de v_0 a partir del cual la partícula no desliza y tiene movimiento parabólico desde el principio.

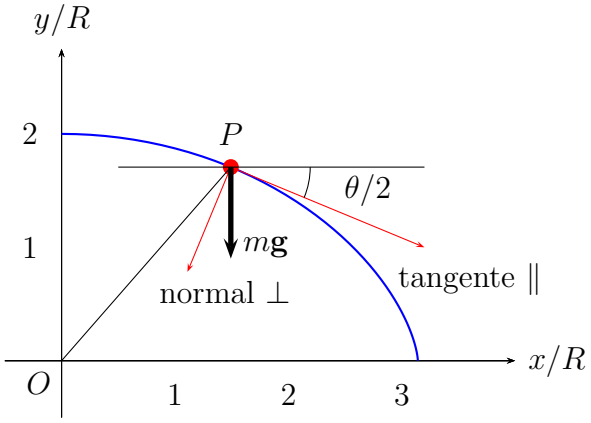

Figura 2. *En la figura se reproducen las propiedades geométricas del enunciado. Debido a que* $s = 4R\sin(\theta/2)$ *y* $\rho = 2R\cos(\theta/2)$, *el ángulo que forman la vertical y el segmento* OP *no guarda relación lineal con* θ.

9. [Goldstein, 1.13] Un cohete parte del reposo y asciende verticalmente. La velocidad de salida de los gases relativa al cohete es v' y la pérdida de masa por segundo es constante e igual a γ veces la masa con la que despega del cohete. Demuéstrese que la ecuación de movimiento es

$$\frac{dv}{dt} = -g - v' \, \frac{\gamma \, m_0}{m(t)} \ , \tag{1}$$

donde $v(t)$ y $m(t)$ son la velocidad y la masa del cohete en el instante t y g es la aceleración debida a la gravedad, que se supone constante sobre la trayectoria del cohete. Sabiendo que la velocidad de escape de la tierra es 11.2 $km\ s^{-1}$, demuéstrese que, para una velocidad de los gases $v' = 2.1\ km\, s^{-1}$ y un factor de pérdida de masa $\gamma = 1/60$, la masa del cohete cargado de combustible debe ser aproximadamente 300 veces la masa del cohete vacío. Esto explica por qué los cohetes son tan grandes... Para llevar todo el combustible necesario.

10. Una partícula de masa m con velocidad $\mathbf{v}_<$ abandona el semiespacio $z < 0$, en el que la energía potencial es constante e igual a $V_<$, y se adentra en el semiespacio $z > 0$, en el que la energía potencial es constante e igual a $V_>$. Teniendo en cuenta que la energía potencial depende de z (pero no de x, ni de y) y usando la conservación del momento lineal, determínese el cambio en la dirección del movimiento de la partícula.

Sistemas de referencia en rotación

11. Una partícula de masa m se mueve sobre un plano por la acción de un muelle de constante de recuperación k que le une a un centro O. Calcúlese la trayectoria, la velocidad y la aceleración que percibe un observador que rota con velocidad angular $\omega = \sqrt{k/m}$ en torno al eje perpendicular al plano de movimiento que pasa por O.

12. [Tiovivo] Una varilla vertical rota con velocidad angular ω en torno a su eje. De ella pende una cuerda inextensible de masa despreciable, con un partícula de masa m en su extremo inferior. Calcúlese la tensión de la cuerda y el ángulo que forma la cuerda con la vertical en la posición de equilibrio.

13. [Comparar con el problema 10.17 de Thornton&Marion. Ver solución en páginas separadas] El Lago Superior puede aproximarse por un círculo de radio $a = 162\ km$. Suponiendo que el agua se encuentra en reposo con respecto a la Tierra y tomando una latitud constante de 47º N para el centro del lago, calcúlese la diferencia de alturas entre su centro y las orillas Norte y Sur.

14. [Grupo B] El río Ebro, a su paso por Zaragoza, fluye de NO a SE. Suponiendo que su achura es aproximadamente de 300 m, que la velocidad del agua es de 3 $m\, s^{-1}$ y que la superficie es suave ¿qué diferencia de altura hay entre las dos orillas? La latittud de Zaragoza es de 41º 40′ N.

15. [Grupo B] Una partícula de masa m se desliza sin rozamiento sobre un plano incliando de longitud ℓ que forma un ángulo α con al plano tangente a la superficie terrestre. El plano está colocado en un lugar de latitud Norte y su línea de máxima pendiente tiene orientación Norte-Sur.

Inicialmente la partícula se encuentra en reposo en la parte más alta del plano. Trabajando hasta primer orden de aproximación en la velocidad de rotación de la Tierra, calcúlese la desviación de la partícula cuando ésta alcanza el final del plano. Determínese el valor de α para el que no existe desviación alguna.

Fuerzas centrales

16. Calcúlese en términos de la excentricidad de la órbita la posición del perihelio y el afelio (puntos de máximo y mínimo acercamiento al Sol) de un planeta. Calcúlese la velocidad del planeta en dichos puntos.

17. Calcúlese la distancia media de un planeta al Sol, definida como la distancia promediada sobre una vuelta, o equivalentemente, sobre un período. El valor medio viene expresado en términos de la integeral

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^3} = \frac{e^2+2}{2\left(1-e^2\right)^{5/2}} \ .$$

18. [Taylor, ejemplo 8.6] Como es sabido, la excentricidad y los semiejes mayor y menor de las órbitas elípticas que describe una nave en su movimiento alrededor de la Tierra están dadas en términos de su energía E y su momento angular L. Para cambiar de órbita basta pues cambiar E y L.

En el perihelio y en el afelio de una órbita elíptica, la componente de la velocidad en la dirección radial se anula, es decir $\dot{r} = 0$. Cualquier cambio de la volocidad de la nave en esos puntos se traduce en un cambio de su momento angular, pues $L = \mu r^2\dot{\theta}$ y en ellos $|\mathbf{v}| = r\dot{\theta}$. Una activación de los cohetes de la nave en esos puntos a favor del movimiento (gases emitidos en sentido contrario al de avance de la nave) se traduce en una ganancia de velocidad y de momento angular. Si la epxulsión de gases es en el sentido del movimiento, la velocidad y el momento angular disminuyen.

Teniendo en cuenta lo anterior, considérese una nave que se mueve con velocidad v_1 según una órbita cicular de radio R_1 alrededor de la Tierra. La nave activa sus cohetes y pasa a una órbita elíptica con perihelio situado a distancia R_1 de la Tierra. Cuando llega al afelio de la nueva órbita, situado a distancia R_2 de la Tierra, vuelve a activar los cohetes y pasa a una órbita circular de radio R_2. Cáculense los factores en que debe aumentarse las velocidades inicial e intermedia para que la órbita circular final tenga radio $R_2 = 2R_1$. Estos factores se llaman en inglés "thrust factors".

19. [Goldstein, 3.13] Una partícula se mueve en un campo de fuerzas central con origen en un punto O. Encuéntrese la ley de fuerzas para que la partícula describa una órbita circular que pasa por el propio origen O. Demuéstrese que para dicha órbita la energía total de la partícula es cero. Encuéntrese el período de la órbita. Hállese $\dot{x}$, $\dot{y}$ y v como funciones del ángulo polar θ y demuéstrese que se hacen infinitas al pasar por el origen de fuerzas.

20. Considérese el problema de Kepler (potencial $V = -k/r$ con $k > 0$). Demuéstrese que la

velocidad de una partícula en un punto P de una órbita parabólica de momento angular L es $\sqrt{2}$ veces la de la órbita circular con momento angular L que pasa por ese mismo punto. Pruébese que el perihelio de la parábola es la mitad del radio de la circunferencia.

21. [Goldstein, 3.11] Dos partículas masivas se mueven como resultado de la interacción gravitatoria que hay entre ellas. Supóngase que el momento angular de la partícula reducida equivalente es cero. Si la distancia inicial entre las partículas es r_0, resuélvanse las ecuaciones de movimiento. Las partículas se precipitan la una sobre la otra, es decir, r se anula en un tiempo τ. Cálculese τ.

22. [Oscilaciones en torno a una órbita circular de un potencial central] Una partícula de masa μ está sujeta una fuerza central atractiva $\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla} V$ con $V = -k/r^3$ y $k > 0$.

(1) Determínese el radio r_0 de las órbitas circulares.

(2) Supóngase que la partícula se mueve inicialmente según una órbita circular y que se saca de ésta de forma que la coordenda radial pasa de r_0 a $r = r_0 + \rho$, con $\rho \ll r_0$. Encuéntrese a orden más bajo en ρ la ecuación de movimiento para ρ. Estúdiese si su solución es estable, es decir, si la partícula vuelve a la órbita circular ($\rho = 0$) o si, por el contrario, se aleja de la misma.

23. Una partícula de masa μ se mueve en un campo de fuerzas central $\mathbf{F} = f(r)\,\hat{\mathbf{x}}$. Demuéstrese que, si L es el momento angular de la partícula, la condición para que existe una órbita circular de radio r_0 es que

$$f(r_0) = -\frac{L^2}{\mu r_0^3}\,.$$

Pruébese que la órbita es estable si

$$\frac{df}{dr}\bigg|_{r=r_0} < -\frac{3}{r_0}\,f(r_0)\,.$$

Hállense los valores de n para los que un campo de fuerzas con $f(r) = -k/r^n$ tiene órbitas circulares estables.

24. Un cometa de masa μ se mueve en el campo gravitatorio del Sol (potencial $V(r) = -k/r$, con $k = \mu M_\odot G$). Incide con parámetro de impacto b y velocidad inicial v_0. Escríbase la ecuación de movimiento para el inverso $u = 1/r$ de la distancia r al origen de fuerzas como función del ángulo polar θ. Determínese la trayectoria del cometa. Hállese el ángulo de dispersión con respecto a la dirección de incidencia. Cálculese la distancia de máxima aproximación.

25. Una partícula de masa μ incide con parámetro de impacto b y velocidad $\mathbf{v}_0$ sobre un campo de fuerzas central, que ejerce sobre ella una fuerza $\mathbf{F} = -\mu k^2 \mathbf{x}/r^4$, donde $\mathbf{x}$ el vector de posición con respecto al origen de fuerzas. ¿Se trata de un campo atractivo o repulsivo? Calcúlese la energía potencial de la partícula. Demuéstrese que la ecuación de movimiento para $u = 1/r$ es

$$\frac{du^2}{d\theta^2} + \Big(1 - \frac{k^2}{b^2 v_0^2}\Big)u = 0\,,$$

donde $v_0 = |\mathbf{v}_0|$. Resuélvase la ecuación y estúdiese la trayectoria de la partícula para los siguientes valores de b y v_0:

$$\frac{k^2}{b^2 v_0^2} = \frac{1}{2},\ \frac{144}{169},\ \frac{35}{36}\,.$$

Calcúlese en cada caso la dirección con que sale la partícula. Dibújese con la ayuda de algún programa de manipulación algebraica (Maple, Mathematica, Mathlab, etc.) la trayectoria en cada caso.

26. Considérese el campo de fuerzas del problema anterior y supóngase que la partícula se encuentra inicialmente a distacia r_0 finita del centro de fuerzas con velocidad $\mathbf{v}_0$ dirigida según una dirección que forma un ángulo α con el segmento que la une al origen. Encuéntrese su trayectoria. Particularícese para $\alpha = \pi/2$ y dibújense las órbitas de la partícula para los siguientes valores

$$\frac{k^2}{r_0^2\, v_0^2} = \frac{1}{2}\,,\frac{144}{169}\,,\frac{35}{36}\,.$$

27. Obténgase la sección eficaz diferencial de dispersión de Rutherford (potencial coulombiano repulsivo) a partir de las ecuaciones

$$\psi_\infty = \pi - 2\chi\,, \qquad \chi = \int_0^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{1 - s^2 - \frac{V(b/s)}{E}}}\,,$$

donde ψ_∞ es el ángulo de dispersión y χ es el ángulo que forma la dirección de incidencia con la recta que une el centro de dispersión y el periápside.

28. Calcúlese la sección eficaz de dispersión para un potencial central $V(r) = k/r^2$, con $k > 0$.

29. Determínese la sección eficaz para la caída al centro del campo de fuerzas centrales producido por $V(r) = -k/r^2$, con $k > 0$. Dicha caída está caracterizada por la condición

$$\lim_{r\to 0} r^2\, V(r) < -\frac{L^2}{2\mu}\,,$$

que se obtiene a su vez del problema efectivo unidimensional que resulta para $r(t)$.