UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

APELLIDOS ____________________

NOMBRE ____________________

FIRMA ____________________ DNI ____________________

# Física cuántica II - Examen final - 16 de junio de 2025

(Tiempo: 3 horas)

**1 [2.5 puntos].** Un sistema cuántico tiene espacio de Hilbert $\mathbb{C}^2$ y hamiltoniano

$$H = E_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

donde $E_0$ es una constante real positiva con dimensiones de energía.

a) Determinar el estado del sistema en un tiempo $t$ si inicialmente se encuentra en $|\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) Un observable está descrito por la matriz

$$A = \hbar \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Si se realiza una medida de A en un tiempo $t = T$ ¿qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidades?

c) Si la mediada del observable $A$ en el apartado anterior da como resultado el mayor de los valores posibles y se mide la energía en un timepo posterior $t = 3T$ ¿qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidades?

a) Los autovalores del Hamiltoniano son las soluciones $E$ de la ecuación

$$\det(H - E) = 0 \quad \Rightarrow \quad E = \pm E_0 =: E_\pm$$

Los correspondientes atuoestados son

$$|E_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \qquad |E_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

En términos de la base $\{|E_-\rangle, |E_+\rangle\}$, el estado inicial se escribe

$$|\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |E_+\rangle + |E_-\rangle \right)$$

En un tiempo $t$ el estado del sistema será (0.75)

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( e^{-iE_+t/\hbar} |E_+\rangle + e^{-iE_-t/\hbar} |E_-\rangle \right.$$

b) Los posibles valores que pueden obtenerse en una medida de $A$ son sus autovalores, es decir las soluciones $a$ de

$$\det(A - a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a(a - 2\hbar) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0, 2\hbar =: a_m, a_M .$$

Los autoestados asociados a estos autovalores on

$$|a_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = |E_+\rangle, \quad , \quad |a_M\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = |E_-\rangle\,.$$

Las probabilidades de obtener estos valores en una medida de $A$ realizada en un tiempo $T$ son (0.75)

$$P_{\psi(T)}(A, a_m = 0) = \left|\langle a_m|\psi(T)\rangle\right|^2 = \left|\langle E_+|\psi(T)\rangle\right|^2 = \frac{1}{2}\,,$$
$$P_{\psi(T)}(A, a_M = 2\hbar) = \left|\langle a_m|\psi(T)\rangle\right|^2 = \left|\langle E_-|\psi(T)\rangle\right|^2 = \frac{1}{2}\,.$$

c) Si en la media se obtiene el mayor valor posible, es decir $a_M = 2\hbar$, el estado del sistema inmediatamente después de la medida es $|a_M\rangle = |E_-\rangle$. Si se mide la energía en cualquier instante posterior, siempre se obtendrá (es decir, con probabilidad 1) $E_-$ (1.0).

**2 [2.5 puntos].** Un sistema está formado por dos partículas de espín $s = 1$. Enumerar los posibles estados de espín del sistema en las bases acoplada y desacoplada en los dos siguientes casos:
a) las partículas son distinguibles.
b) las partículas son idénticas

**Problema 2**

Al componer dos espines $s_1 = s_2 = 1$ hay nueve posible estados de espín. En la base desacoplada $\{\mathbf{S}_1^2, \mathbf{S}_2^2, S_{1z}, S_{2z}\}$ los estadoss son

$$|s_1 = 1,\, s_2 = 1,\, m_1,\, m_2\rangle =: |m_1,\, m_2\rangle\,, \quad m_1, m_2 = -1, 0, +1\,.$$

En la base $\{\mathbf{S}_1^2, \mathbf{S}_2^2, \vec{\mathbf{S}}, S_z$, con $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$, los estados de espín del sitema son

$$|s_1 = 1,\, s_2 = 1,\, S,\, M\rangle =: |S,\, M_S\rangle\,, \quad S = 0, 1, 2 \quad M_S = -S, -S+1, \ldots + S$$

La relación entre los elementos de las dos bases viene dada por los coefficientes de Clebsch-Gordsan de la tabla $1 \otimes 1$. A saber,

$$\begin{aligned}
&|S = 2,\, M_S = 2\rangle = |m_1 = 1,\, m_2 = 1\rangle \\
&|S = 2,\, M_S = 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|m_1 = 1,\, m_s = 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|m_1 = 0,\, m_s = 1\rangle \\
&|S = 2,\, M_S = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}|m_1 = 1,\, m_s = -1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|m_1 = 0,\, m_s = 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|m_1 = -1,\, m_s = 1\rangle \\
&|S = 2,\, M_S = -1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|m_1 = -1,\, m_s = 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|m_1 = 0,\, m_s = -1\rangle \\
&|S = 2,\, M_S = -2\rangle = |m_1 = -1,\, m_s = -1\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&|S = 1, M_S = 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|m_1 = 1,\, m_s = 0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|m_1 = 0,\, m_s = 1\rangle \\
&|S = 1,\, M_S = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|m_1 = 1,\, m_s = -1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|m_1 = -1,\, m_s = 1\rangle \\
&|S = 1,\, M_S = -1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|m_1 = -1,\, m_s = 0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|m_1 = 0,\, m_s = -1\rangle
\end{aligned}$$

$$|S = 0,\, M_S = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|m_1 = 1,\, m_s = -1\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|m_1 = 0,\, m_s = 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|m_1 = -1,\, m_s = 1\rangle\,.$$

Si las partículas son distinguibles cualquiera de los nueve estados es posible (0.50 + 0.50 por cada base). Sin embargo, si son idénticas, por ser bosones, el estado debe ser simétrico bajo $m_1 \leftrightarrow m_2$ (0.50). Los únicos estados simétrico son los estados del quintuplete $|S = 2, M_s\rangle$ y el singlete $|S = 0, M_s = 0\rangle$ (1.0).

**3 [2.5 puntos].** El hamiltoniano de un sistema cuántico unidimensional es

$$H = H_0 + H_I \qquad H_0 = \hbar\omega\, a^+ a^+ aa \qquad H_I = \lambda\hbar\omega(a^+ + a)\,,$$

donde $a^+$ y $a$ son los operadores creación y aniquilación de un oscilador armónico de frecuencia angular $\omega$, y $0 < \lambda \ll 1$ es un parámetro sin dimensiones.
a) Demostrar que los autoestados $|n\rangle$ $(n = 0, 1, 2 \ldots)$ del oscilador armónico son autoestados de $H_0$ y calcular sus autovalores y degeneración.
b) Calcular la energía del estado fundamental de $H$ a primer orden en teoría de perturbaciones.
c) Comparar el resultado anterior con el que se obtiene por el método variacional para una un estado prueba $|\psi_\theta\rangle = \cos\theta\,|0\rangle + \sin\theta\,|1\rangle$, siendo $\theta$ el parámetro variacional.

a) Usando $a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$ y $a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$ se tiene que

$$H_0|0\rangle = 0$$
$$H_0|1\rangle = 0$$
$$H_0|n\rangle = \hbar\omega\,(a^+)^2 a^2\,|n\rangle = \sqrt{n(n-1)}\,\hbar\omega\,(a^+)^2\,|n-2\rangle = n(n-1)\,\hbar\omega\,|n\rangle \quad \text{para} \quad n \geq 2\,.$$

Las autoenergías y los autoestados no perturbados son

$$E_n^{(0)} = \hbar\omega\, n(n-1)\,, \quad |\phi_n^{(0)}\rangle = |n\rangle\,, \quad n = 0, 1, \ldots$$

El valor más bajo para $E_n^{(0)}$ se da para $n = 0$ y $n = 1$, por lo que el estado fundamental no perturbado tiene degeneración 2, energía $E_0^{(0)} = E_1^{(0)} = 0$ y subespacio de Hilbert $\mathcal{H}_0 = \mathrm{Span}\{|0\rangle, |1\rangle\}$. Los demás autovalores del Hamiltoniano no perturbado tienen $n \geq 2$ y son simples (0.5).

b) La correción $E_0^{(1)}$ a primer orden en teoría de perturbaciones a la energía del estado fundamental son las soluciones de (0.5).

$$\det\begin{pmatrix} \langle 0|H_I|0\rangle - E_0^{(1)} & \langle 0|H_I|1\rangle \\ \langle 1|H_I|0\rangle & \langle 1|H_I|1\rangle - E_0^{(1)} \end{pmatrix} = 0\,.$$

Usando nuevamente $a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$ y $a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$ resulta

$$\langle 0|H_I|0\rangle = \langle 1|H_I|1\rangle = 0\,,$$
$$\langle 0|H_I|1\rangle = \langle 1|H_I|0\rangle = \lambda\hbar\omega\,\langle 1|(a^+ + a)|0\rangle = \lambda\hbar\omega\,.$$

Y, por tanto,

$$\det\begin{pmatrix} -E_0^{(1)} & \lambda\hbar\omega \\ \lambda\hbar\omega & -E_0^{(1)} \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_0^{(1)} = \pm\lambda\hbar\omega\,.$$

La perturbacióm rompe la degeneración del estado fundamental no perturbado. El estado fundamental pasa a tener energía $E_0 = -\lambda\hbar\omega + O(\lambda^2)$ (0.5).

c) Para la función prueba $|\psi_\theta\rangle = \cos\theta\,|0\rangle + \sin\theta\,|1\rangle$ el valor esperado del hamiltoniano total es (0.5).

$$E(\theta) = \langle\psi_\theta|H|\psi_\theta\rangle = \langle\psi_\theta|H_I|\psi_\theta\rangle = 2\cos\theta\sin\theta\,\langle 0|H_I|1\rangle = \sin(2\theta)\,\lambda\hbar\omega\,.$$

$E(\theta)$ alcanza su mínimo en $\theta = -\pi/4$:

$$\theta = -\frac{\pi}{4}\,, \quad E_{\min} = E(-\tfrac{\pi}{4}) = -\lambda\hbar\omega\,.$$

Los dos métodos dan el mismo resultado. La función prueba

$$|\phi_\theta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle - |1\rangle\big)$$

para la que se alcanza el mínimo es precisamente el autoestado de la matriz de perturbación

$$\begin{pmatrix} \langle 0|H_I|0\rangle & \langle 0|H_I|1\rangle \\ \langle 1|H_I|0\rangle & \langle 1|H_I|1\rangle \end{pmatrix}$$

con autovalor $E_0^{(1)} = -\lambda\hbar\omega$ (0.5).

**4 [2.5 puntos].** Un oscilador armónico **bidimensional** de masa $m$ tiene hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2m}\,(P_x^2 + P_y^2) + \frac{1}{2}\,m(\omega_x^2\,X^2 + \omega_y^2\,Y^2)\,,$$

donde $P_x$ y $P_y$ son operadores momento, $X$ e $Y$ son operadores posición, y $\omega_x$ y $\omega_y$ son frecuencias angulares. El oscilador se encuentra en su estado fundamental. En $t = 0$ se introduce una perturbación dependiente del tiempo

$$V(t) = \lambda\,\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}\;L_z\,e^{-t/\tau}\,, \qquad t > 0\,,$$

donde $L_z$ es la tercera componente del momento angular orbital, $\lambda \ll 1$ es un parámetro adimensional y $\tau$ un tiempo característico. Calcular la probabilidad de que el sistema transite a un estado distinto del fundamdental en un tiempo $t \to \infty$ y determinar cual sería dicho estado. Discutir el caso $\omega_x = \omega_y$.

Los autovalores y autoestados de $H$ son

$$E_{n_x,n_y} = \hbar\omega_x\left(n_x + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega_y\left(n_y + \frac{1}{2}\right), \quad |n_x n_y\rangle = |n_x\rangle \otimes |n_y\rangle\,, \quad n_x, n_y = 0, 1, 2\ldots$$

En particular (0.5),

$$\text{estado fundamental:} \quad |00\rangle\,, \quad E_{00} = \frac{1}{2}\,\hbar\,(\omega_x + \omega_y)\,.$$

En la aproximación de Born, la probabilidad de que, debido a la acción de la perturbación, el sistema hay saltado del estado fundamental $|i\rangle = |00\rangle$ a un estado $|f\rangle = |n_x n_y\rangle$ tras un tiempo $t \to \infty$ es

$$P_{i\to f}(0,\infty) = \frac{1}{\hbar^2}\left|\int_0^\infty dt' e^{\mathrm{i}\omega_{fi}t'}\,V_{if}(t')\right|^2,$$

donde

$$\omega_{fi} = \frac{E_f - E_i}{\hbar} = \omega_x n_x + \omega_y n_y\,, \quad V_{fi}(t) = \lambda\,\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}\,.e^{-t/\tau}\,\langle n_x n_y|L_z|00\rangle\,.$$

Es decir,

$$P_{i\to f}(0,\infty) = \frac{\lambda^2\,(\omega_x^2 + \omega_y^2)}{\hbar^2}\left|\int_0^\infty dt' e^{\mathrm{i}\omega_{fi}t' - \frac{t'}{\tau}}\right|^2 \left|\langle n_x n_y|L_z|00\rangle\right|^2.$$

La integral temporal en esta expresión es (0.5)

$$\int_0^\infty dt' e^{\mathrm{i}\omega_{fi}t' - \frac{t'}{\tau}} = \left.\frac{e^{\mathrm{i}\omega_{fi}t' - \frac{t'}{\tau}}}{\mathrm{i}\omega_{fi} - \frac{1}{\tau}}\right|_{t'=0}^{t'\to\infty} = \frac{1}{\frac{1}{\tau} - \mathrm{i}\omega_{fi}}\,,$$

cuyo módulo al cuadrado vale

$$\left|\int_0^\infty dt' e^{\mathrm{i}\omega_{fi}t' - \frac{t'}{\tau}}\right|^2 = \frac{\tau^2}{1 + \tau^2\,(\omega_x n_x + \omega_y n_y)^2}\,.$$

Para $\langle n_x n_y|L_z|00\rangle$, usando

$$X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_x}}\,(a_x^+ + a_x)\,, \quad P_x = \mathrm{i}\sqrt{\frac{\hbar m\omega_x}{2}}\,(a_x^+ - a_x)$$

y expresiones análogas para el oscilador en la dirección $y$, se tiene que (0.5),

$$L_z = XP_y - YP_x = \frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\left[\sqrt{\frac{\omega_y}{\omega_x}}\,(a_x + a_x^+)\,(a_y^+ - a_y) - \sqrt{\frac{\omega_x}{\omega_y}}\,(a_y + a_y^+)\,(a_x^+ - a_x)\right].$$

A partir de aquí (0.5),

$$\langle n_x n_y | L_z | 00\rangle = \frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\left(\sqrt{\frac{\omega_y}{\omega_x}} - \sqrt{\frac{\omega_x}{\omega_y}}\right)\langle n_x | a_x^+ | 0\rangle\,\langle n_y | a_y^+ | 0\rangle = \frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\left(\sqrt{\frac{\omega_y}{\omega_x}} - \sqrt{\frac{\omega_x}{\omega_y}}\right)\delta_{nx,1}\,\delta_{n_y,1}\,,$$

$$\left|\langle n_x n_y | L_z | 00\rangle\right|^2 = \frac{\hbar^2\,(\omega_x - \omega_y)^2}{2\omega_x\omega_y}\,\delta_{nx,1}\,\delta_{n_y,1}\,.$$

Así pues,

$$P_{00\to n_x n_y}(0,\infty) = \frac{\lambda^2}{4}\,\frac{\tau^2\,(\omega_x^2 + \omega_y^2)}{\left[1 + \tau^2\,(\omega_x + \omega_y)^2\right]}\,\frac{(\omega_x - \omega_y)^2}{\omega_x\omega_y}\,\delta_{nx,1}\,\delta_{n_y,1}\,.$$

Nótese que, como debe ser, la probabilidad no tiene dimensiones. El sistema sólo puede transitar a un estado final $|11\rangle$ con probabilidad $P_{00\to 11}(0,\infty)$.

Si $\omega_x = \omega_y$, la probabilidad se anula. En este caso el hamiltoniano $H$ es el de un oscilador armónico bidimensional isótropo de frecuencia angular $\omega := \omega_x = \omega_y$, $H$ conmuta con $L_z$, y el estado fundamental $|00\rangle$ es propio de $L_z$ con autovalor cero (0.5).