

## Física cuántica II - Examen parcial - 12 de noviembre de 2024 - Soluciones

**1 [1.5 puntos].** Un átomo de hidrógeno (ignórese el espín) se encuentra en un estado

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |100\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |21-1\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}} |210\rangle,$$

donde  $\{|n \ell m_\ell\rangle\}$  son los autoestados de energía  $E_n$ . ¿Cuál es la probabilidad de que al medir la tercera componente del momento angular orbital se obtenga 0? ¿Cuál es el estado inmediatamente después de la medida?

La probabilidad de que al medir  $L_z$  se obtenga 0 es, de acuerdo con el tercer postulado (0.5),

$$P(L_z; 0)_\psi = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 + \left| \frac{1}{\sqrt{6}} \right|^2 = \frac{2}{3}.$$

De acuerdo con el cuarto postulado, el estado después de la medida es el estado normalizado que resulta de proyectar sobre el subespacio con  $m_\ell = 0$  (0.5+0.5):

$$|\psi\rangle_{\text{después}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} |100\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}} |210\rangle}{\left\| \frac{1}{\sqrt{2}} |100\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}} |210\rangle \right\|} = \sqrt{\frac{3}{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} |100\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}} |210\rangle \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} |100\rangle + \frac{1}{2} |210\rangle.$$

**1 [1 punto].** Un sistema está formado por dos partículas de espines  $s_1 = 3/2$  y  $s_2 = 1$  que se encuentran en estados con terceras componentes de espín  $m_1 = -3/2$  y  $m_2 = 1$ . Si se mide el cuadrado  $\mathbf{S}^2$  del espín total  $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$  ¿qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidades?

El estado dado es  $|m_1 = -\frac{3}{2}, m_2 = 1\rangle$ . Usando la tabla de coeficientes de Clebsch-Gordan para  $\frac{3}{2} \otimes 1$  se tiene que (0.5)

$$|m_1 = -\frac{3}{2}, m_2 = 1\rangle = \sqrt{\frac{1}{10}} \left| S = \frac{5}{2}, M = -\frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}} \left| S = \frac{3}{2}, M = -\frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}} \left| S = \frac{1}{2}, M = -\frac{1}{2} \right\rangle.$$

Los valores  $S(S+1)\hbar^2$  que pueden obtenerse al medir  $\mathbf{S}^2$  y sus probabilidades  $P$  son (0.5)

$$\begin{aligned} S = \frac{5}{2} & \quad S(S+1)\hbar^2 = \frac{35}{4} \hbar^2 & \quad P = \left| \sqrt{\frac{1}{10}} \right|^2 = \frac{1}{10}, \\ S = \frac{3}{2} & \quad S(S+1)\hbar^2 = \frac{5}{4} \hbar^2 & \quad P = \frac{2}{5}, \\ S = \frac{1}{2} & \quad S(S+1)\hbar^2 = \frac{3}{4} \hbar^2 & \quad P = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**3 [2 puntos].** Un átomo de hidrógeno está sometido a un campo magnético  $\mathbf{B}$  y un campo eléctrico  $\mathcal{E}$  externos ambos constantes. Los hamiltonianos de interacción son en unidades internacionales

$$H_B = \frac{e}{2m} \mathbf{B} \cdot \mathbf{L}, \quad H_E = e \mathcal{E} \cdot \mathbf{x}.$$

Supóngase que el átomo se encuentra en un estado  $|n \ell m\rangle$ . Encontrar para qué valores de  $\ell'$  y  $m'$  los elementos de matriz  $\langle n \ell' m' | H_B | n \ell m \rangle$  y  $\langle n \ell' m' | H_E | n \ell m \rangle$  son distintos de cero. Demostrar que los dos elementos de matriz no pueden ser distintos de cero simultáneamente.

La acción de  $\mathbf{L} = (L_+, L_-, L_z)$ , donde  $L_{\pm} = L_x \pm iL_y$ , sobre un estado  $|\ell m_{\ell}\rangle$  es

$$L_{\pm} |\ell m\rangle = \hbar \sqrt{\ell(\ell+1) - m_{\ell}(m_{\ell} \pm 1)} |\ell m \pm 1\rangle =: \hbar C_{\pm} |\ell m \pm 1\rangle, \quad L_z |\ell m\rangle = \hbar m |\ell m\rangle.$$

De lo anterior y de  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2}(a_+ b_- + a_- b_+) + a_z b_z$  se sigue que

$$\begin{aligned} \langle n \ell' m' | H_B | n \ell m \rangle &= -\frac{q}{4m} \langle n \ell' m' | (B_- L_+ + B_+ L_- + 2B_z L_z) | n \ell m \rangle \\ &= -\frac{q\hbar}{4m} \delta_{\ell'\ell} (C_+ B_- \delta_{m',m+1} + C_- B_+ \delta_{m',m-1} + 2m B_z \delta_{m',m}). \end{aligned}$$

donde  $C_{\pm}$  está definida arriba. Para que  $\langle n \ell' m' | H_B | n \ell m \rangle$  sea distinto de cero se necesita  $\ell' = \ell$  y que  $m' = m + 1$ ,  $m$  o  $m - 1$  (1.25).

Para  $\langle \ell' m' | H_E | \ell m \rangle$  se tiene

$$\langle n \ell' m' | H_E | n \ell m \rangle = -\frac{q}{2} \langle n \ell' | r | n \ell \rangle \langle n \ell' m' | (\mathcal{E}_- \frac{x_+}{r} + \mathcal{E}_+ \frac{x_-}{r} + 2\mathcal{E}_z \frac{z}{r}) | n \ell m \rangle.$$

Ahora bien,

$$\frac{x_+}{r} |\ell m\rangle = \text{comb. lineal de estados } |LM\rangle, \text{ con } L = \ell + 1, \ell, \ell - 1 \text{ y } M = m + 1$$

Esto implica que

$$\langle \ell' m' | \frac{x_+}{r} |\ell m\rangle \neq 0$$

requiere que  $\ell'$  sea igual a  $\ell + 1$ ,  $\ell$  o  $\ell - 1$ , y que  $m' = m + 1$ . De estas tres posibilidades se descarta  $\ell' = \ell$  pues

$$\langle \ell, m + 1 | \frac{x_+}{r} |\ell, m\rangle$$

es la integral de un función impar sobre un dominio simétrico y por tanto se anula. Así pues,

$$\langle \ell' m' | \frac{x_+}{r} |\ell m\rangle \neq 0 \text{ requiere } \ell' = \ell \pm 1, m' = m + 1.$$

Análogamente

$$\langle \ell' m' | \frac{x_-}{r} |\ell m\rangle \neq 0 \text{ requiere } \ell' = \ell \pm 1, m' = m - 1,$$

y

$$\langle \ell' m' | \frac{z}{r} |\ell m\rangle \neq 0 \text{ requiere } \ell' = \ell \pm 1, m' = m$$

(1.25). La condición  $\ell' = \ell \pm 1$  es incompatible con la  $\ell' = \ell$  obtenida para  $\langle n \ell' m' | H_B | n \ell m \rangle$ , por lo que ambos elementos de matriz no pueden ser distintos de cero a la vez.

La incompatibilidad se puede probar muy fácilmente como sigue.  $\mathbf{L} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{P}$  conserva paridad pues  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{P}$  la cambian. La paridad de  $|n \ell m\rangle$  es  $(-1)^\ell$ , por lo que la paridad del integrando de  $\langle n \ell' m' | \mathbf{B} \cdot \mathbf{L} | n \ell m \rangle$  es  $(-1)^{\ell+\ell'}$ . Para que  $\langle n \ell' m' | \mathbf{B} \cdot \mathbf{L} | n \ell m \rangle \neq 0$  se necesita  $\ell + \ell'$  par. A su vez, como  $\mathbf{x}$  cambia paridad, la de  $\langle n \ell' m' | \mathcal{E} \cdot \mathbf{x} | n \ell m \rangle$  es  $(-1)^{\ell+\ell'+1}$ . Para que  $\langle n \ell' m' | \mathcal{E} \cdot \mathbf{x} | n \ell m \rangle \neq 0$  se necesitará  $\ell + \ell' + 1$  par, que es incompatible con  $\ell + \ell'$  par.

**4 [2 puntos].** Un sistema está formado por dos electrones en un pozo coulombiano producido por una carga  $Ze$ . Se somete el sistema a la acción de un campo magnético externo constante  $B$  en la dirección del eje  $z$ , de forma que el hamiltoniano del sistema en unidades internacionales es (despreciando la repulsión coulombiana entre electrones)

$$H = H_1 + H_2, \quad H_i = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_i - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_i} + \frac{eB}{2m} (L_{iz} + 2S_{iz}), \quad i = 1, 2.$$

Los electrones tienen  $n = 2$ . A partir de las energías que pueden tener cada uno de los electrones calcular la energía del estado fundamental del sistema, su degeneración y escribir su función de ondas.

La anergia del estado fundamental se obtiene llenando los estados accesibles a cada partícula de forma compatible con el principio de exclusión de Pauli al mismo tiempo que se mantiene el menor valor posible para la energía total. Los estados y energías posibles para cada uno de los electrones son (0.25)

$$E_{2,m_\ell,m_s} = \epsilon_2 + \hbar\omega (m_\ell + 2m_s), \quad \epsilon_n = -\frac{1}{n^2} \frac{Z^2 e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0}, \quad \omega = \frac{eB}{2m}.$$

donde ya se ha tomado  $n = 2$ . Los posibles valores para  $\ell$  son 0 y 1, de forma que las energías de los distintos estados son

$\ell$	$m_\ell$	$m_s$	$m_\ell + 2m_s$	$E_{2,m_\ell,m_s}$
0	0	-1/2	-1	$\epsilon_2 - \hbar\omega$
1	-1	-1/2	-2	$\epsilon_2 - 2\hbar\omega$
1	0	-1/2	-1	$\epsilon_2 - \hbar\omega$
1	1	-1/2	0	$\epsilon_2$

Para mantener la energía en su mínimo posible, un electrón irá al nivel  $\ell = 1$ ,  $m_\ell = -1$ ,  $m_s = -1/2$ , y el otro podrá ir a cualquiera de los estados  $\ell = 1$ ,  $m_\ell = 0$ ,  $m_s = -1/2$  o  $\ell = 0$ ,  $m_\ell = 0$ ,  $m_s = -1/2$ . Así pues, la energía del estado fundamental del sistema es (0.75)

$$E = 2\epsilon_2 - 3\hbar\omega,$$

su degeneración es 2 (0.75), y las funciones de onda son (0.75)

$$\psi(1, 2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{1,-1,-\frac{1}{2}}(1) \psi_{0,0,-\frac{1}{2}}(2) - \psi_{1,-1,-\frac{1}{2}}(2) \psi_{0,0,-\frac{1}{2}}(1)]$$

y

$$\psi(1, 2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{1,-1,-\frac{1}{2}}(1) \psi_{1,0,-\frac{1}{2}}(2) - \psi_{1,-1,-\frac{1}{2}}(2) \psi_{1,0,-\frac{1}{2}}(1)].$$