Ejemplo de observables compatibles

$$E_+ = \hbar\omega \quad \text{doble} \qquad E_- = -\hbar\omega \quad \text{simple} \qquad E_0 = 0 \quad \text{simple}$$

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$A = \alpha \begin{pmatrix} 0 & -1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \qquad [H, A] = 0 \implies \text{Autovectores comunes}$$

Autovalores de A: $\det(A - a) = 0 \iff (a-\alpha)^2(a^2+\alpha^2) = 0 \implies$

$$\implies a_1 = \alpha \quad \text{doble} \qquad a_+ = i\alpha \quad \text{simple} \qquad a_- = -i\alpha \quad \text{simple}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\-i\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\i\\0\\0\end{pmatrix}$$

combinaciones lineales

$$|E_- a_1\rangle \qquad |E_0\, a_1\rangle \qquad |E_+ a_+\rangle \qquad |E_+ a_-\rangle$$

Nota: $H\,|E_+, a_+\rangle = E_+ |E_+ a_+\rangle$

$H\,|E_+ a_-\rangle = E_+ |E_+ a_-\rangle$

(Auto)vectores caracterizados por los $\underbrace{\text{autovalores}}$ de H y A.

Números cuánticos. Cualquier autovector se diferencia de todos los demás en al menos un número cuántico.

Como base ortonormalizada de $\mathcal{H} = \mathbb{C}^4$ puede tomarse

$$\{ |E_- a_1\rangle \;\; |E_0 a_1\rangle \;\; |E_+ a_+\rangle \;\; |E_+ a_-\rangle \}$$

$$\langle E_I a_J | E_{I'} a_{J'} \rangle = \delta_{II'}\, \delta_{JJ'}$$