

Física Cuántica II

Hojas de problemas

FORMULACIÓN MATEMÁTICA DE LA MQ

1.1. [La solución puede encontrarse en la discusión del Postulado V de cualquier texto de MQ]. Probar a partir de ecuación de Schrödinger que la norma de un estado físico $|\psi(t)\rangle$ no cambia en el tiempo,

$$\frac{d}{dt} \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = 0.$$

Equivalentemente, la probabilidad se conserva.

1.2. [La solución puede encontrarse en el Griffiths, sección 3.4.1]. Considérese un sistema en estado cuántico $|\psi\rangle$ y dos observables representados por operadores A and B . Demostrar que

$$\Delta_\psi A \Delta_\psi B \geq \frac{1}{2} \left| \langle \psi | [A, B] | \psi \rangle \right|.$$

1.3. Demostrar que si U es un operador unitario, es decir, tal que $U^\dagger U = U U^\dagger = 1$, y A es autoadjunto, entonces el operador $U A U^\dagger$ es también autoadjunto y tiene los mismos autovalores (espectro) que A .

1.4. Probar que

$$(|\psi\rangle\langle\phi|)^\dagger = |\phi\rangle\langle\psi|$$

1.5. [Matrices de Pauli]. En el espacio de Hilbert $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ se definen los operadores

$$\sigma_x := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comprobar que son autoadjuntos. Encontrar sus autovalores y sus autoestados. Calcular los conmutadores

$$[\sigma_x, \sigma_y], \quad [\sigma_y, \sigma_z], \quad [\sigma_z, \sigma_x]$$

y el operador $\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2$. Estas matrices juegan un papel central en MQ y se conocen como matrices de Pauli. Es frecuente usar la notación $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$.

1.6. Considérese un sistema cuántico con hamiltoniano

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Encontrar el espacio de Hilbert del sistema.
- (b) ¿Cuáles son los estados estacionarios del hamiltoniano?
- (c) Explicar por qué la matriz

$$A = \theta \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

puede representar un observable del sistema para θ real.

- (d) El sistema se prepara en un instante $t = 0$ en el estado

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|e_{-}\rangle + i|e_0\rangle - |e_{+}\rangle),$$

donde $|e_{-}\rangle$, $|e_0\rangle$, $|e_{+}\rangle$ son los autoestados de H . Encontrar los posibles resultados que pueden obtenerse y sus probabilidades si se mide la energía.

- (e) Si en lugar de H se mide A , ¿qué resultados pueden obtenerse y con qué probabilidades?
- (f) ¿Hay algún estado físico en el que sea posible medir H y A con certidumbre.
- (g) Encontrar las probabilidades $\text{Prob}(E_i, a_j)$ de obtener los valores E_i y a_j si se miden H y A en este orden.
- (h) Encontrar las probabilidades $\text{Prob}(a_i, E_j)$ de obtener los valores a_i and E_j si se miden en orden contrario.
- (i) Se mide A en un tiempo $t = 0$ y se obtiene $\sqrt{2}\theta$. ¿Cuál es el estado del sistema inmediatamente después de la medida?
- (j) Calcular el valor esperado de A al cabo de un tiempo t trascurrido después de realizar la medida en (i).
- (k) ¿Cuál es la probabilidad de que al medir A un tiempo t después de la medida en (i) se obtenga el valor $\sqrt{2}\theta$?

1.7. EL hamiltoniano de un sistema cuántico con espacio de Hilbert $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ es

$$H = \epsilon\sigma_z, \quad \epsilon > 0,$$

donde $\epsilon > 0$ es una constante con dimensiones de energía. El sistema se prepara inicialmente en el estado

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Determinar el estado $|\psi(t)\rangle$ del sistema en un tiempo t . Si se mide el observable σ_x en los tiempos $\Delta t, 2\Delta t, \dots, N\Delta t$, ¿cuál es la probabilidad $P_N(\Delta t)$ de obtener en todas las medidas el valor $+1$? Estudiar el límite doble ($\Delta t \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$) de $P_N(\Delta t)$ suponiendo que el tiempo total de observación $T := N\Delta t$ es finito.

1.8. El hamiltoniano de un sistema cuántico es

$$H = \epsilon\sigma_z, \quad \epsilon > 0,$$

donde σ_z es la tercera matriz de Pauli. Sea $|g\rangle$ el estado fundamental del sistema, y $|e\rangle$ el primer excitado. El sistema se prepara inicialmente en el estado

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} (i|g\rangle - 2|e\rangle).$$

En un tiempo $t = t_c$ se modifica **súbitamente** el hamiltoniano y éste pasa a ser

$$H' = \epsilon(\sigma_z + \sigma_x).$$

El cambio es tan rápido que el estado del sistema inmediatamente después del cambio ($t = t_c^+$) es el mismo que inmediatamente antes ($t = t_c^-$). Sin embargo la evolución temporal para $t > t_c$ la rige el nuevo hamiltoniano H' . Encontrar $|\psi(t)\rangle$ y el valor esperado de la energía en $t < t_c$ y $t > t_c$. Los resultados deben ser distintos. ¿De dónde viene la energía extra?

1.9. Un sistema cuántico está formado por dos qubits, de manera que su espacio de Hilbert es el producto tensorial $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$. El hamiltoniano del sistema es

$$H = \epsilon(\sigma_z \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \sigma_z) + J(\sigma_x \otimes \sigma_x + \sigma_y \otimes \sigma_y),$$

donde ϵ y J son constantes con dimensiones de energía y $\sigma_{x,y,z}$ son las matrices de Pauli. Encontrar los estados estacionarios en la base producto tensorial $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ de autoestados $\sigma_z \otimes \sigma_z$.

1.10. Un sistema cuántico formado por dos qubits, con espacio de Hilbert $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, se encuentra en un estado

$$|\psi_{12}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle \otimes |0\rangle - |1\rangle \otimes |1\rangle).$$

Demstrar que el valor esperado de cualquier observable A del qubit 1, representado por un operador $A^{(1)} = A \otimes \mathbf{1}$, puede expresarse como

$$\langle A^{(1)} \rangle = \text{Tr}[\rho^{(1)} A],$$

donde la matriz $\rho^{(1)}$ está dada por

$$\rho^{(1)} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Comparar $\langle A^{(1)} \rangle$ con el valor esperado

$$\langle A \rangle_{\text{sup}} = \langle \psi_{\text{sup}} | A | \psi_{\text{sup}} \rangle$$

de A en el estado superposición lineal

$$|\psi_{\text{sup}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle).$$

Encontrar los observables para los que ambos valores esperados coinciden.

1.11. En el ejercicio anterior, escribir $|\psi_{12}\rangle$ como una matriz densidad. ¿Describe un estado puro? Calcular sus dos matrices densidad reducidas.

SPIN Y SISTEMAS DE DOS NIVELES

2.1. Cualquier estado de spin $\frac{1}{2}$ puede escribirse como

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

donde $\{\theta, \phi\}$ son coordenadas angulares sobre la esfera unidad. Si se mueve sobre dicha esfera el punto (θ, ϕ) que representa al estado $|\psi\rangle$ se obtiene un estado distinto, que con respecto al anterior se dice rotado. Por ejemplo, una rotación $\mathcal{R}(\mathbf{e}_3, \gamma)$ en torno al eje Oz de ángulo γ da, módulo una fase global, el estado

$$\mathcal{R}(\mathbf{e}_3, \gamma) |\psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i(\phi+\gamma)} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

(a) Probar que el operador rotación $\mathcal{R}(\mathbf{e}_3, \gamma)$ puede escribirse como

$$\mathcal{R}(\mathbf{e}_3, \gamma) = e^{-\frac{i}{\hbar} S_z \gamma}$$

y, a partir de aquí, que es unitario.

(b) Las rotaciones pueden usarse para alinear un estado de spin con un eje. Por ejemplo, para alinear $|\psi\rangle$ con el eje Ox , basta rotar primero un ángulo $\gamma = -\phi$ en torno al eje Oz y a continuación un ángulo $\beta = \frac{\pi}{2} - \theta$ en torno al eje Oy . La primera rotación da

$$|\psi'\rangle = \mathcal{R}(\mathbf{e}_3, -\phi) |\psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix},$$

y la segunda conduce a

$$|\psi''\rangle = \mathcal{R}(\mathbf{e}_2, \beta) |\psi'\rangle = \mathcal{R}(\mathbf{e}_2, \beta) \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta + \beta}{2} \\ \sin \frac{\theta + \beta}{2} \end{pmatrix} = \left\{ \text{for } \beta = \frac{\pi}{2} - \theta \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Demostrar que el operador rotación $\mathcal{R}(\mathbf{e}_2, \beta)$ puede escribirse como

$$\mathcal{R}(\mathbf{e}_2, \beta) = e^{-\frac{i}{\hbar} S_y \beta}.$$

En general, una rotación en torno a un eje $\hat{\mathbf{u}}$ de ángulo α está dada por

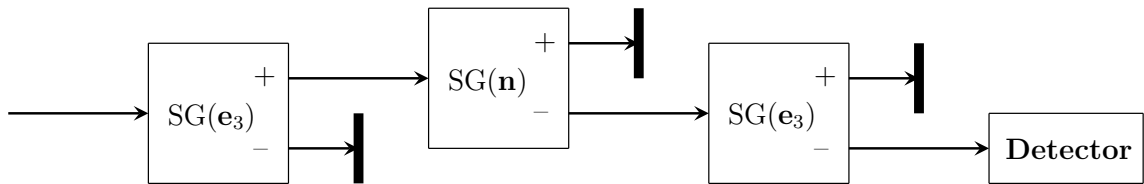
$$\mathcal{R}(\mathbf{u}, \alpha) = e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{S} \cdot \mathbf{u} \alpha}.$$

(c) Calcular el valor esperado de $\mathbf{S} = (S_x, S_y, S_z)$ en el estado $|\psi\rangle$ en términos de las componentes del vector unitario $\hat{\mathbf{n}} = (n_1, n_2, n_3)$ que lo representa.

2.2. Demostrar que las matrices de Pauli $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ satisfacen las propiedades

- (i) $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \mathbf{1}$,
- (2i) $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbf{1} + i\epsilon_{ijk} \sigma_k$,
- (3i) $e^{i\theta(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma})} = \cos \theta \mathbf{1} + i \sin \theta (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma})$.

2.3. Un haz de átomos de plata, considerados como partículas de spin $\frac{1}{2}$, emerge de un horno y se le hace atravesar un aparato de Stern-Gerlach (SG) orientado según el eje z . De los haces que salen, el que tiene orientación negativa se bloquea y al de orientación positiva se le hace pasar por un segundo SG orientado según el vector $\mathbf{n} = (\sin \theta, 0, \cos \theta)$. En esta ocasión, se bloquea el orientado positivamente y al de orientación negativa se le hace incidir sobre un tercer SG orientado según el eje z , tal y como se representa en la figura. Calcular la probabilidad de que un átomo que abandona el horno salga del último SG con orientación de spin negativa.



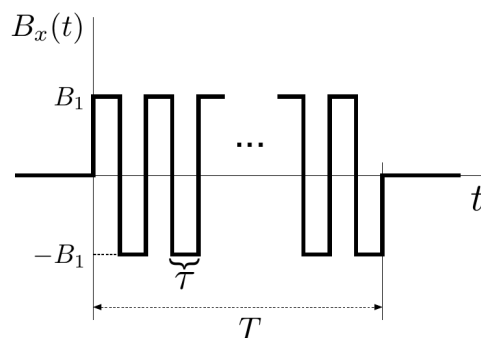
Ayuda. Recuérdese que las orientaciones positiva y negativa se definen con respecto al eje del SG. Por simetría, la mitad de los spines que salen del primer SG están orientado positivamente y la otra mitad negativamente.

2.4. Sobre una partícula de spin $\frac{1}{2}$ actúa un campo magnético constante $\mathbf{B}_3 = (0, 0, B_3)$, de forma que su tercera componente del spin quede orientada positivamente. En el instante en que esto ocurre, que tomamos como inicial, se introduce adicionalmente un segundo campo magnético $\mathbf{B}_1 = (B_1, 0, 0)$. La partícula comienza entonces un movimiento de precesión en torno al eje definido por el campo $\mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_1$.

(a) ¿Cuál es la frecuencia angular de precesión?

(b) Determinar el tiempo T para el que el valor esperado de la componente x the spin alcanza su máximo.

2.5. Un electrón se encuentra en un campo magnético $\mathbf{B} = (B_x(t), 0, B_3)$, cuya componente z es constante e igual a B_3 , y cuya componente x depende del tiempo de la siguiente forma. $B_x(t)$ se anula para $t < 0$ y $t > T$, y para $0 \leq t \leq T$ toma valores constantes B_1 and $-B_1$ de forma alternativa durante intervalos de tiempo cada uno de ellos de duración τ (ver figura adjunta).



Si inicialmente la tercera componente del spin se encuentra orientada positivamente, es decir, $|\psi(0)\rangle = |z_+\rangle$:

(a) Calcular el eje en torno al cual el valor esperado del momento magnético realiza un movimiento de precesión y la frecuencia angular ω de la precesión.

(b) Si $\tau = \pi/\omega$, determinar el valor esperado del momento magnético en un tiempo $t = \tau$.

(c) Si $\tau = \pi/\omega$, calcular la duración total T del pulso para la que el ángulo formado por el valor esperado del momento magnético y el eje z sea máximo. Particularizar el resultado para $B_1 \ll B_3$.

2.6. [Griffiths, 4.34] Un electrón se encuentra en reposo en un campo magnético oscilante

$$\mathbf{B} = B \cos(\omega t) \mathbf{e}_3,$$

donde B y ω son constantes.

(a) Escribir el hamiltoniano del sistema y su ecuación de Schrödinger.

(b) Si el electrón se encuentra inicialmente con la componente x de su spin orientada positivamente, es decir, si $|\psi(0)\rangle = |x_+\rangle$, determinar $|\psi(t)\rangle$.

(c) Encontrar la probabilidad de obtener $-\hbar/2$ al medir S_x en un tiempo t .

(d) ¿Cuál el valor mínimo que debe tomar B para que el spin se encuentre orientado en un tiempo t según el sentido negativo del eje Ox ?

TUTORIAL - INTRODUCCIÓN A LOS NIVELES DE LANDAU

In the lectures the coupling of the orbital magnetic moment of an electron in an Hydrogen atom to an external constant magnetic field (normal Zeeman effect) was discussed. In this tutorial, the case of free electrons is considered.

A free electron in a constant magnetic field $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{e}}_3$ oriented along the x_3 -axi has classical Hamiltonian

$$H = \frac{1}{2} \left(\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2, \quad \mathbf{B} = \nabla \wedge A.$$

The convention here is that the electron charge is $-e$, with $e > 0$. Show that the components of the kinetic momentum

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}$$

can be written in the Coulomb gauge $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ as

$$\pi_1 = p_1 - \frac{eB}{2c} x_2, \quad \pi_2 = p_2 + \frac{eB}{2c} x_1, \quad \pi_3 = p_3.$$

Upon quantization, $\boldsymbol{\pi}$ becomes an operator that we denote by $\boldsymbol{\Pi}$. Prove that its components satisfy the commutation relations

$$[\Pi_1, \Pi_2] = -\frac{eB}{c} i\hbar, \quad [\Pi_1, \Pi_1] = [\Pi_2, \Pi_2] = 0, \quad [\Pi_1, \Pi_3] = [\Pi_2, \Pi_3] = 0.$$

Instead of Π_1 and Π_2 , consider for convenience

$$\mathcal{P} = \Pi_1, \quad \mathcal{X} = \frac{c}{eB} \Pi_2,$$

so that \mathcal{X} and \mathcal{P} have dimensions of position and momentum and have commutators

$$[\mathcal{X}, \mathcal{P}] = i\hbar, \quad [\mathcal{X}, \mathcal{X}] = [\mathcal{P}, \mathcal{P}] = 0.$$

The Hamiltonian of the system can then be written as

$$H = H_{\perp} + H_{\parallel}, \quad H_{\perp} = \frac{1}{2m} \mathcal{P}^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 \mathcal{X}^2, \quad H_{\parallel} = \frac{P_3^2}{2m},$$

where ω is the angular frequency

$$\omega = \frac{eB}{mc}.$$

In H_{\perp} one recognizes the Hamiltonian of a harmonic oscillator with annihilation and creation operators

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\alpha \mathcal{X} - \frac{1}{i\hbar\alpha} \mathcal{P} \right), \quad a^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\alpha \mathcal{X} + \frac{1}{i\hbar\alpha} \mathcal{P} \right), \quad \alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}, \quad [a, a^{\dagger}] = 1.$$

H_{\parallel} is in turn the Hamiltonian of a free particle in the x_3 -direction. To solve the eigenvalue problem of H ,

$$H\psi(x_1, x_2, x_3) = E\psi(x_1, x_2, x_3),$$

use separation of variables and write

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = \phi_{\perp}(x_1, x_2) \phi_{\parallel}(x_3), \quad E = E_{\parallel} + E_{\perp}.$$

This gives

$$E_{\parallel} = \frac{p_3^2}{2m}, \quad \phi_{\parallel}(x_3) = e^{ip_3 x_3/\hbar}, \quad p_3 \text{ arbitrary},$$

and $(E_{\perp}, \phi_{\perp})$ the solutions of

$$H_{\perp} \phi(x_1, x_2) = E_{\perp} \phi(x_1, x_2).$$

The energies E_{\perp} are those of the one-dimensional harmonic oscillator,

$$E_{\perp, n} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega, \quad n = 0, 1, \dots$$

The study of their degeneracy and their eigenfunctions ϕ_{\perp} , and of the physics behind them, is more involved. Let us nevertheless say a few words on the subject.

The same arguments as for the conventional harmonic oscillator show that the ground state $\varphi := \phi_{\perp, 0}$ satisfies an equation

$$a\varphi = 0. \quad (3.2)$$

Show that, in terms of $X_1 = x_1$, $X_2 = x_2$, $P_1 = -i\hbar\partial_1$ and $P_2 = -i\hbar\partial_2$, the annihilation operator reads

$$a = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{2\hbar c}{eB}} (\partial_1 - i\partial_2) + \sqrt{\frac{eB}{2\hbar c}} (x_1 - ix_2) \right].$$

Introduce now dimensionless complex coordinates z and \bar{z} , given by

$$z = \sqrt{\frac{eB}{2\hbar c}} (x_1 - ix_2), \quad \bar{z} = \sqrt{\frac{eB}{2\hbar c}} (x_1 + ix_2),$$

and prove that the operator a becomes

$$a = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{z}{2}.$$

Eq. (3.2) then takes the form

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{z}{2} \right) \varphi(z, \bar{z}) = 0. \quad (3.3)$$

To solve the latter make the ansatz

$$\varphi(z, \bar{z}) = \varphi(z\bar{z}).$$

Show, upon substitution in eq. (3.3), that the function φ must satisfy

$$\varphi' + \frac{1}{2}\varphi = 0,$$

where the prime in φ' denotes differentiation with respect to its argument. Its solution is

$$\varphi = c e^{-z\bar{z}/2},$$

with c an arbitrary integration constant. The key observation now is that one may replace c with an arbitrary function $c(z)$ of z and still have a solution. Hence

$$\varphi(z, \bar{z}) = c(z) e^{-z\bar{z}/2}. \quad (3.4)$$

A different derivation of this solution goes as follows. To ensure square integrability on the z -plane, one makes the ansatz

$$\varphi = c(z, \bar{z}) e^{-z\bar{z}/2},$$

Substitution in eq. (3.3) then gives

$$\frac{\partial c}{\partial \bar{z}} = 0,$$

which implies solutions of the form (3.4).

Since $c(z)$ is arbitrary, there are infinitely many ground state wave functions. It is customary to choose for them monomials z^n , thus having

$$\varphi_n(z, \bar{z}) = N_n z^n e^{-z\bar{z}/4}, \quad (3.5)$$

with N_n a normalization constant. To determine N_n , we proceed as usual and require

$$1 = \int d^2x |\varphi_n|^2 = |N_n|^2 \frac{eB}{2\hbar c} 2\pi \int_0^\infty dr r^{2n+1} e^{-eBr^2/4\hbar c} = |N_n|^2 \pi \left(\frac{eB}{2\hbar c}\right)^{n+1} n!$$

Choosing N_n real and positive, we have

$$N_n = \frac{1}{\sqrt{\pi n!}} \left(\frac{2\hbar c}{eB}\right)^{(n+1)/2}$$

The probability of finding the electron at a distance r from the origin is

$$P(r) = 2\pi r |\varphi_n|^2 = \frac{2}{n!} \left(\frac{2\hbar c}{eB}\right)^n r^{2n+1} e^{-eBr^2/4\hbar c},$$

which is a smeared ring around the origin.

Coming back to the choice of $c(z)$, note that there are certain restrictions. Functions that grow at $|z| \rightarrow \infty$ as $e^{|z|^2}$ or faster are not allowed. Functions that involve rational powers of z are multivalued, hence not permitted. Negative powers of z spoil square integrability, thus are also excluded. One is basically left with polynomials of arbitrary orders, which correspond to the choice made above.

Excited states are obtained by recurrently acting with the creation operator a^+ on the ground states.

ADICIÓN DE MOMENTOS ANGULARES

4.1. [Griffiths 4.37] Un sistema formado por dos partículas, una de ella de spin 1 y la otra de spin 2, se encuentra en un estado de spin total 3 y tercera componente total 1. Es decir en un autoestado de \mathbf{S}^2 y de S_z con autovalores $3(3+1)\hbar^2$ y \hbar . Si se mide la tercera componente del momento angular de la segunda partícula, ¿qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidades?

El electrón de un átomo de hidrógeno tiene tercera componente de spin orientada negativamente y se encuentra en un estado ψ_{510} . Si se mide el momento angular total al cuadrado del electrón ¿qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidades?

4.2. Calcular el conmutador $[\mathbf{J}^2, J_{1i}]$ cuando se componen momentos angulares \mathbf{J}_1 and \mathbf{J}_2 , siendo $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$ el momento angular total.

4.3. Dos partículas de spin $\frac{1}{2}$ en reposo interaccionan según el hamiltoniano

$$H = K \frac{(\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2) \mathbf{x}^2 - (\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{x})(\mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{x})}{|\mathbf{x}|^5},$$

donde \mathbf{x} es la posición de la partícula 2 relativa a la 1, y K es una constante con unidades adecuadas. Si inicialmente un spin se encuentra orientado positivamente según \mathbf{x} y el otro negativamente, encontrar el tiempo después del cual el que estaba orientado positivamente se orienta negativamente y el que estaba orientado negativamente lo hace positivamente.

PARTÍCULAS IDÉNTICAS

5.1. Considérese un observable $B(1, 2, \dots, N)$ en un sistema de N partículas idénticas. Demostrar que si B es invariante bajo permutaciones arbitrarias y $|\psi_S\rangle$ es un estado completamente simétrico entonces $B|\psi_S\rangle$ también lo es. Demostrar que la misma propiedad es cierta para estados completamente antisimétricos $|\psi_A\rangle$.

5.2. En un sistema de partículas sin interacción entre ellas, las energías de cada una son no degeneradas, no dependen del spin y están dadas por $E_n = n^2\epsilon$, donde $n = 1, 2, \dots$ y ϵ es una constante con dimensiones de energía. Encontrar el estado fundamental, su energía y su degeneración en cada uno de los siguientes casos:

- (1) Tres partículas idénticas de spin cero.
- (2) Tres partículas idénticas de spin $\frac{1}{2}$.
- (3) Tres partículas distinguibles de spin arbitrario.

5.3. Un sistema está formado por dos electrones en un potencial central. Suponiendo que la interacción entre ellos es despreciable, encontrar la función de ondas del sistema si cada uno de ellos se encuentra en un orbital $2p$ con tercera componente del momento angular orbital igual a \hbar . Calcular el momento orbital angular total, el spin total y el momento angular total (orbital más spin) del sistema.

5.4. Dos fermiones idénticos de masa m y spin $3/2$ se encuentran en un potencial armónico isótropo tridimensional de frecuencia angular ω bajo la influencia de un campo magnético débil constante B orientado en la dirección del eje Oz . El hamiltoniano es

$$H = H_1 + H_2 = H_{\text{op}} \otimes 1 + 1 \otimes H_{\text{op}},$$

donde el hamiltoniano H_{op} para un fermión es

$$H_{\text{op}} = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + \frac{1}{2}\omega^2\mathbf{x}^2 - \gamma BS_z,$$

con γ la constante giromagnética del fermión.

(1) Determinar los niveles de energía permitidos para cada fermión y dibujar una figura con los cuatro niveles de menor energía. Nótese que, como B es débil, $\gamma B \ll \omega$.

(2) Encontrar el estado fundamental del sistema.

(3) ¿Qué resultados pueden obtenerse si se mide $\mathbf{S}^2 = (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)^2$ y con qué probabilidades?

5.5. La parte espacial de la función de ondas de un sistema formado por dos partículas idénticas de spin $\frac{3}{2}$ es simétrica. Encontrar la parte de spin en la base $\{\mathbf{S}_1^2, \mathbf{S}_2^2, \mathbf{S}^2, S_z\}$ si la tercera componente del spin total es $2\hbar$. ¿Qué valores pueden obtenerse en una medida de \mathbf{S}^2 y con qué probabilidades?

5.6. Un sistema está formado por dos partículas, cada una de las cuales puede encontrarse en un estado $\psi_i(\mathbf{x})$, $i = 1, 2$. Se sabe que dichos estados son ortonormales,

$$\langle \psi_i | \psi_j \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \psi_i^*(\mathbf{x}) \psi_j(\mathbf{x}) = \delta_{ij}.$$

(1) Suponiendo que cada partícula se encuentra en un estado $\psi_i(\mathbf{x})$ distinto, encontrar la función de ondas $\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ del sistema según que las partículas sean fermiones, bosones o partículas distinguibles.

(2) Calcular para los tres casos el valor esperado $\langle r^2 \rangle$ del cuadrado de la distancia $r^2 = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^2$ entre las partículas en términos de

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{ij} &:= \langle \psi_i | \mathbf{X} | \psi_j \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \psi_i^*(\mathbf{x}) \mathbf{x} \psi_j(\mathbf{x}), \\ X_{ij}^2 &:= \langle \psi_i | \mathbf{X}^2 | \psi_j \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \psi_i^*(\mathbf{x}) \mathbf{x}^2 \psi_j(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

(3) Demostrar que $\langle r^2 \rangle_{\text{bosones}} \leq \langle r^2 \rangle_{\text{distinguibles}} \leq \langle r^2 \rangle_{\text{fermiones}}$.

PERTURBACIONES INDEPENDIENTES DEL TIEMPO

6.1. Una partícula con carga q oscila armónicamente en la dirección x con frecuencia angular ω y hamiltoniano

$$H_0 = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2.$$

Si se introduce un campo eléctrico constante \mathcal{E} orientado en la dirección positiva calcular la primera corrección no trivial en teoría de perturbaciones a las energías del oscilador. Comparar los resultados obtenidos con el resultado exacto. Calcular la primera corrección no trivial a la función de ondas del estado fundamental.

6.2. Un sistema con espacio de Hilbert \mathbb{C}^3 tiene hamiltoniano

$$H = H_0 + H_I, \quad H_0 = \epsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad H_I = a \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad 0 < a \ll \epsilon.$$

Encontrar los autovalores y autovectores exactos. Usar teoría de perturbaciones a primer orden para determinar los niveles de energía del sistema. Comparar los resultados obtenidos con los exactos.

6.3. Sobre una partícula cargada, carga q , en un pozo infinito unidimensional de anchura a centrado en el origen actúa un campo eléctrico constante \mathcal{E} orientado en la dirección positiva. Calcular la primera corrección perturbativa a la energía del estado fundamental.

6.4. El hamiltoniano de una partícula de spin 2 es

$$H = H_0 + H_I, \quad H_0 = \epsilon(S_z^2 - 3\hbar S_z), \quad H_I = a\hbar S_x, \quad 0 < a \ll \epsilon.$$

Calcular la primera corrección perturbativa a la energía del estado fundamental y del primer estado excitado del problema no perturbado.

6.5. [Griffiths 6.3] Dos partículas idénticas de spin 0 se encuentran en un pozo infinito unidimensional centrado en el origen de anchura a . Interaccionan mediante el potencial,

$$V(x_1, x_2) = -\frac{a}{2} V_0 \delta(x_1 - x_2),$$

donde V_0 es una constante con dimensiones de energía. Considerando esta interacción como perturbación, calcular la primera corrección perturbativa a las energías del estado fundamental y del primer estado excitado.

6.6. El efecto del tamaño finito del núcleo en los niveles de energía del átomo de hidrógeno puede estudiarse usando teoría de perturbaciones. Para ello se supone que el núcleo es una esfera de radio r_n uniformemente cargada con carga total Ze , de forma que la energía potencial pasa a ser

$$V(r) = \begin{cases} \frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r_n^3} (r^2 - 3r_n^2) & \text{si } r \leq r_n \\ -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{si } r \geq r_n \end{cases}.$$

Sabiendo que la función de ondas del estado fundamental es

$$\psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_B} \right)^{3/2} e^{-Zr/a_B}$$

y notando que $a_B \sim 10^{-10}$ m y $r_n \sim 10^{-15}$ m, puede tomarse $\exp(-Zr/a_B) \simeq 1$ en el interior del núcleo para $Z \lesssim 100$. Calcular bajo estas hipótesis la primera corrección perturbativa a la energía del estado fundamental.

6.7. El hamiltoniano de una partícula de masa m que se mueve en dos dimensiones es

$$H = \frac{1}{2m} (P_x^2 + P_y^2) + \frac{1}{2} m\omega^2 (x^2 + y^2) (1 + \lambda\alpha^2 xy), \quad \alpha^2 = \frac{m\omega}{\hbar},$$

donde $\lambda \ll 1$ es un parámetro sin unidades. Calcular en teoría de perturbaciones la primera corrección a las tres energías más bajas.

6.8. Un oscilador armónico unidimensional de frecuencia angular ω se someta a la acción de una perturbación $H_I = \lambda\hbar\omega \sin(\alpha x)$, con λ un parámetro sin dimensiones mucho menor que 1. Calcular la primera corrección perturbativa a la energía del estado fundamental.

MÉTODO VARIACIONAL

7.1. [Griffiths 7.11] Usar el método variacional para estimar la energía del estado fundamental del átomo de hidrógeno usando como función prueba $\psi(\lambda, \mathbf{x}) = Ne^{-\lambda r^2}$, con N una constante de normalización.

Solución. Primero se normaliza la función de ondas de prueba, lo que da como resultado

$$\psi(\lambda, x) = \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi}} e^{-\lambda r^2}.$$

A continuación se calcula el valor esperado del hamiltoniano del átomo de hidrógeno en el estado descrito por ésta, lo que da

$$E(\lambda) = \frac{2\hbar^2}{m} \left[-\frac{3\lambda}{4} + \frac{e^2 m}{(4\pi\epsilon_0)\hbar^2} \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi}} \right],$$

donde $(4\pi\epsilon_0) = 1$ en unidades gaussianas. Finalmente se estudian los extremos de la función $E(\lambda)$ y se obtiene un mínimo en

$$\lambda_{\min} = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{8m^2 e^4}{9\hbar^2} \Rightarrow E(\lambda_{\min}) = \frac{8\pi}{3} \underbrace{\left[-\frac{mc^2 \alpha^2}{2(4\pi\epsilon_0)} \right]}_{E_1} \simeq 0.85 E_1 = -11.5 \text{ eV},$$

con $\alpha \simeq 1/137$ la constante de estructura fina.

7.2. [Griffiths 7.12] Considérese una partícula en un potencial de Yukawa $V(r) = -ge^{-\mu r}/r$, donde μ es una constante con dimensiones de $(\text{longitud})^{-1}$ y g es otra constante con dimensiones de $\text{longitud} \times \text{energía}$, de forma que el hamiltoniano del sistema es

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - g \frac{e^{-\mu r}}{r}$$

Encontrar una función de ondas de prueba razonable y usar el método variacional; para estimar la energía del estado fundamental. Supóngase que $gm/\hbar^2 \mu \gg 1$.

Nota. La interacción coulombiana tiene alcance infinito. Es decir, no importa cuán separadas estén dos partículas que siempre van a sentir la atracción/repulsión que sobre una de ellas ejerce la otra. En QFT esto se explica a partir del hecho de que el fotón (partícula que media la interacción electromagnética) tiene masa nula. El potencial de Yukawa describe una interacción del alcance finito mediada por una partícula de masa $\mu c/\hbar$. El signo negativo en la exponencial $e^{-\mu r}$ hace que $-ge^{-\mu r}/r$ tienda a cero para $r \rightarrow \infty$ mucho más rápidamente que la energía potencial coulombiana. Con esto en mente, resulta razonable tomar como función de prueba la función de ondas del estado fundamental en la que el radio de Bohr se reemplaza por un parámetro a . También puede argumentarse que para garantizar integrabilidad del cuadrado de la función de ondas, puede tomarse $\psi_a(\mathbf{x}) = Ne^{-r/a}$, con N una constante de normalización.

7.3. Un sistema tiene hamiltoniano H y espacio de Hilbert \mathcal{H} . Supóngase que H no depende del tiempo y que $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ son dos estados normalizados arbitrarios ortogonales entre sí. Para encontrar una cota superior a la energía del estado fundamental se usa el método variacional con una función prueba $|\psi\rangle = c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle$. El papel del parámetro λ lo juegan ahora los coeficientes c_1 y c_2 . Demostar que los extremos de

$$E(c_1, c_2) = \frac{\langle \psi | H | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$$

son los autovalores de la proyección (restricción) del hamiltoniano al subespacio generado por $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$.

7.4. Considérese una partícula en un potencial unidimensional

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } x \leq 0, \\ bx & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Encontrar una función de prueba razonable y usar el método variacional para estimar la energía del estado fundamental.

Nota. Encontrar argumentos que favorezcan la elección de dicha función de prueba como

$$\psi_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ Nx e^{\lambda x} & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

con N una constante de normalización y λ un parámetro con dimensiones de longitud.

PERTURBACIONES DEPENDIENTES DEL TIEMPO

8.1. Un campo eléctrico

$$\mathcal{E}(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{\pi} \tau} e^{-t^2/\tau^2},$$

con \mathcal{E}_0 y τ constantes, actúa sobre un oscilador armónico unidimensional. En $t = -\infty$ el sistema se encuentra en el estado fundamental. Calcular en la aproximación de Born la probabilidad de que se encuentre en $t = +\infty$ en el primer estado excitado. Estudiar los casos particulares $\omega\tau \ll 1$ y $\omega\tau \gg 1$, donde ω denota la frecuencia del oscilador. Encontrar el rango de validez de la aproximación de Born.

8.2. Un oscilador armónico unidimensional se encuentra en su estado fundamental. Su centro de suspensión empieza a moverse en el instante $t = 0$ con velocidad constante v_0 y prosigue su movimiento hasta el instante T en el que se para, de forma que su hamiltoniano pasa a ser

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 [x - a(t)]^2 ,$$

con

$$a(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ v_0 t & \text{si } 0 < t < T \\ 0 & \text{si } T < t \end{cases} .$$

Encontrar en la aproximación de Born la probabilidad de que el oscilador se encuentre al final del proceso en el primer estado excitado.