UCM
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA I
FECHA

Mecánica cuántica avanzada – Curso 2013/14

Problemas - Perturbaciones dependientes del timepo

Fecha límite de entrega: 27 de junio de 2014, 09:00 horas.

Aquellos alumnos que los entreguen antes de las 09:00 horas del 3 de febrero de 2014 serán evaluados en la convocatoria extraordinaria de febrero.

Las soluciones deben estar redactadas con claridad. La presentación debe ser buena. Las respuestas deben ceñirse a lo pedido.

1. Un carga e gira en un plano, que puede tomarse como xy, con velocidad angular ω y radio R en torno a un átomo de hidrógeno que se encuentra en su estado fundamental. Como consecuencia de la interacción entre el electrón que gira y el cortical, el átomo se ioniza. Calcúlese la probabilidad de ionización por unidad de tiempo y de ángulo sólido. ¿En que dirección es máxima la probabilidad de emisión? ¿Cúal es el momento angular del electrón emitido?

2. Calcúlese

$$\frac{1}{r^4}\sum_{i,j=1,2,3}\left|\,\langle Y_2^1|\,x^i\,x^j|Y_0^0\rangle\,\right|^2 .$$

3. Un átomo de hidrógeno se encuentra en un estado $|321\rangle$. Como consecuencia de su interacción con la radiación electromagnética transita al estado $|100\rangle$. Indíquese de qué tipo de transición se trata y calcúlese su anchura.

4. Una partícula de masa μ se encuentra en el estado fundamental de un pozo infinito unidimensional de anchura $2L$ centrado en $x = 0$. Sus paredes, situadas en $x = \pm L$, se trasladan repentinamente a $x = \pm L/2$. Calcular en la aproximación repentina la probabilidad de que el sistema después del cambio se encuentre en el estado fundamental.

Mecánica cuántica avanzada – Curso 2013/14

Problemas - Colisiones

Fecha límite de entrega: 27 de junio de 2014, 09:00 horas.

Aquellos alumnos que los entreguen antes de las 09:00 horas del 3 de febrero de 2014 serán evaluados en la convocatoria extraordinaria de febrero.

Las soluciones deben estar redactadas con claridad. La presentación debe ser buena. Las respuestas deben ceñirse a lo pedido.

5. La amplitud de dispersión por un campo coulombiano viene dada por (ver por ejemplo la sección 7.13 en "*Modern Quantum Mechanics*", J. J. Sakurai, Ed. Addison-Wesley)

$$f(\theta) = \frac{\gamma \exp\left(2i\gamma \log(\sin(\theta/2))\right)}{2k\sin^2(\theta/2)} \frac{\Gamma(1-i\gamma)}{\Gamma(1+i\gamma)} ,$$

donde $\gamma = Z_1 Z_2 e^2 m/\hbar^2 k$. Calcular la sección eficaz diferencial para la dispersión de un electrón por un electrón, o de una partícula alfa por una partícula alfa.

6. Demostrar, resolviendo la ecuación radial para el hamiltoniano completo, que para el potencial

$$V(r) = \frac{V_0}{r^2} ,$$

donde V_0 es una constante, los desfases están dados por

$$\delta_\ell(p) = \frac{\pi}{2}\left[\sqrt{\left(\ell+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2\mu V_0}{\hbar^2}} - \left(\ell+\frac{1}{2}\right)\right] . \tag{1}$$

Argumentar que la convergencia de la serie

$$f(p,\cos\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\,\frac{e^{2i\delta_\ell(p)}-1}{2ik}\,P_\ell(\cos\theta) \tag{2}$$

para ángulos θ pequeños depende mucho de la contribución de términos con ℓ muy grande. Probar que para

$$\frac{2\mu V_0}{\hbar^2} \ll 1 ,$$

la sección diferencial eficaz está dada aproximadamente por

$$\frac{d\sigma}{d\theta} \approx \frac{\pi^3 \mu V_0^2}{2\hbar^2 E}\ \cot(\theta/2) ,$$

donde E es la energía de la partículas incidentes. Para ello, desarrollar los desfases (1) en serie de potencias de $8\mu V_0/(2\ell+1)^2 \ll 1$ y mantener los dos primeros términos, trasladando este desarrollo a la serie (2) para la amplitud de difusión para estimar la suma tomando el límite $h \to 1$ de la fórmula

$$\frac{1}{\sqrt{1-2hx+h^2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} h^\ell P_\ell(x) \ , \qquad |h| < 1 \ .$$

7. Considerar la ecuación de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi(\vec{r}) + \int V(\vec{r},\vec{r}\,')\psi(\vec{r}\,')d^3\vec{r}\,' = E\psi(\vec{r}) \ ,$$

donde $V(\vec{r},\vec{r}\,')$ es un potencial no-local de la forma

$$V(\vec{r},\vec{r}\,') = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\lambda\, u(r)u(r') \ .$$

a) Demostrar que sólo hay dispersión en onda-s.

b) Escribir una forma integral de la ecuación de Schrödinger para este potencial.

c) La forma del potencial permite convertir la ecuación integral en una ecuación algebraica, fácilmente resoluble. Demostrar que la amplitud de dispersión para una onda de momento incidente $\hbar\vec{k}$ viene dada por

$$f(k) = \frac{4\pi\lambda|v(k)|^2}{1+\frac{2\lambda}{\pi}\int d^3q\, \frac{|v(q)|^2}{k^2-q^2+i\epsilon}} \ , \tag{3}$$

donde

$$v(k) = \int_0^\infty \frac{\sin(kr)}{kr} u(r) r^2 dr \ .$$

d) Comparar la expresión (3) con la serie de Born. Decidir qué condición ha de imponerse sobre el valor de λ para que la serie converja.

e) Si se considera en lo sucesivo el potencial de Yukawa

$$u(r) = \frac{e^{-r/b}}{r} \ ,$$

demostrar que

$$k\cot\delta(k) = \frac{(k^2b^2+1)^2 + \xi(k^2b^2-1)}{2\xi b} \ ,$$

donde $\xi = 2\pi\lambda b^3$.

f) Determinar la condición sobre ξ necesaria para la existencia de estados ligados.

g) Calcular la longitud de dispersión.