INSTITUTO DE ESPAÑA

LA OBRA DE EULER

Tricentenario del nacimiento de Leonhard Euler (1707-1783)

Coordinado por:

ALBERTO GALINDO TIXAIRE y MANUEL LÓPEZ PELLICER

Colaboradores:

José M. Sánchez Ron
Manuel de León Rodríguez
Jesús M.ª Sanz Serna
Jesús Ildefonso Díaz
Amable Liñán Martínez
Darío Maravall Casesnoves
Fernando Bombal Gordón
José M.ª Montesinos Amilibia
Ángela Arenas Sola

Madrid, 2009

ISBN: 978-84-85559-66-4 • Depósito legal: M. 8.195-2009

Impreso en Realigraf, S.A. - Pedro Tezano, 26 - 28039 Madrid

Índice

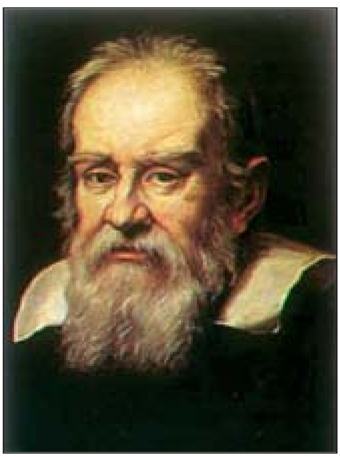
El Análisis Infinitesimal en Euler

FERNANDO BOMBAL

1. PRÓLOGO

En 1623, en *Il Saggiatore* (El Ensayista), **Galileo** (1564-1642) esboza su Programa para el conocimiento de la Naturaleza al escribir:

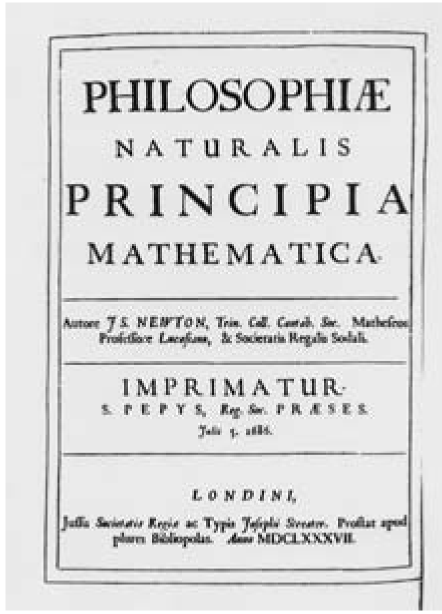
«La Filosofía está escrita en ese gran libro que es el Universo… Pero no podemos entender el libro si antes no aprendemos el lenguaje en el que está escrito y su alfabeto. ***Ese lenguaje es el de las Matemáticas,*** *y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin la cuales es humanamente imposible entender una sola palabra de él…»*



Galileo

Galileo defiende que el conocimiento de la realidad debe derivarse de la experimentación y la inducción para descubrir principios básicos simples, a manera de los axiomas geométricos de **Euclides**, que permita obtener una *descripción matemática* de la realidad observada y realizar predicciones comprobables. Su afirmación de que *«la Naturaleza está escrita en lenguaje Matemático»,* es tremendamente sugerente y tuvo una influencia decisiva en los hábitos de los científicos posteriores.

El mismo Galileo realizó aportaciones notables en la búsqueda de principios básicos en la Naturaleza. Pero el paradigma de la Revolución Científica en marcha es, sin duda, **Isaac Newton** (1642-1727) y su obra *Philosophiae naturalis Principia Mathematica o Principia,* como se co-



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA

Autore JS. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

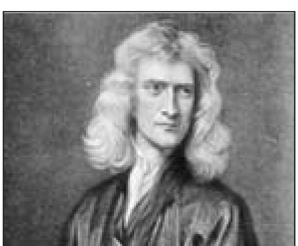
LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

noce habitualmente. En esta obra, publicada en 1687, se establecen los principios o *Leyes* de la Dinámica, junto con la Teoría de la Gravitación Universal. A partir de aquí, Newton es capaz de *deducir* las leyes de **Kepler** del movimiento planetario y, en suma, desarrollar un esquema majestuoso que abarca desde la caída de una piedra hasta el movimiento de los planetas y las mareas.

Pero para llevar a cabo esta tarea no sólo era preciso descubrir los principios físicos, sino también desarrollar la herramienta matemática adecuada para *calcular y predecir* sobre el modelo establecido. Esta maravillosa herramienta, desarrollada por I. Newton y **G. Leibniz** (1646-1716) fue el *Cálculo Infinitesimal o, simplemente, Cálculo.*

Junto con la concepción del mundo recogida en los Principia, abrió a la Humanidad la visión de un nuevo orden en el mundo: un Universo controlado por un pequeño número de principios físicos expresables en términos matemáticos.

El éxito del Cálculo fue espectacular e hizo que a lo largo del siglo XVIII la mayor parte de los científicos (en su mayoría también



I. Newton

G. Leibniz

matemáticos) se dedicaran con empeño a utilizar la maravillosa herramienta de modelización de la Naturaleza.

Uno de los elementos esenciales en el desarrollo del Cálculo es el uso sistemático de series (fundamentalmente, series de potencias) para representar curvas y realizar cálculos. El otro es la utilización indiscriminada de los ***infinitésimos***. Se trata de uno entes singulares, ya que sin ser 0 son menores (en valor absoluto) que cualquier cantidad positiva; más aún, ninguno de sus múltiplos alcanza a ser una magnitud finita, aunque una cantidad *infinita* de estos elementos puede ocasionar un efecto o magnitud finita. Además, puede operarse con ellos como si fueran números ordinarios.

Los infinitésimos así concebidos ofrecen una gran dificultad para su fundamentación[1] y pronto fueron objeto de críticas y controversias. Una de las más demoledoras fue la del obispo irlandés **G. Berkeley,** en su ensayo *The Analyst* [2] , publicado en 1734. En él se acusa a los seguidores del nuevo cálculo de utilizar métodos que no comprenden, basados en inconsistencias lógicas y conceptos ambiguos, aunque no discute la utilidad de los resultados obtenidos. Berkeley justifica el que el cálculo infinitesimal produzca resultados correctos como consecuencia de una suerte de «compensación de errores», explicación que iban a repetir más tarde personajes de la talla de **MacLaurin, Lagrange** o **L. Carnot** y que, sin duda, contribuyó a aumentar la sensación de incomodidad de los matemáticos con los *abominables pequeños ceros,* en palabras de **de C. Boyer** ([B2]), acelerando la crisis que iba a conducir a la rigorización del Análisis durante el siglo XIX.

2. EULER ENTRA EN ESCENA

Como se ha puesto de manifiesto a lo largo de este ciclo de Conferencias, **Leonhard Euler** es sin duda el matemático más original de su siglo y el más prolífico de todos los tiempos. Realizó contri-

[1] Newton era consciente de las inconsistencias lógicas de la noción de infinitésimo, y trató de justificar su *Cálculo de fluxiones* en diversas ocasiones, usando distintos argumentos. Por el contrario, Leibniz no parece que tuviera ningún reparo en emplear los infinitésimos ni apelaba a la intuición geométrica para su justificación. Simplemente, los usaba como *«ficciones útiles»*. Para Leibniz, la cuestión de la existencia de los infinitésimos es independiente de si su uso conducía o no a resultados correctos.

[2] Una traducción al español aparece en [Nw; págs. 214-219]. *The Analyst* provocó una serie de réplicas y contra-réplicas entre los matemáticos británicos de la época. El lector interesado puede consultar [Ca].

buciones fundamentales en muchas áreas de las matemáticas: Geometría, Teoría de Números, Álgebra, Mecánica, Astronomía, etc. Pero probablemente destaquen por encima de todo en su obra matemática sus contribuciones al Análisis[3]. Aunque a veces es realmente difícil clasificar muchos de los artículos de Euler, ya que una de las características de su obra es su innovador carácter interdisciplinar. Como botón de muestra, podemos señalar la utilización magistral y totalmente original que hace Euler de los métodos analíticos para abordar problemas del dominio de lo puramente discreto de la teoría de números, dando así origen a la Teoría Analítica de Números.

Por su formación y estrecha relación con los Bernouilli, su concepción del cálculo está más próxima a la de Leibniz que a la de Newton, haciendo hincapié en el carácter formal de los símbolos que se usan en el mismo, sin necesidad de buscar justificaciones geométricas o de otro tipo. Desde un punto de vista actual, sorprende a veces la audacia y confianza de Euler en las manipulaciones formales, muy lejos de nuestra presente concepción de rigor, pero que le permite obtener resultados espectaculares.

Respecto al Análisis, la contribución de Euler es realmente impresionante, hasta el punto de ser uno de los principales responsables de que el viejo *Cálculo* de Newton y Leibniz se convirtiera en una rama más amplia de las Matemáticas denominada *Análisis*. De entrada, presenta como objeto fundamental del cálculo el estudio de las *funciones* y las operaciones realizadas sobre ellas (incluyendo, por supuesto, los procesos infinitos). Así, en el Prefacio de su *Introductio in Analysin Infinitorum* (1748) ([Eu]), considerado por muchos «el libro de texto en matemáticas más destacado de los tiempos modernos» ([B3]), puede leerse: *«...comoquiera que todo el análisis de infinitos verse sobre cantidades variables y sus funciones, he expuesto antes de nada la teoría de las funciones de punta a cabo; y demostrado así su transformación como su resolución y desarrollo mediante series infinitas*[4]». Y, de acuerdo con el carácter eminentemente didáctico de la obra, en el Capítulo I Euler da la siguiente definición:

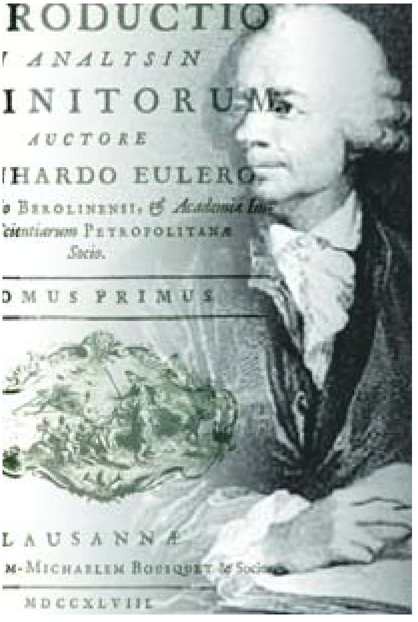
---

[3] 18 de los 29 volúmenes que forman la serie I, dedicada a su producción matemática, de la *Opera Omnia* están dedicados al Análisis. Véase [Dun; págs. 175-180]

[4] Como señala Antonio Durán, responsable de los comentarios de la magnífica traducción de la *Introductio* editada por la Real Sociedad Matemática Española ([Eu]), puede considerarse esta frase de Euler como el origen del análisis matemático moderno.

«Es función de una cantidad variable cualquier expresión analítica compuesta comoquiera que sea por esa cantidad y números o cantidades constantes». ([Eu; Cap I. 4]. El subrayado es mío).

Aunque implícitamente esta idea de función es la aceptada por la mayoría de los matemáticos a partir de la segunda mitad del siglo XVII, es Euler quien hace precisa la relación funcional a través de la frase *«expresión analítica»*. Para Euler esto significa que el valor o valores de la función se pueden obtener tras realizar una serie de *operaciones* (algebraicas o trascendentes, incluyendo expresiones infinitas, tales como series, productos infinitos y fracciones continuas) con las variables[5] que, por otro lado, pueden tomar cualquier valor, «incluidos los valores imaginarios» ([Eu, Cap. I.5])[6]. Este concepto de función perduró durante cerca de un siglo, aunque el mismo Euler sintió la necesidad de ampliarlo, a raíz del famoso debate de la cuerda vibrante[7].



En el Capítulo 4 de la *Introductio* Euler considera que la expresión analítica más general para expresar una función es una serie infinita de potencias. Y añade que

Si alguien tuviere dudas de esto, desaparecerán ante el desarrollo cumplido de tales funciones.

---

[5] Lebesgue [Le] probó que las funciones que se pueden obtener por medio de estos procesos infinitos son precisamente las funciones de la clase de Borel.

[6] Euler no dio una definición explícita de los números «imaginarios», en la *Introductio*, aunque demostró ser un experto en el uso de los mismos. Es en sus *Vollstandige Anleitung zur Algebra* (Elementos de Álgebra), publicados en 1770 donde, tras declarar que la raíz cuadrada de un número negativo es una «cantidad imposible», llama a estos números «cantidades imaginarias» y defiende que, «puesto que existen en nuestra imaginación y tenemos suficiente idea de ellos…. nada nos impide hacer uso de estas cantidades imaginarias y emplearlas en los cálculos.»

[7] En el prólogo de *Instituciones calculi differentialis* (1755) dice Euler: «Si unas cantidades dependen de otras, de modo que si las últimas cambian, lo hacen también las primeras, se dice que las primeras cantidades son **funciones** de las últimas.»

Y a lo largo de la obra se pondrá a la tarea, obteniendo los desarrollos en serie de las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. La mayoría de estos desarrollos eran conocidos y se habían obtenido muchos años antes usando los métodos del cálculo diferencial e integral. Euler los obtendrá aquí usando exclusivamente la fórmula del binomio de Newton junto con la utilización magistral de los números infinitos.

Para glosar el uso que hace Euler de los infinitos, nada mejor que las palabras de Antonio Durán en el artículo *Euler y los infinitos* incluido en [Eu]:

> *«Como fue habitual a lo largo de gran parte del siglo XVII, de todo el XVIII y de la primera mitad del XIX, Euler no explicó en la* Introductio *qué había que entender por cantidad infinitamente pequeña o infinitamente grande, ni, mucho menos, las definió; simplemente las usó en su texto de manera magistral como herramienta para desentrañar y así poder descubrir las propiedades recónditas de las funciones. Las cantidades infinitamente grandes y pequeñas aparecen por el texto y luego desaparecen, como en un juego de magia, pero su estancia no habrá sido vana: habrán servido para transformar la función, dejando al descubierto importantes propiedades ocultas. […] para los griegos el infinito fue una especie de bestia temible, pongamos un minotauro gigantesco del que había que huir; Euler en cambio no huye. Al contrario, se acerca al monstruo, le acaricia el lomo y le unce un yugo que le permite hacer fértiles campos antes estériles.»*

En la sección siguiente tendremos ocasión de contemplar, a través de algunos ejemplos, el uso admirable que hace Euler de esta herramienta.

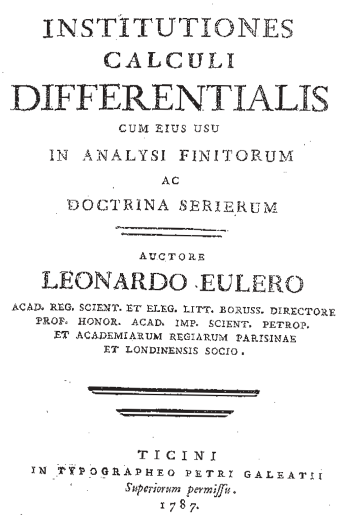
Más tarde, al desarrollar el cálculo diferencial en su *Institutiones calculi differentialis* (1755), sintió la necesidad de exponer su «doctrina del infinito» para justificar las reglas de uso de las cantidades infinitesimales. Para Euler,

«Una cantidad infinitamente pequeña […] siendo menor que cualquier otra dada no puede ser otra cosa que cero» (véase [ST; pág. 384]).

De la igualdad $n.0 = 0$ válida para cualquier número real n, Euler concluye que

$$\frac{n}{1} = \frac{0}{0}$$

y, por tanto, *«dos ceros pueden tener una razón arbitraria»,* por lo que deben designarse con símbolos diferentes ([SR; pág. 384]). Es aquí cuando Euler introduce la notación de Leibniz para las diferenciales. Designa por dx una cantidad infinitamente pequeña. Por tanto, $dx = 0$ y también $adx = 0$ para cualquier cantidad finita a. Pero estos dos ceros son *distintos*, ya que al comparar sus razones se tiene $adx/dx = a$. Del mismo modo, dy/dx puede ser finito, aunque dx y dy sean cero. Así pues, como dice Boyer, el cálculo para Euler se reduce a determinar el valor de las razones de distintos ceros ([B1; p. 244]). La jerarquía entre infinitésimos se explica también en términos de cocientes: dado el infinitésimo dx (=0!), $(dx)^2$ es un infinitésimo de segundo orden y Euler justifica que $dx + (dx)^2 = dx$ porque


INSTITUTIONES
CALCULI
DIFFERENTIALIS
CUM EIUS USU
IN ANALYSI FINITORUM
AC
DOCTRINA SERIERUM

AUCTORE
LEONARDO EULERO
ACAD. REG. SCIENT. ET ELEG. LITT. BORUSS. DIRECTORE
PROF. HONOR. ACAD. IMP. SCIENT. PETROP.
ET ACADEMIARUM REGIARUM PARISINAE
ET LONDINENSIS SOCIO.

TICINI
IN TYPOGRAPHEO PETRI GALEATII
Superiorum permissu.
1787.

$$\frac{dx + (dx)^2}{dx} = 1 + dx = 1.$$

Por la misma razón, Euler escribe $dx + (dx)^n = dx$, para todo $n>1$.

A lo largo de la obra se desarrolla el cálculo diferencial en el espíritu de Leibniz (es decir, se define la diferencial de una función $y = f(x)$ como la «variación infinitesimal» $f(x + dx) - f(x)$) y en los primeros capítulo se establecen las propiedades habituales (diferencial de una suma, producto, cociente, etc.) sin ninguna dificultad. En el cálculo de las diferenciales de las funciones trascendentes, aparece de nuevo la mezcla habitual de audacia y confianza en el simbolismo. Por ejemplo, para calcular dy cuando $y = \log x$ (logaritmo natural o neperiano), Euler usa la conocida serie de Mercator

$$\log(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots$$

y obtiene

$$dy = \log(x + dx) - \log(x) = \log\left(1 + \frac{dx}{x}\right) = \frac{dx}{x} - \frac{(dx)^2}{2x^2} + \frac{(dx)^3}{3x^3} - \cdots = \frac{dx}{x}.$$

Del mismo modo, a partir de los desarrollos conocidos del seno y el coseno, obtiene que sen $dx = dx$ y cos $dx = 1$, con lo que si $y = \operatorname{sen} x$,

$$dy = \operatorname{sen}(x + dx) - \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x \cos dx + \operatorname{sen} dx \cos x - \operatorname{sen} x = \cos x\, dx\ .$$

Institutiones calculi differentialis contiene también la primera exposición sistemática del cálculo diferencial de varias variables.

En cuanto a las series infinitas, están omnipresentes en toda la obra de Euler y 3 de los 29 volúmenes de la serie I de la *Opera Omnia* (más de 2000 páginas) están específicamente dedicados a ellas.

Hay que decir que en la época de Euler no existía la noción de rigor actual. No solían establecerse definiciones precisas de los conceptos, lo que hacía que la noción de «demostración» de un teorema tuviera un sentido completamente distinto al que tiene hoy. Más que una verdad matemática, se trataba de exponer una predicción con altas dosis de fiabilidad, corroborada con la comprobación de una serie de casos particulares del enunciado (véanse las notas 44 y 120 de [Eu]). Por ello no es extraño que se dieran varias demostraciones de un resultado en el mismo artículo. En el caso de Euler, este hecho se repite con frecuencia, combinado con el uso constante de ejemplos numéricos concretos que suministran una mayor evidencia de la certeza de lo afirmado.

En particular, la falta de una noción clara de *convergencia* hacía que los resultados obtenidos utilizando de series infinitas, de uso frecuentísimo desde el comienzo del cálculo, fueran a veces objeto de grandes polémicas.

Desde luego, una serie numérica de términos *positivos* o bien converge o bien diverge a infinito. El problema se presenta, fundamentalmente, con las series cuyo término general no tiene signo constante. Por ejemplo, Leibniz no estaba seguro de si a la serie 1-1+1-1+... podía asignársele una suma, aunque pensaba que de ser así, ese valor debería ser 1/2 (las sumas parciales valen sucesivamente *1* y *0* [8].

También en este aspecto el caso de Euler es excepcional. Por un lado, tenía una idea muy clara de la noción de serie numérica convergente, apoyada por su tremenda capacidad de cálculo. Pero, además, adelan-

---

[8] Como señala **Hardy** en su excelente Divergent Series ([Ha]),"[Los matemáticos del siglo XVIII] *no tenían el hábito de dar la definición* [de un concepto que estaban usando]. *Para ellos no era natural decir que «por X queremos decir Y»... La mayoría de los matemáticos antes de Cauchy no preguntaban ¿cómo definimos 1-1+1-1+1-1+...? sino ¿qué es 1-1+1-1 +...?*

tándose una vez más a su tiempo, fue el primero en asignar sistemáticamente una «suma» a diversas series divergentes, lo que le permitió utilizarlas formalmente en los cálculos para obtener importantes resultados (en los que, por supuesto, desaparecen las series divergentes).

En una carta a su amigo **Goldbach** escrita en 1745 Euler manifiesta lo siguiente:

> *...Creo que a toda serie debe asignársele un cierto valor. Sin embargo* [...] *este valor no debe ser llamado suma, ya que esta palabra se asocia con la idea de que la suma se ha obtenido por un proceso real de sumación: esta idea no es aplicable a las «seriebus divergentibus»...* (Véase [Va; pág. 129])

Euler tenía claro que asignar un valor a una serie divergente era sólo una cuestión de convenio. Lo que debía cumplirse es que hubiera un modo *sistemático y consistente* de asignar tal valor. Además, aunque pudiera parecer que métodos distintos podrían asignar valores distintos a la misma serie, tenía el convencimiento de que a cualquier serie divergente le corresponde una única «suma», independiente del método usado para obtenerla (de nuevo aparece su fe en el valor de los símbolos). En la mayor parte de los casos, Euler utilizó el método siguiente para asignar una «suma» a una serie divergente: dada la serie

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots$$

se trata de determinar la *función generatriz*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

y definir

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n =: f\ (1)$$

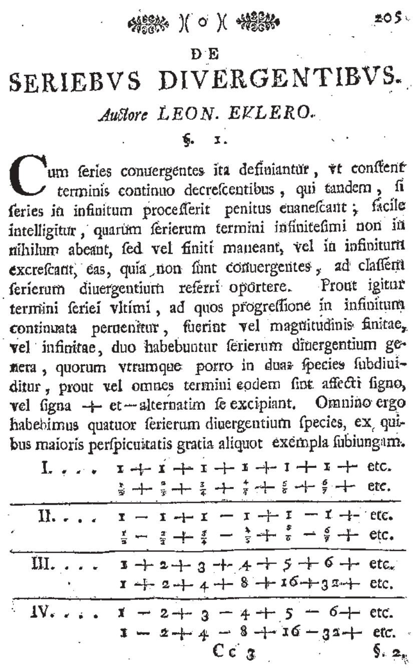
(esencialmente es lo que hoy se conoce como método de *sumación Abel*). De esta forma, de los desarrollos

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$$
$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + (-1)^n (n+1) x^n + \cdots$$

Euler deduce que

$$1-1+1-1+\cdots+(-1)^n+\cdots=\frac{1}{2}$$

$$1-2+3-4+\cdots+(-1)^n(n+1)+\cdots=\frac{1}{4}.$$


205

DE

SERIEBVS DIVERGENTIBVS.

Auctore LEON. EVLERO.

§. 1.

Cum ſeries conuergentes ita definiantur, vt conſtent terminis continuo decreſcentibus, qui tandem, ſi ſeries in infinitum proceſſerit penitus euaneſcant; facile intelligitur, quarum ſerierum termini infiniteſimi non in nihilum abeant, ſed vel finiti maneant, vel in infinitum excreſcant, eas, quia non ſint conuergentes, ad claſſem ſerierum diuergentium referri oportere. Prout igitur termini ſeriei vltimi, ad quos progreſſione in infinitum continuata peruenitur, fuerint vel magnitudinis finitae, vel infinitae, duo habebuntur ſerierum diuergentium genera, quorum vtrumque porro in duas ſpecies ſubdiuiditur, prout vel omnes termini eodem ſint affecti ſigno, vel ſigna + et − alternatim ſe excipiant. Omnino ergo habebimus quatuor ſerierum diuergentium ſpecies, ex quibus maioris perſpicuitatis gratia aliquot exempla ſubiungam.

I. . . .	$1+1+1+1+1+1+$ etc.
	$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\frac{6}{7}+$ etc.
II. . . .	$1-1+1-1+1-1+$ etc.
	$\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}+\frac{5}{6}-\frac{6}{7}+$ etc.
III. . . .	$1+2+3+4+5+6+$ etc.
	$1+2+4+8+16+32+$ etc.
IV. . . .	$1-2+3-4+5-6+$ etc.
	$1-2+4-8+16-32+$ etc.

Cc 3 §. 2.

Por supuesto, el método no funciona para series como la

$$1-1!+2!-3!+\cdots+(-1)^n n!+\cdots$$

(la serie divergente por excelencia, como la llama Euler), cuya función generatriz sólo converge en 0. No obstante, en su trabajo *De seriebus divergentibus* [9], comunicado a la Academia de San Petersburgo en 1755 y publicado en 1760, desarrolla el método general que hemos comentado y establece nuevas técnicas (próximas a lo que hoy se conoce como *método de sumación Borel*) para asignar a dicha serie el valor 0,596347362123, (¡con un error menor que el último dígito!, según comenta en la introducción)[10].

Algo más tarde, en 1768 Euler utilizó su teoría de series divergentes para demostrar la ecuación funcional de la función zeta de Riemann

$$\zeta(1-s)=\frac{2}{(2\pi)^s}\cos\frac{s\pi}{2}\Gamma(s)\zeta(s)$$

[9] Al comienzo de *De seribus divergentibus* dice Euler: «la suma de una serie es esa cantidad a la que se acerca más y más cuantos más términos de la serie sean tomados» y aclara que esta noción sólo tiene sentido para series convergentes. Más adelante expone que puesto que muchas series numéricas surgen del desarrollo de distintas funciones, «si empleamos como definición de suma de la serie la expresión que la genera, todas las dudas con respecto a las series divergentes desaparecen...»

[10] Remitimos al lector interesado al Capítulo 5 de [Va].

para todos los valores enteros de s y para s= 1/2, 3/2 por cálculo directo ¡100 años antes que Riemann! Euler conjeturó también que la fórmula era válida para *todos* los valores de *s* .

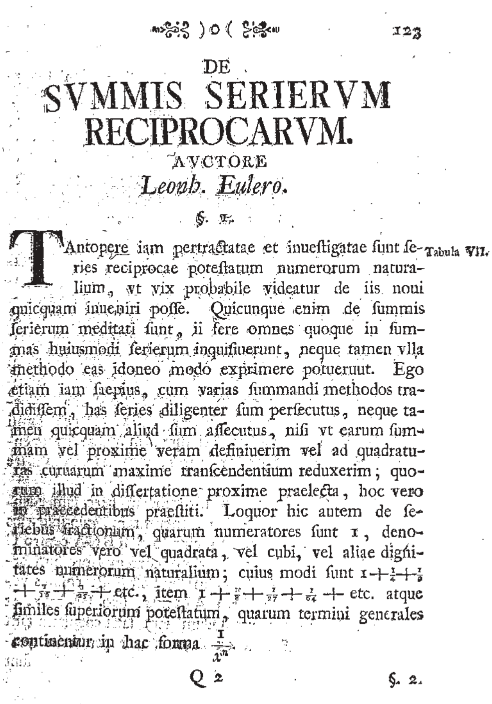
3. TRES EJEMPLOS

A continuación mostraremos a lo largo de algunos ejemplos significativos el modo de hacer matemáticas de Euler.

A) El problema de Basilea

Recibe este nombre el problema de calcular la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} .$$



)o(123

DE
SVMMIS SERIERVM RECIPROCARVM.
AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Tantopere iam pertractatae et inueſtigatae ſunt ſeries reciprocae poteſtatum numerorum naturalium, vt vix probabile videatur de iis noui quicquam inueniri poſſe. Quicunque enim de ſummis ſerierum meditati ſunt, ii fere omnes quoque in ſummas huiusmodi ſerierum inquiſiuerunt, neque tamen vlla methodo eas idoneo modo exprimere potueruut. Ego etiam iam ſaepius, cum varias ſummandi methodos tradidiſſem, has ſeries diligenter ſum perſecutus, neque tamen quicquam aliud ſum aſſecutus, niſi vt earum ſummam vel proxime veram definiuerim vel ad quadraturas curuarum maxime tranſcendentium reduxerim; quorum illud in diſſertatione proxime praelecta, hoc vero in praecedentibus praeſtiti. Loquor hic autem de ſeriebus fractionum, quarum numeratores ſunt 1, denominatores vero vel quadrata, vel cubi, vel aliae dignitates numerorum naturalium; cuius modi ſunt $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+$ etc., item $1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\frac{1}{64}+$ etc. atque ſimiles ſuperiorum poteſtatum, quarum termini generales continentur in hac forma $\frac{1}{x^n}$. Tabula VII.

Q 2 §. 2.

La cuestión había aparecido por primera vez en la *Novae quadrature arithmeticae de* **Pietro Mengoli** en 1650 y posteriormente fue propuesta por **H. Oldenburg** a Leibniz en una carta fechada en 1673. El nombre dado al problema se debe a que **Jakob Bernouilli** dedicó en Basilea muchos esfuerzos a tratar de resolverlo (de hecho, demostró la convergencia de la serie y que la suma era menor o igual que 2) y frustrado terminó escribiendo: *«Si alguien encontrara esta suma, cosa que ha escapado a nuestros esfuerzos, y nos lo comunicara, contará con nuestra gratitud».*

Muy probablemente Euler tuvo noticia del problema a través de Daniel Bernouilli, compañero en la Academia de San

Petersburgo. Comenzó a trabajar sobre el tema en 1730, obteniendo una aproximación del valor de la suma con seis decimales exactos. Cuando en 1734 anunció que había resuelto el problema, se convirtió de repente en uno de los matemáticos más reputados de su época. El trabajo (uno de los más famosos de Euler) fue presentado en la Academia de San Petersburgo en 1735, aunque no apareció publicado hasta 1740, con el título *De summis serierum reciprocarum*. Y, como es habitual en Euler, contiene hasta tres demostraciones de la solución y muchos otros resultados. Sus argumentos son típicos en Euler: una extrapolación formal de lo finito a lo infinito basado en esta ocasión en la extensión de un resultado bien conocido sobre polinomios al caso de series de potencias. Concretamente, si $P(x)$ es un polinomio de grado n con término independiente P(0) = 1 y con raíces $a_1,...a_n$, entonces P admite la factorización

$$P(x) = 1 - \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 - \cdots + (-1)^n \alpha_n x^n = \left(1 - \frac{x}{a_1}\right)\left(1 - \frac{x}{a_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{a_n}\right)$$

como se comprueba fácilmente. De aquí resulta, realizando la operación e identificando coeficientes, que

$$\alpha_1 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n},\ \alpha_2 = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_1 a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1} a_n}$$

y, en general, α_k es la suma de todos los productos de los inversos de k raíces distintas. Por otro lado era bien conocido que las sumas de las potencias de las raíces de un polinomio se podían expresar en términos de los coeficientes del mismo Concretamente, si

$$S_k = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j^k}$$

se tiene

$$S_1 = \alpha_1,\ S_2 = \alpha_1^2 - 2\alpha_2, S_3 = \alpha_1^3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 3\alpha_3, \text{etc.}$$ [11]

Y ahora se produce el *salto al infinito:* ¡Euler considera las series infinitas como polinomios de grado infinito, y aplica sin reparos las

[11] Estas fórmulas se suelen atribuir a Newton, quien las incluyó en su *Lectures on Algebra*. Euler dio una original demostración del resultado general en 1750, reproducida en [Du; pág. 50].

fórmulas obtenidas anteriormente a las series! En particular, a partir de la conocida serie del seno introduce la función

$$f(x) = 1 - \frac{\operatorname{sen} x}{\lambda} = 1 - \frac{x}{\lambda} + \frac{x^3}{3!\lambda} - \frac{x^5}{5!\lambda} + \cdots,$$

siendo λ es un parámetro y considera distintos casos:

<u>λ = 1</u>: En este caso, la función $f(x) = 1 - \operatorname{sen} x$ tiene raíces (dobles) en los puntos $a_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ Por tanto, si ponemos $q = \pi/2$ la fórmula para la suma de las raíces da en este caso

$$S_1 = \alpha_1 = 1 = 2 \times \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{3q} + \frac{1}{5q} - \cdots \right) = \frac{4}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \right),$$

que es la conocida serie de Leibniz para el cálculo de $\pi/4$.

La fórmula para la suma de los cuadrados da en este caso

$$S_2 = \alpha_1^2 - 2\alpha_2 = 1 = 2 \times \left(\frac{1}{q^2} + \frac{1}{9q^2} + \frac{1}{25q^2} + \cdots \right) = \frac{8}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots \right),$$

es decir,

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

Como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

resulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

¡El problema de Basilea ha sido resuelto! Pero Euler no se detiene aquí. Siguiendo el mismo argumento obtiene los valores de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^{2k}}$ y $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}$ para k = 1, 2, 3 4.

Euler considera a continuación otros valores del parámetro λ que le permiten obtener nuevas fórmulas y reconfirmar de nuevo el valor obtenido para la suma de los recíprocos de los cuadrados de los naturales. Finalmente trata el caso $\lambda = 0$, eliminando la raíz trivial $x = 0$. Equivalentemente, Euler aplica su método a la función para $g(x) = \operatorname{sen} x/x$, para $x \neq 0$; $g(0) = 1$, cuyo desarrollo en serie es

$$g(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$$

y cuyos ceros son ± π, ± 2π, ± 3π,..., obteniendo directamente la expresión de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}$ para $1 \leq k \leq 6$.

Varios de los colegas de Euler (entre ellos Daniel y Nicolás Bernouilli) presentaron diversas objeciones a su demostración: por ejemplo, la función sen x podía tener otras raíces complejas, además de las reales consideradas por Euler. Más importante era la necesidad de justificar que las fórmulas de Newton para polinomios fueran válidas para series. Más aún, mientras que un polinomio queda caracterizado por sus raíces, eso no es cierto para otras funciones. Por ejemplo, sen x/x y e^xsen x/x tienen los mismos ceros reales, pero claramente no pueden tener el mismo desarrollo en serie de potencias. El mismo Euler era consciente de estas dificultades, pero el hecho de que su método condujera también a resultados conocidos (como la serie de Leibniz) y que los cálculos numéricos los avalaran en otros casos le persuadieron de su validez (recordemos el comentario hecho más arriba sobre lo que significaba una demostración en la época de Euler). En todo caso, volvió en varias ocasiones sobre el tema. Así, en 1740 dio una demostración del desarrollo de sen x/x en producto infinito, de la que se deduce el resultado encontrado para $\sum 1/n^2$. En la *Introductio* ([Eu; Cap. X. 168]) da nuevas demostraciones de la fórmula del producto infinito para sen x y senh x, y obtiene el valor de

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}$ para k = 1, 2, ..., 13.

B) Las funciones exponenciales

En el Capítulo VII de la *Introductio* aparecen por primera vez en la obra los números infinitamente pequeños y los infinitamente grandes que Euler maneja como una varita mágica para obtener el desarrollo en serie de las funciones exponenciales que había introducido en el Capítulo anterior[12].

Su razonamiento va como sigue: sea $a > 0$ la base de exponenciación. Como $a^0 = 1$, la ecuación de la tangente a la curva a^z en el punto (0,1) será de la forma $1+ kz$, con k una constante (la pendiente de la tangente en ese punto). Por otro lado, según la concepción de Leibniz, una curva está formada por una infinitad de segmentos infinitesimales, y la tangente en un punto cualquiera de la curva es la prolongación del segmento infinitesimal que contiene a ese punto. Por tanto si ω es un número infinitamente pequeño los valores de la curva y la tangente coincidirán en ω, es decir, $a^{\omega} = 1 + k\omega$[13]. Si ahora z es un número finito cualquiera, $j = z/\omega$ será infinitamente grande, luego

$$a^z = \left(a^{\omega}\right)^{z/\omega} = \left(1 + k\omega\right)^j = \left(1 + \frac{kz}{j}\right)^j$$

y ahora Euler desarrolla la potencia por la fórmula del binomio de Newton (¡para un exponente infinito!), obteniendo

$$\begin{aligned} a^z &= 1 + j\left(\frac{kz}{j}\right) + \frac{j(j-1)}{2}\left(\frac{kz}{j}\right)^2 + \frac{j(j-1)(j-2)}{3!}\left(\frac{kz}{j}\right)^3 + \cdots = \\ &= 1 + kz + \frac{j(j-1)}{j^2}\frac{k^2z^2}{2!} + \frac{j(j-1)(j-2)}{j^3}\frac{k^3z^3}{3!} + \cdots \end{aligned}$$

Pero como j es un número infinito, $(j-2)/j = (j-1)/j = \ldots = (j-n)/j = 1$ para todo natural n, con lo que resulta

$$a^z = 1 + kz + \frac{k^2z^2}{2!} + \frac{k^3z^3}{3!} + \cdots.$$

---

[12] Euler define a^z para $a > 0$ y z real por un argumento de continuidad: primero para z entero; después para z racional y finalmente, por continuidad, para valores reales de z. Una vez obtenido el desarrollo en serie, utilizará el mismo para definir el valor de a^z para z un número complejo.

[13] Véase la nota 66 de [Eu].

Poniendo $z = 1$, Euler obtiene una relación entre la base a y el número k. Además, la expresión anterior es especialmente simple cuando $k = 1$, es decir, para la base e tal que $k = 1$, esto es,

$$e = \left(1 + \frac{1}{j}\right)^j = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cong 2{,}7182818284\cdots$$

y

$$e^z = \left(1 + \frac{z}{j}\right)^j = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Con argumentos similares, Euler obtiene el desarrollo en serie de las funciones logarítmicas (véase [Eu; Cap. VII]).

C) Las «Identidades de Euler»

En el Capítulo VIII de la *Introductio* Euler define las funciones trigonométricas sen x y cos x, (donde la variable x es el arco de la circunferencia de radio unidad, expresado en radianes) y establece sus propiedades usuales, en particular las fórmulas

$$\text{sen}\,(y \pm z) = \text{sen}\, y \cos z \pm \cos y \,\text{sen}\, z$$
$$\cos(y \pm z) = \cos y \cos z \mp \text{sen}\, y\ \text{sen}\, z$$

A continuación, en uno de sus saltos habituales, Euler pasa bruscamente al campo complejo escribiendo la factorización

$$(\text{sen}\, y)^2 + (\cos y)^2 = 1 = (\text{sen}\, y + i \cos y)(\text{sen}\, y - i \cos y),$$[14]

(donde hemos escrito i en lugar de $\sqrt{-1}$, que es la notación que utiliza Euler; véase la sección siguiente) y demuestra fácilmente por inducción las fórmulas de De Moivre, que escribe en la forma

$$\left(\cos y \pm i \text{sen}\, y\right)^n = \cos ny \pm i \text{sen}\, ny \quad (n \text{ natural})$$

[14] En palabras de Euler: *«factores que, si bien imaginarios, prestan no obstante un servicio ingente a la hora de combinar y multiplicar arcos.»* ([Eu; VIII.132]).

de la que se deduce

$$\cos nz = \frac{(\cos z + i\,\mathrm{sen}\, z)^n + (\cos z - i\,\mathrm{sen}\, z)^n}{2}, \qquad (\#)$$
$$\mathrm{sen}\, nz = \frac{(\cos z + i\,\mathrm{sen}\, z)^n - (\cos z - i\,\mathrm{sen}\, z)^n}{2i}.$$

A partir de aquí, Euler vuelve a utilizar el juego mágico de los infinitos. Así, desarrollando las expresiones anteriores por la fórmula del binomio y simplificando, obtenemos

$$\cos nz = (\cos z)^n - \frac{n(n-1)}{2!}(\cos z)^{n-2}(\mathrm{sen}\, z)^2 + \cdots,$$
$$\mathrm{sen}\, nz = \frac{n}{1}(\cos z)^{n-1}\mathrm{sen}\, z - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(\cos z)^{n-3}(\mathrm{sen}\, z)^3 + \cdots$$

Sea ahora z un arco infinitamente pequeño y n un número infinitamente grande, de modo que $v = nz$ sea finito. Dice Euler: *«como* sen $z = z = v/n$ y cos $z = 1$, *tenemos*

$$\cos v = 1 - \frac{v^2}{2!} + \frac{v^4}{4!} - \frac{v^6}{6!} + \cdots,$$
$$\mathrm{sen}\, v = v - \frac{v^3}{3!} + \frac{v^5}{5!} - \frac{v^7}{7!} + \cdots$$

(como n es infinito, Euler identifica $n = n-1 = n-2 = \ldots = n-$k, para todo número finito k Por el comentario previo, cos $z = 1$ y sen $z = z$, luego, $n$sen $z = nz = v$).

No se detiene aquí Euler. Si en las expresiones (#) hacemos los mismos supuestos anteriores, obtenemos

$$\cos v = \frac{\left(1 + i\frac{v}{n}\right)^n + \left(1 - i\frac{v}{n}\right)^n}{2}, \quad \mathrm{sen}\, v = \frac{\left(1 + i\frac{v}{n}\right)^n - \left(1 - i\frac{v}{n}\right)^n}{2i}$$

Pero habíamos visto que si n es infinito, $\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n = e^z$, luego resulta

$$\cos v = \frac{e^{iv}+e^{-iv}}{2}, \quad \operatorname{sen} v = \frac{e^{iv}-e^{-iv}}{2i},$$

que son las famosas *«identidades de Euler»*[15].

4. EPÍLOGO

Leonhard Euler es sin duda el matemático más importante del siglo XVIII y uno de los más importantes de toda la historia. En un siglo que contempló los logros de matemáticos tan destacados como **d'Alembert, Daniel y Nicolás Bernouilli,** los **Clairaut, Condorcet, Maupertuis, Maclaurin,** los **Riccati, Lagrange** o **Monge,** la figura de Euler destaca sobre todos ellos, hasta el punto de que el siglo XVIII es en Matemáticas, sin duda, *La época de Euler* ([B2]).

Como ya hemos dicho, realizó importantes aportaciones a todas las ramas de las matemáticas y creó otras nuevas, como la topología combinatoria, la teoría de grafos, la teoría analítica de números, etc., mostrando siempre una inventiva y originalidad realmente excepcionales.

En cuanto al Análisis infinitesimal, damos la palabra al historiador C. Boyer, quien en [B2; p. 558] escribe: *«puede decirse que Euler hizo por el Cálculo de Newton y Leibniz lo que **Euclides** había hecho con la geometría de **Eudoxo** o lo que **Vieta** hizo por el álgebra de **Cardano** y **Al-Khowarismi:** Euler tomó el cálculo diferencial de Leibniz y el método de las fluxiones de Newton y los integró en una rama más general de las matemáticas, que desde entonces recibe el nombre de Análisis, es decir, el estudio de las funciones y los procesos infinitos».*

Pero es que, además de sus maravillosos descubrimientos, Euler es responsable de un sinfín de notaciones y fórmulas que utilizamos actualmente y que él introdujo o popularizó[16] Entre otras figuran:

---

[15] Euler había descubierto estas identidades en 1740. El resultado no es, pues, original, aunque sí su deducción.

[16] C. Boyer llama a Euler «el más feliz inventor de notaciones de toda la historia de la matemática» y añade: «Se puede afirmar sin ninguna duda que nuestro sistema de notaciones matemáticas es hoy lo que es debido más a Euler que a ningún otro matemático a lo largo de la historia.» ([B2; p. 556-557]).

- e para designar la base de los logaritmos naturales o neperianos. Empleado por primera vez en 1727 para designar la suma $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$, Euler calculó su valor con 23 decimales exactos.

- π para representar la razón de la longitud de una circunferencia a su diámetro. Euler usó este signo por primera vez en su *Mechanica* (1736), aunque en otros trabajos utiliza la letra p. Es a partir de la aparición del símbolo en la *Introductio* (en donde Euler escribe su valor con 127 decimales ([Eu, Cap. VIII. 126])[17] cuando su uso se universaliza.

- i para representar la unidad imaginaria $\sqrt{-1}$. Esta notación la adoptó Euler a partir de 1777, pues en obras anteriores había empleado la letra i para representar un «número infinito».

– La famosa fórmula de Euler: $e^{i\pi} + 1 = 0$.

– La identidad trigonométrica $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,sen\theta$.

– Las notaciones $l\,(x)$ y Σ para designar los logaritmos naturales y la suma.

– La identidad $l(-1) = i\pi + 2ki\pi \;(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

– La constante de Euler $\gamma := \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \; l(n)\right)$

– Los desarrollos en producto infinito

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right), \quad \cos z = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right)$$

– La fórmula del producto para la función zeta:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ primo}}\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \;(s > 1)$$

– La notación funcional $f\,(x)$.

– La concepción moderna de las funciones trigonométricas.

---

[17] Al parecer, el primero en utilizar el símbolo π para designar la razón de la circunferencia al diámetro fue William Jones (editor también del *Analysis per aequationes* de Newton) en 1706. El valor de π dado por Euler está tomado de la *Mémoire sur la quadrature du cercle* publicada por T. G. de Lagny en 1727.

– y un largo etcétera.

Sin duda hoy continúa plenamente vigente el consejo de **P.S. Laplace:** *Lisez Euler, lisez Euler; c'est le maître à tous nous.*

BIBLIOGRAFÍA

[Bo] U. Bottazzini, *The Higher Calculus: A history of real and complex Analysis from Euler to Weierstrasss.* Springer-Verlag, New York, 1986.

[B1] C. Boyer, *The History of the Calculus and its conceptual development.* Dover Pub., New York, 1959.

[B2] C. Boyer, *Historia de la Matemática.* Alianza Universidad Textos, **94.** Alianza Editorial, 1986.

[B3] C. Boyer, *The foremost textbook of modern times.* En *Selected papers on Calculus.* T. M. Apostol, Ed. The Mathematical Association of America, Belmont, 1969.

[Ca] F. Cajori, *Discussion of Fluxions: from Berkeley to Woodhouse.* American Math. Monthly 24 (1917), 145-154.

[Dun] W. Dunham, *Euler, the master of us all.* The Dolciani mathematical expositions No. 22. The Mathematical Association of America, 1999.

[Eu] L. Euler, Introducción al análisis de los infinitos. Edición a cargo de A. J. Durán y F. J. Pérez. SAEM «Thales» y Real Sociedad Matemática Española. Sevilla, 2000.

[Ha] G. H. Hardy, *Divergent series.* 2^{nd}. Edition. Chelsea Pub. Co., 1991

[Le] H. Lebesgue, *Sur les fonctions représentables analytiquement.* J. Math. Pures Appl., 1 (1905), 139-216.

[Nw] J. R. Newman, *Sigma, el mundo de las matemáticas, Vol 1.* Eds. Grijalbo, Barcelona, 1968.

[Sa] C. E. Sandifer, *The early mathematics of Leonhard Euler.* The Mathematical Association of America, Washington, 2007.

[ST] D. J. Struik (ed.), *A source book in mathematics, 1200-1800.* Harvard Univ. Press, Cambridge, Mass. 1969.

[Va] V. S. Varadarajan, *Euler through time: a new look at old themes.* American Mathematical Soc., Providence, 2006.