Examen Julio 2018 [new]

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS

13 de Julio de 2018

Examen de Física Computacional - 2017/2018

Nombre y Apellidos:

DNI y Firma:

Advertencia: La calculadora en modo de **radianes**.

1. [1.5pt] Una cierta regla de cuadratura, cuando se discretiza en N trozos, tiene un desarrollo del error dado por

$$I - I_N = \frac{a_2}{N^2} + \frac{a_3}{N^3} + \frac{a_6}{N^6} + \frac{a_7}{N^7} + \frac{a_{10}}{N^{10}} + \frac{a_{11}}{N^{11}} + \cdots$$

Hemos evaluado I_N, I_{2N} e I_{4N} para un cierto valor de N. i) Calcular con estos tres números la *mejor aproximación posible* del valor exacto I de la integral. ii) El error de esta aproximación será obviamente de la forma $\mathcal{O}(1/N^p)$ para un cierto p. ¿Cuál es el valor de p?

2. [2.5pt] [Muy rápidos: en este problema ponga **el resultado solamente, no hace falta justificación alguna**]

1) Sea el método iterativo $x_{n+1} = F(x_n)$ con $F(x) = 2x - 7x^2$.

a1) ¿Es un método de Newton?

a2) Si lo es, ¿para qué función asociada $f(x)$?.

a3) Escriba un punto inicial x_0 que dé lugar, si es posible, a una sucesión $x_1, x_2, \ldots$ no convergente.

2) b1) ¿Qué condición tienen que cumplir los dígitos a, b, c, d, e para que el número de cinco cifras $abcde$ sea divisible entre 17. Dos ejemplos aquí.

b2) ¿ Y para que lo sea el de cuatro $bbde$? Un ejemplo aquí, por favor.

3) c1) ¿Es 2 una raíz primitiva de 19?

c2) ¿Y 3?

c3) ¿Y 8?

4) Sea el método de congruencias lineales $x_{n+1} = (17x_n + 7) \bmod 128$.

d1) Decir si tiene período máximo utilizando un teorema visto en clase.

d2) Tomando $x_0 = 5$ calcular x_{2050}

Las respuestas en formato (ver pizarra).

3. [3pt] Sea

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} e^{xy} - y^2 \\ cos(x + y) \end{pmatrix}.$$

Encontrar **tres** soluciones de $F(x, y) = 0$ en las que ambas variables x e y sean positivas. Siga, por favor las instrucciones que le señalo.

Nota: Este ejercicio es un Newton-Raphson en dos variables. **De ninguna manera** se aceptará un planteamiento del problema que lo reduzca a un problema de una sóla variable.

a) Hacer un dibujo de $F(x,y) = 0$ para ver donde se encuentran las soluciones y responder a cuántas soluciones tiene el problema.

b) Escribir explícitamente el método de Newton-Raphson para resolver $F(x,y) = 0$ calculando la matriz Jacobiana asociada, así como su inversa (cuando exista).

c) Las tres soluciones pedidas las llamaremos $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ y (a_3, b_3). Las ordenaremos por su cercanía al origen de coordenadas. La más cercana será (a_1, b_1), y la más lejana (a_3, b_3). Recuerde que tienen coordenadas positivas. Empecemos por (a_1, b_1). Me dirán ustedes en qué intervalo está, más o menos, sin un estudio sesudísimo, algo orientativo y tomarán como punto inicial (x_0, y_0) el que sea, ustedes eligen, pero en aritmética exacta, encontrando la primera aproximación (x_1, y_1) en aritmética exacta también. Después me la dan en aritmética decimal, lo harán facilmente con su calculadora. Y lo mismo para (a_2, b_2) y (a_3, b_3). Sólo la primera aproximación (x_1, y_1) proporcionada por el Newton en los tres casos.

d) Si la primera cifra significativa de su DNI es 1,4,7, calculará las dos iteraciones siguientes (x_2, y_2) e (x_3, y_3) correspondiente a (a_1, b_1). Si su cifra es 2,5,8 hará (x_2, y_2) e (x_3, y_3) correspondientes a (a_2, b_2) y si es 3,6,9 hará (x_2, y_2) e (x_3, y_3) correspondiente a (a_3, b_3). Pero en este apartado vale sólo con aritmética decimal. Pregunte si no le queda claro.

Trabajar en aritmética exacta es escribir 5/21 y no 0.238095, por ejemplo. Decimal es lo segundo.

Calificación

(1) I1N, I2N, I4N — 0.5, 0.5, 0.5

(2) 0.25 each.

(3) dibujo + intervalos + Newton: 1 + $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ en aritmética exacta + en decimal: 0.5 — 1.5

importante.

0.375 $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ — 0.375 $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$

+ $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ 0.375 — $\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$ 0.375

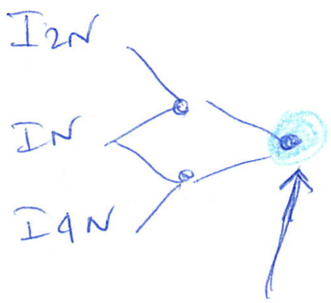
Física computacional Julio 2018

(1) $I = I_N + \frac{a_2}{N^2} + \frac{a_3}{N^3} + \frac{a_6}{N^6} + \frac{a_7}{N^7} + \dots$

$I = I_{2N} + \frac{a_2}{4N^2} + \frac{a_3}{8N^3} + \frac{a_6}{2^6N^6} + \dots$

$I = I_{4N} + \frac{a_2}{16N^2} + \frac{a_3}{4^3N^3} + \frac{a_6}{4^6N^6} + \dots$

I'll work



This will be the best value of integral I obtained with I_N, I_{2N}, I_{4N}. It is equal to

$$I_{\text{best value}} \equiv \frac{1}{21}\left[32 I_{4N} - 12 I_{2N} + I_N\right]$$

(notice that $32-12+1=21$)

and

$$I = I_{\text{best value}} + \frac{b_6}{N^6} + \frac{b_7}{N^8} + \frac{b_{10}}{N^{10}} + \dots$$

$b_6 = \frac{5a_6}{128}$ ... but does not matter.

solution of the problem: $I_{\text{best value}}$ and $O\left(\frac{1}{N^6}\right)$

$p=6$

no need to know exactly

$I_{2N}, I_N \rightarrow \frac{1}{3}(4I_{2N} - I_N) - \frac{a_3}{6N^3} - \frac{5}{16}\frac{a_6}{N^6} \dots$

$I_N, I_{4N} \rightarrow \frac{1}{15}(16 I_{4N} - I_N) - \frac{a_3}{20N^3} - \frac{17}{256}\frac{a_6}{N^6} - \dots$

$\rightarrow I_{\text{best value}} + \frac{5a_6}{128N^6} + \dots$

no need to know exactly

(2) $p \begin{cases} 0 & \text{: without interest} \\ \frac{1}{7} & \text{. Take } p=\frac{1}{7} \end{cases}$: fixed points of $x_{n+1}=F(x_n)$.

$F'(p)=0$ "could be a Newton method"!

Try $\boxed{f(x)=\frac{1}{x}-7}$ and obtain $x_{n+1}=F(x_n)$.

[otherwise: $F(x)=2x-7x^2=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$ or $\frac{f'}{f}=\frac{1}{7x^2-1}$.

Operate: $\frac{f'}{f}=\frac{1}{7x^2-1}=-\frac{1}{x}+\frac{7}{7x-1}$" then after integrating

a1) Yes

a2) $f(x)=\frac{1}{x}-7$

a3) x_0: anyone larger than $2/7$, for example

$\log f=-\log x+\log(7x-1)$

$=\log\frac{7x-1}{x}$

$=\log\left(7-\frac{1}{x}\right)$"

Conclusion: $f=7-\frac{1}{x}$ or $f(x)=\frac{1}{x}-7$, whatever you prefer.

$abcde = a.10000+b1000+c100+d10+e$ = multiple of 17

$10=10-17=-7$

$100=(-7)(-7)=49=49-34=15=-2$

$1000=(-7)(-2)=14=-3$

$10000=100\times100=(-2)(-2)=4$

b1) $\boxed{4a-3b-2c-7d+e=0 \text{ or a multiple of } 17}$

Example: 34510, 40035, 34510 + 40035 = 74545, etc...

b2) $\boxed{bbde:\ 5b+7d-e=0 \text{ or a multiple of } 17}$

Example: 40035 − 34510 = 5525

---

c1) Yes

c2) Yes

c3) NO

[in next page] [Hecho a mano, no hace falta calculadora...!!.]

$$\begin{array}{r} 38 \\ 38 \\ \hline 76 \end{array}$$

$2^0 = 1$
$2^1 = 2$
$2^2 = 4$
$2^3 = 8$
$2^4 = 16 = -3$
$2^5 = -6 + 19 = 13$
$2^6 = -12 + 19 = 7$
$2^7 = 14 = -5$
$2^8 = -10 = 9$
$2^9 = 18 = -1$
$2^{10} = -2 = 17$
$2^{11} = -4 = 15$
$2^{12} = -8 = 11$
$2^{13} = 22 = 3$
$2^{14} = 6$
$2^{15} = 12$
$2^{16} = 5$
$2^{17} = 10$
$2^{18} = 20 = 1$

$\cancel{1}$ $\cancel{2}$ $\cancel{3}$ $\cancel{4}$ $\cancel{5}$ $\cancel{6}$ $\cancel{7}$ $\cancel{8}$ $\cancel{9}$ $\cancel{10}$ $\cancel{11}$ $\cancel{12}$ $\cancel{13}$ $\cancel{14}$ $\cancel{15}$ $\cancel{16}$ $\cancel{17}$ $\cancel{18}$

Están todos $1, 2, \ldots, 18$
Sí, 2 es raíz primitiva de 19.

$3^0 = 1$
$3 = 3$
$3^2 = 9$
$3^3 = 27 = 8$
$3^4 = 24 = 5$
$3^5 = 15$
$3^6 = 45 - 38 = 7$
$3^7 = 21 = 2$
$3^8 = 6$
$3^9 = 18 = -1$
$3^{10} = -3 = 16$
$3^{11} = -9 = 10$
$3^{12} = 30 = 11$
$3^{13} = 33 - 38 = -5 = 14$
$3^{14} = -15 = 4$
$3^{15} = 12$
$3^{16} = 36 = -2 = 17$
$3^{17} = -6 = 13$
$3^{18} = -18 + 19 = 1$

Yes, 3 is a primitive root of 19

$8^0 = 1$
$8 = 8$
$8^2 = 64 - 76 = -12 = 7$
$8^3 = 56 - 76 = -20 = -1 = 18$
$8^4 = -8 = 11$
$8^5 = -64 + 76 = 12 = -7$
$8^6 = -56 + 76 = 20 = 1$

No, 8 is not a primitive root of 19

—— 0 —— 0 —— 0 0 0 —— 0 —— 0 ——

d1) Yes has a maximum period: equal to 128

$m = 2^7$
$c = 7$ is coprime of m.
$a - 1 = 16 = \dot{2}, \dot{4}$

d2) $X_{2050} = X_2 = 35$

$X_{2050} = X_2 =$
$\uparrow$
$2050 = 16 \times 128 + \underline{2}$

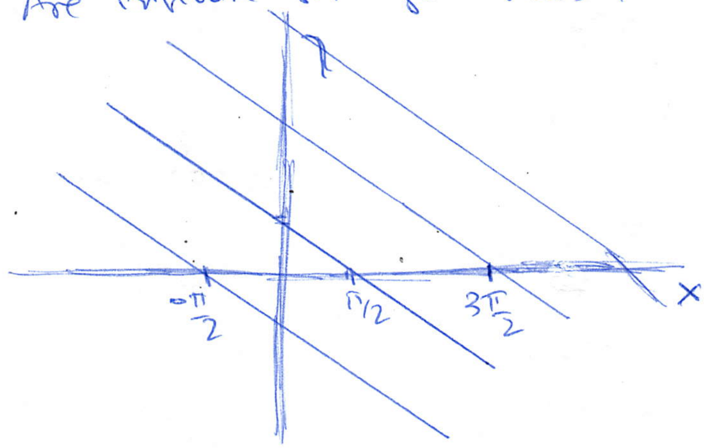
—— 0 —— 0 —— 0 0 0 —— 0 —— 0 ——

3

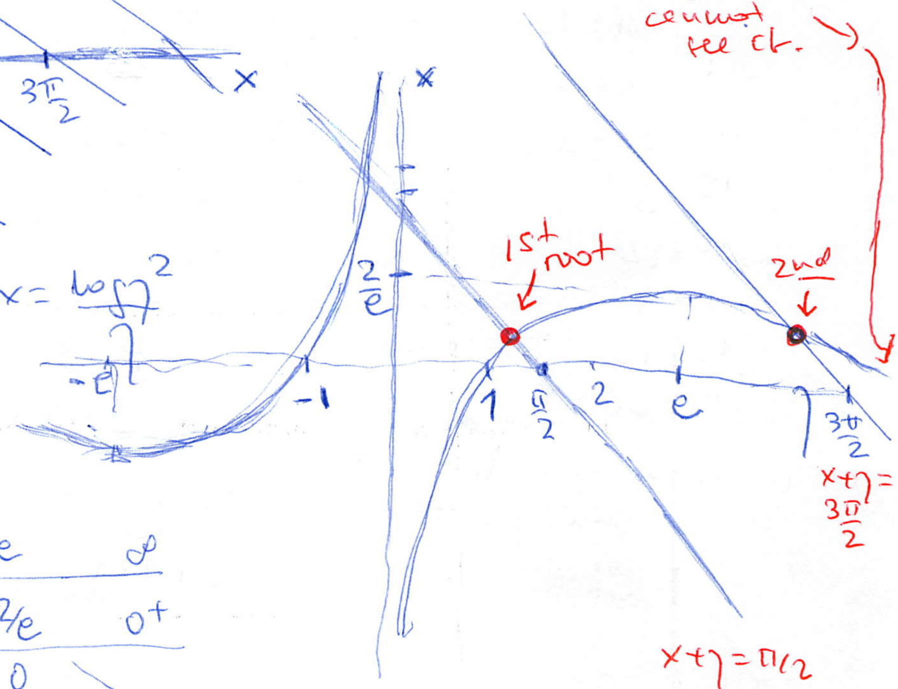
$$F(x,y) = \begin{pmatrix} e^{xy} - y^2 \\ \cos(x+y) \end{pmatrix} \qquad f_1 \equiv e^{xy} - y^2, \quad f_2 \equiv \cos(x+y)$$

Γ $\cos(x+y) = 0$ is $x+y = \pi/2$ or $\frac{3\pi}{2}$ or $\frac{5\pi}{2}$ or ...
$-\frac{\pi}{2}$ or $-\frac{3\pi}{2}$ or $-\frac{5\pi}{2}$ or ...

Are infinite straight lines.



$e^{xy} - y^2 = 0$ is $x = \frac{\log y^2}{y}$
[odd fraction of y]



y	$-\infty$	0	1	e	∞
x	odd fraction of y		0	2/e	0^+
$\frac{dx}{dy}$			↗	0	↘

From my picture:

	1st root	2nd root (4.5)	3rd root (7.5)
$y \in$	$[1,2]$	$[e, \frac{3\pi}{2}]$	$[5, \frac{5\pi}{2}]$
$x \in$	$[0,1]$	$[0,1]$	$[0,1]$

Newton method: $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - J_0^{-1} F_0$

$$F \equiv \begin{pmatrix} e^{xy} - y^2 \\ \cos(x+y) \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} y e^{xy} & x e^{xy} - 2y \\ -\sin(x+y) & -\sin(x+y) \end{pmatrix}$$

Jacobian matrix

$$\det J = \left[(x-y) e^{xy} - 2y \right] \sin(x+y)$$

$$J^{-1} = \frac{1}{[(x-y)e^{xy}-2y]\sin(x+y)} \begin{pmatrix} -\sin(x+y) & -xe^{xy}+2y \\ \sin(x+y) & ye^{xy} \end{pmatrix}$$

1^{st} root: $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

considering the intervals where the asked roots are ... ... I choose...

$$F_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 1 \end{pmatrix}$$

$$J_0 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -\sin 1 & -\sin 1 \end{pmatrix}$$

$$J_0^{-1} = \frac{1}{[-3\sin 1]} \begin{pmatrix} -\sin 1 & 2 \\ \sin 1 & 1 \end{pmatrix}$$

and obtain

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3\sin 1} \begin{pmatrix} -\sin 1 & 2 \\ \sin 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\cot 1 \\ 1 + \frac{1}{3}\cot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.42806 \\ 1.21403 \end{pmatrix}$$

$2^{\underline{nd}}$ root: $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, gives $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 15 + 8\cot 4 \\ 33 + 4\cot 4 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1.82579 \\ 3.03789 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ gives $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 48 + 14\cot 7 \\ 99 + 7\cot 7 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3.050725 \\ 5.096791 \end{pmatrix}$$

last point.

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0.428062\\1.214032\end{pmatrix}, \underset{\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}0.340155\\1.2305201\end{pmatrix}}, \underset{\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}?}{\begin{pmatrix}0.338748\\1.232049\end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1.825794\\3.037897\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1.268068\\3.443156\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0.8920251\\3.8203638\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3.050725\\5.096791\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3.0126673\\4.832583\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2.448744\\5.405238\end{pmatrix}$$

Although not obvious from these values (and not for the exam),

1st root $\simeq \begin{pmatrix}0.3387489\\1.2320474\end{pmatrix} \rightsquigarrow x+y = \frac{\pi}{2}$

2nd root $\simeq \begin{pmatrix}0.6921694\\4.0202196\end{pmatrix} \rightsquigarrow x+y = \frac{3\pi}{2}$

3rd root $\simeq \begin{pmatrix}0.5442630\\7.3097186\end{pmatrix} \swarrow x+y = \frac{5\pi}{2}$

I_{2N}, I_{4N} $\rangle$ $\frac{1}{3}(4I_{4N}-I_{2N}) - \frac{a_3}{48N^3} - \frac{5\,a_6}{1024N^6} - \cdots$